»Mladi za napredek Maribora 2020«

37. srečanje

RACIONALNI PRIBLIŽKI IRACIONALNIH ŠTEVIL

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: ARMINA RAHMANOVIĆ

Mentor: LILIJANA PETEK
Šola: PRVA GIMNAZIJA MARIBOR

Število točk: 141/ 170

Maribor, 2020

Kazalo

Kazalo slik

POVZETEK

Z iracionalnimi števili je težko računati, zato sem želela poiskati njihove racionalne približke, kar je bil glavni cilj naloge.

Števila $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi$ in zlato število $\boldsymbol{\phi}$ sem razvila v verižne ulomke, jim poiskala racionalne približke in jih tudi preizkusila.

Ugotovila sem, da lahko vsako realno število razvijemo v verižni ulomek. Pri tem razvoju sem si pomagala s tehnologijo. Ugotovila sem, da je razvoj racionalnih števil v verižni ulomek končen, iracionalnih pa neskončen (periodičen). Števila $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ in zlato število $\boldsymbol{\phi}$ imajo neskončni periodični verižni ulomek, števili e in π pa neskončni neperiodični verižni ulomek. Iracionalna števila $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ in zlato število $\boldsymbol{\phi}$ sem razvila v verižni ulomek brez uporabe računala. Ugotovila sem, da lahko vsakemu iracionalnemu številu pripišemo več racionalnih približkov, ki pa se razlikujejo glede natančnosti.

ABSTRACT

It is hard to deal with irrational numbers. This is the reason why I wanted to find their rational approximations, which became the main aim of this research paper.

Numbers $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi$ and the golden ratio $\boldsymbol{\phi}$ were developed into continued fractions. What is more, their rational approximations were found and also tested.

It was discovered that every real number can be developed into a continued fraction and technology was of great help throughout developing it. I came to the conclusion that the development of rational numbers into a continued fraction is finite, whereas that of irational numbers is infinite (periodical). Numbers $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ and the golden ratio $\boldsymbol{\phi}$ have infinite periodical continued fraction, numbers e and π, on the other hand, an infinite unperiodical continued fraction. Irrational numbers $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ and the golden ratio $\boldsymbol{\phi}$ were developed into a continued fraction without using a calculator. I found out that every irrational number can be attributed by more rational approximations, which differ from one another according to precision.

ZAHVALA

Posebna zahvala gre moji profesorici matematike, ki je bila pripravljena za mentorstvo. Hvala, da ste mi vedno bili na voljo za kakršen koli nasvet in da ste mi pomagali pri problemih, ki so se pojavljali pri izdelavi raziskovalne naloge. Zahvala gre tudi profesorici slovenščine, ki je lektorirala nalogo, ter profesorici angleščine, ki je pomagala pri povzetku v angleščini.

1 UVOD

„Kjer koli na planetu smo, mimo nas kot vihar drvijo števila. Vozimo se po reki števil. Števila poslušamo po telefonu. Na zapestjih nosimo spreminjajoča se števila.“

(Bentley, 2010, str. 8)

Živimo v številih, govorimo v številih in za zabavo opazujemo števila. Pitagori pripisujemo trditev „Vse je število!“, ki pa jo je prvič zapisal Aristotel sto let kasneje. Števila niso le del predmeta matematike, v vsakdanjem življenju smo obdani s števili, česar se je tudi Pitagora zavedal, ker je povedal: „Svet je zgrajen na moči števil.“

Isti količniki so se vedno znova pojavljali v naravi, morda med obsegom kroga in njegovim premerom, tako smo dobili tudi nekatere stalne vrednosti (npr. π). Večina ljudi si pod pojmom števila predstavlja samo cela števila, ne pomislijo pa na števila, kot so $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$ ipd. Ta števila pri dijakih niso priljubljena za računanje, ker zanje potrebujejo več časa. Števila, kot so $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e,$ lahko prikazujemo na različne načine. V svoji raziskovalni nalogi sem se lotila zapisovanja števil s pomočjo verižnih ulomkov. Verižni ulomki pri dijakih niso »priljubljeni« zaradi svoje oblike. Ko dijaki zagledajo številne ulomkove črte, pomislijo, da je reševanje verižnih ulomkov izguba časa. To mnenje bom poskusila spremeniti s svojo raziskovalno nalogo. Prav tako sem natančno raziskala nekatera iracionalna števila, ki se pogosto pojavljajo v nalogah, a velikokrat dijaki ne vemo, kako so matematiki do njih prišli. Najverjetneje nam postanejo zanimivejša, ko raziščemo njihov nastanek in se zavemo njihovega pomena.

1.1 CILJI RAZISKOVALNE NALOGE

Glavni cilj moje raziskovalne naloge je bil poiskati racionalne približke določenim iracionalnim številom, kot so $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi$ in zlato število $\boldsymbol{\phi}$. Želela sem preveriti, ali lahko vsako iracionalno število razvijemo v verižni ulomek ter mu poiščemo racionalne približke.

1.2 HIPOTEZE

1) Vsako iracionalno število lahko razvijemo v verižni ulomek in mu poiščemo racionalni približek.
2) Racionalnega približka iracionalnega števila ne moremo določiti brez računala.
3) Vsakemu iracionalnemu številu lahko pripišemo več racionalnih približkov.

1.3 METODOLOGIJA

Zanesljive podatke o verižnih ulomkih in njihovih približkih sem iskala v člankih in s prebiranjem literature. Glavna vira sta bila članka Verižni približki (Pavletič) in Continued Fractions and the Euclidean Algorithm (Hammond). Iz člankov sem črpala teoretično podlago in uporabila nekatere računske primere. V raziskovalnem delu sem konstruirala svoje primere razvojev iracionalnih števil v verižne ulomke, poiskala njihove racionalne približke in jih tudi preizkusila. Grafično sem ponazorila iracionalna števila $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, e$ s pomočjo računalniškega programa Geogebra.

2 TEORETIČNI DEL

2.1 RACIONALNA ŠTEVILA

Racionalna števila $\mathbb{Q}$ so števila, ki jih lahko zapišemo v obliki ulomka. *Ulomek* $\frac{a}{b}$ je matematičen zapis, ki je sestavljen iz števca, imenovalca in ulomkove črte. Racionalna števila imajo periodičen (*ponavljajoč*) decimalni zapis ali končen decimalni zapis.

Egipčani so razvili splošno sprejeto metodo za pisanje ulomkov. Na začetku so Pitagorejci verjeli, da so vsa števila racionalna. To pomeni, da je bilo po njihovem mnenju mogoče vsako število zapisati kot celo število ali pa kot količnik dveh celih števil. Medtem ko smo se navadili na zamisel, da števila ne opisujejo vedno le celote, ampak lahko tudi del celote, pa je trajalo dlje, da so iznašli tudi decimalno vejico. Sirijski matematik Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim Al-Uklidisi se je tega prvi domislil. Napisal je prvo besedilo, ki ga poznamo, o zapisu števila $7\frac{3}{8}$ v obliki 7,375. Na takšen način so se lahko zapisovala velika števila, pa tudi zelo majhna, kot je 0,001. Zaradi tega zapisa so lahko začeli preučevati stvari, ki so tako majhne, da jih ne moremo videti.

(Bentley, 2010, str. 31, 32)

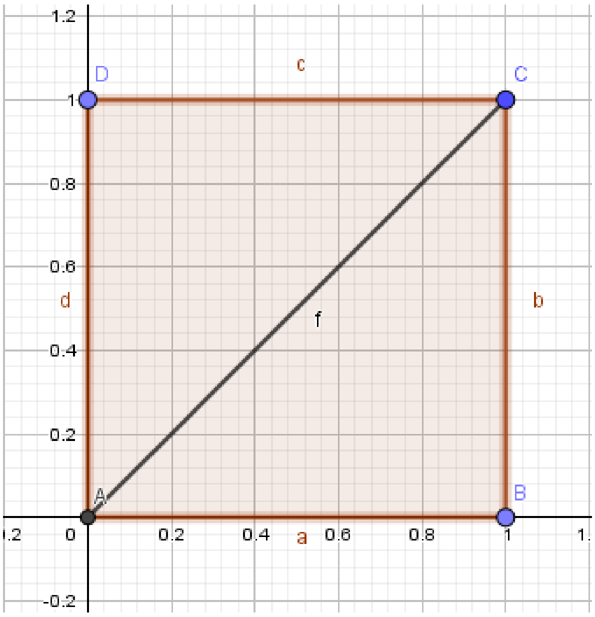
2.2 IRACIONALNA ŠTEVILA

Iracionalna števila $\mathfrak{I}$ so tista, ki jih ne moremo zapisati v obliki ulomka (*neskončna neperiodična* decimalna števila). To so npr. števila $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi$ …

Potem ko so spoznali iracionalna števila, so lahko nenadoma dobro opisali like, kot so trikotniki, kvadrati in krogi. Hipokrat je bil prvi, ki je napisal knjigo o geometriji.

2.2.1 Iracionalno število $\sqrt{2}$

Obstoj iracionalnega števila $\sqrt{2}$ so dokazali s Pitagorovim izrekom, kjer sta stranici dolgi eno enoto. Ugotovili so, da mora obstajati neko skrivnostno število, ki je rešitev tega. Število $\sqrt{2}$ ni racionalno število, kar lahko dokažemo. To je število, ki ga v decimalni obliki ne moremo popolnoma zapisati. Zapišemo lahko le del tega števila: 1,414213562373095…



Legenda:

$|a| = |b| = |c| = |d| = 1$

$|f| = \sqrt{2}$

A(0,0),B(1,0), C(1,1), D(0,1)

Slika 1: Grafični prikaz števila $\sqrt{2}$

Dokaz: število $\sqrt{2}$ ni racionalno število:

Predpostavimo, da sta števili a in b tuji, torej je $D(a,b) = 1$. Recimo, da lahko $\sqrt{2}$ zapišemo v obliki okrajšanega ulomka.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} / \cdot b$$

$$\sqrt{2} \cdot b = a$$

$$2b^2 = a^2$$

$\Longrightarrow a^2$ je sodo število, saj je kvadrat lihega števila liho število

$$a = 2k$$

$$2b^2 = (2k)^2$$

$$2b^2 = 4k^2 / : 2$$

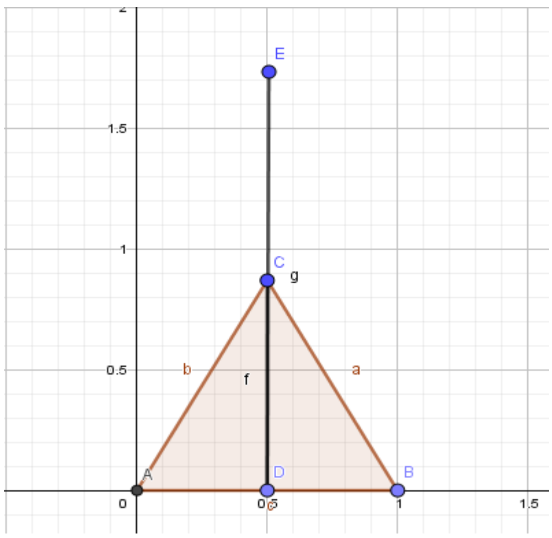
$$b^2 = 2k^2$$

$$\Longrightarrow b^2 \text{ je sodo število, saj je kvadrat lihega števila liho število}$$

Tako smo prišli v protislovje z začetno predpostavko in dokazali, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

2.2.2 Iracionalno število $\sqrt{3}$

Iracionalno število $\sqrt{3}$ najdemo v enakostraničnem trikotniku.



Slika 2: Grafični prikaz števila $\sqrt{3}$

Legenda:

$$|a| = |b| = |c| = 1$$

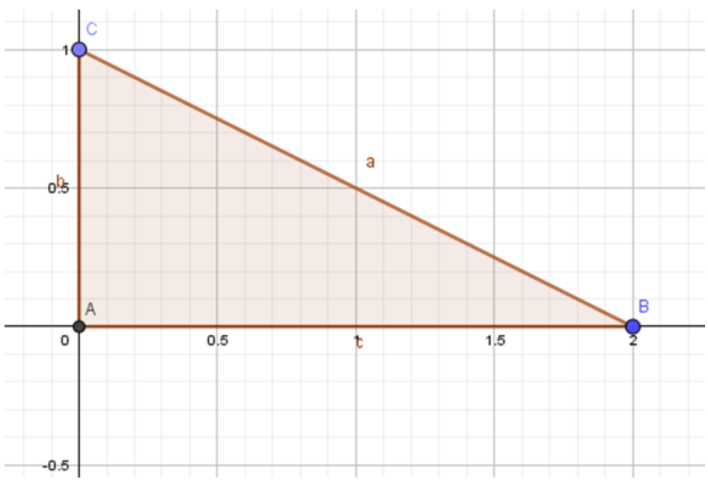
$$|f| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|g| = \sqrt{3}$$

A(0,0), B(1,0), C$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

2.2.3 Iracionalno število $\sqrt{5}$

Iracionalno število $\sqrt{5}$ lahko predstavimo v pravokotnem trikotniku.



Slika 3: Grafični prikaz števila $\sqrt{5}$

Legenda:

A(0,0), B(2,0), C(0,1)

$|a|$ = $\sqrt{5}$, $|b|$ =1 $|c|$=2

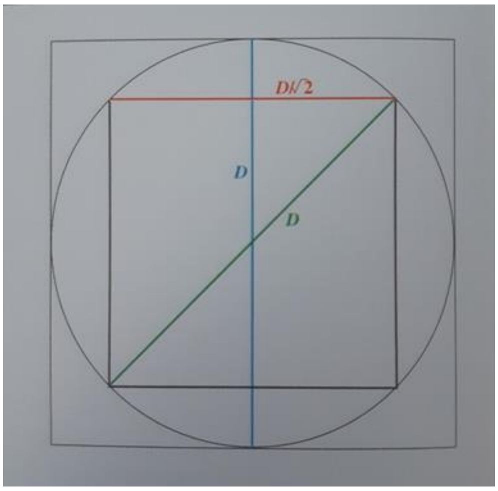
2.2.4 Iracionalno število π

Število π je količnik. To je odgovor na vprašanje: v kakšnem razmerju sta razdalja od ene strani kroga do druge (premer) in dolžina zunanjega roba kroga (obseg)? Matematiki so to povezanost ugotovili že pred tisočletji. Nekateri še danes verjamejo, da je π vreden $\frac{22}{7}$, ampak π je iracionalno število, kar pomeni, da ga ne moremo zapisati v obliki ulomka, zato ta vrednost ne more biti pravilna.

(Bentley, 2010, str. 141)

Arhimed je raziskoval vrednost števila π in je bil prvi, ki se je zavedal, da je π iracionalno število.

Za določitev vrednosti π je uporabil poligone (like z ravnimi stranicami). Krogu je očrtal in včrtal poligon, nato pa izračunal količnika obsega poligona in premera kroga za oba poligona. Ker je obseg zunanjega poligona večji, obseg notranjega manjši od obsega kroga, je vedel, da mora vrednost števila pi ležati med obema količnikoma. Torej je ugotovil, da vrednost števila π leži med $\frac{22}{7}$ in $\frac{223}{71}$.



Slika 4: Arhimedovo izračunavanje števila π s poligoni (vir: BENTLEY, Peter. Knjiga o številih: skrivnost števil in kako so ustvarila sodobni svet*)*

Nato so znanstveniki računali vrednost števila π na različne načine in so ugotovili zanimivo lastnost, namreč v decimalnem zapisu nastopajo vse števke od 0 do 9 z enako frekvenco.

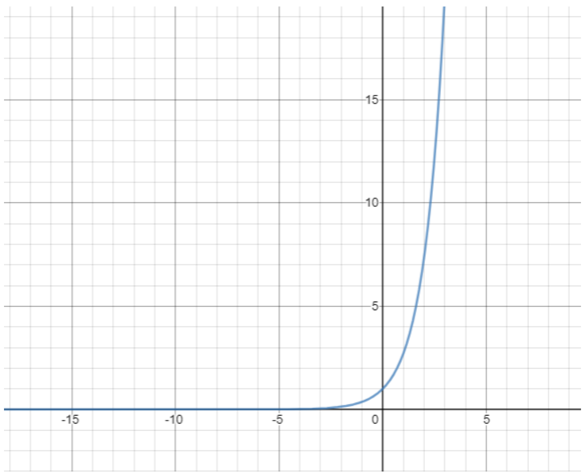
2.2.5 Iracionalno število e

Število e je eno od skrivnostnih iracionalnih števil, ki se skrivajo prav v osrčju matematike. Pomembno je pri izdelavi zapletenih strojev, avtomobilov, računalnikov. Število e se imenuje *Eulerjeva konstanta.* Število e izračunamo na naslednji način:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Ta zveza velja le za velike n, pri malih je to število premalo natančno. Bernoulli se je zavedal, da ima novo število nekaj opraviti s potenciranjem in logaritmiranjem. Zavedal se je tudi, da to število mora biti pogosto v naravi. S tem številom lahko konstruiramo logaritemsko krivuljo.

Naravna rast je način spreminjanja neke količine s časom. Iz vsakdanjega življenja poznamo več primerov, eden od njih je opis spreminjanja števila osebkov dane skupine v odvisnosti od pretečenega časa. Naj bo N število osebkov na začetku in p naravni prirast, izražen v odstotkih. Po x časovnih enotah je vseh osebkov $f(x)=N\cdot e^{\frac{px}{100}}$.



Slika 5: Graf eksponentne funkcije e^x

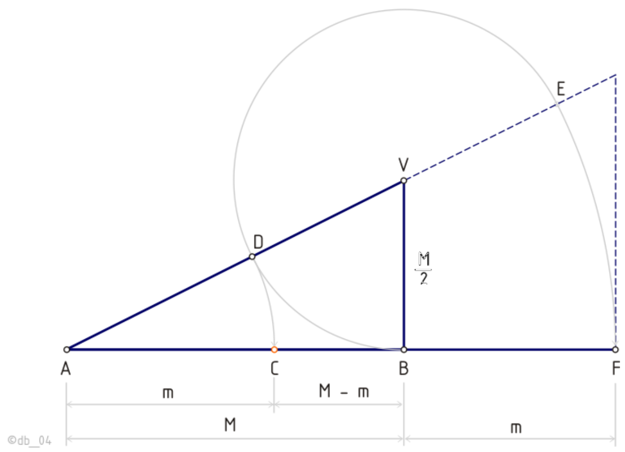
2.2.6 Zlato število ϕ

Zlato število $\boldsymbol{\phi}$ lahko najdemo v številnih meritvah in količnikih dolžin starih grških kipov, zgradb in celo egipčanskih piramid. Najdemo ga tudi v vzorcih, ki nastanejo pri parjenju zajcev in spiralah. Nekateri trdijo, da je človeško telo narejeno iz količnikov, ki so enaki ϕ, in da se to število skriva v osrčju vsega, kar je lepo. Danes je to število tako posebno, da se imenuje *zlati rez*, *zlati količnik* ali *zlato število*.

Če daljico razdelimo na dva neenaka dela tako, da je razmerje celotne dolžine daljice $a + b$ proti dolžini večjega dela a enako kot razmerje med dolžino večjega dela a proti manjšemu delu b, smo daljico razdelili v razmerju ZLATEGA REZA.

$$(a + b): a = a: b$$

Če razmerje preoblikujemo v enačbo: $a^2 - ab + b^2 = 0$ izrazimo a, lahko izračunamo natančno vrednost $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Iracionalno število $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 \ldots$ imenujemo **zlato število** in ga označimo s $\boldsymbol{\phi}$.



Legenda:

$a = m$

$b = M - m,$

$M = a + b$

Slika 6: Konstrukcija zlate točke (vir: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/sl/2/2b/Daljica_konst1.png)

Evklid je razložil, kako lahko izračunamo njegovo vrednost. Na daljici med točkama A in B nastane zlati količnik, če točko C izberemo tako, da je količnik dolžin $|AB|:|AC|$ enak količniku dolžin $|AC|:|CB|$.

(Bentley, 2010, str. 75)

2.3 VPELJAVA VERIŽNIH ULOMKOV

a) Racionalna števila, končni in neskončni verižni ulomki

Definicija: Končni verižni ulomek je izraz oblike:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\vdots \atop a_{N-1} + \cfrac{1}{a_N}}}}$$

kjer je $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{N}$. Krajše ga predstavimo s tabelo $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$. Števila $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ imenujemo verižni koeficienti, ki določajo vrednost verižnega ulomka.

(Gajser, 2009, str. 1)

Simbol $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ uvedemo zaradi bolj preglednega zapisa, pri čemer je $a_j \geq 1 \, \Lambda \, j \geq 2$.

$[a_1] = a_1$

$[a_1, a_2, \dots, a_N] = a_1 + \frac{1}{[a_2, \dots, a_N]}$

<u>Zgled</u>:

$$[2, 1, 3, 5, 7] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{7}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{36}{7}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{7}{36}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{115}{151}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{151}{115}}$$

$$= 2\frac{115}{151}$$

Nalogo lahko naredimo tudi v nasprotni smeri. Vzemimo ulomek $x = \frac{15}{11}$. Najprej ga razdelimo na celi del in ulomljeni del: $x = \frac{15}{11} = 1 + \frac{4}{11}$. Ulomljeni del spremenimo v dvojni ulomek: $x = 1 + \frac{1}{\frac{11}{4}}$. Število pod ulomkovo črto spet spremenimo v vsoto celega in ulomljenega dela. $x = 1 + \frac{1}{2+\frac{3}{4}}$. Ulomljeni del spremenimo v dvojni ulomek:

$x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{3}}}$. Dobljeni ulomek zapišemo kot vsoto celega in ulomljenega dela:

$x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$. Torej je $\frac{15}{11} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$. To lahko krajše zapišemo kot [1, 2, 1, 3]. Pri tem zapisu smo uporabili samo cele dele verižnega ulomka (verižne koeficiente).

Pri zapisu verižnega ulomka smo uporabili dva izmenična koraka:

1) Ulomke (večje od 1) smo razdelili na celi in ulomljeni del (ulomek med 0 in 1).

2) Dobljeni ulomljeni del smo spremenili v dvojni ulomek oziroma poiskali smo njegovo recipročno vrednost. Ker je le-ta večja od 1, smo lahko spet uporabili prvi korak.

Izrek 1: Poljubno pozitivno racionalno število lahko razvijemo v verižni ulomek na natanko dva načina. (Pavletič, 1999, str. 236)

Dokaz izreka 1: Naj bo x pozitivno racionalno število. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ takšen, da je $n \leq x < n + 1$. Potem lahko zapišemo $x = n + u$, kjer je $0 \leq u < 1$.

Če je $x = n$, je $u = 0$ in obratno.

Uporabimo zgoraj zapisana koraka. Torej je $x = n_1 + u_1$; $n_1 \in \mathbb{N}$ in $0 \leq u_1 < 1$. Če je $u_1 = 0$, se postopek konča. Če je $u_1 > 0$, potem je recipročna vrednost $\frac{1}{u_1} > 1$.

Ponovimo prvi korak $\frac{1}{u_1} = n_2 + u_2$, kjer je $n_2 \in \mathbb{N}$ in $0 \leq u_2 < 1$. Izrazimo $u_1 = \frac{1}{n_2+u_2}$. Če združimo zapisa, dobimo $x = n_1 + \frac{1}{n_2+u_2}$.

Ponovimo koraka. Če je $u_2 = 0$, dobimo verižni ulomek $x = n_1 + \frac{1}{n_2}$. Če je $u_2 > 0$, je $\frac{1}{u_2} = n_3 + u_3$, kjer je $n_3 \in \mathbb{N}$ in $0 \leq u_3 < 1$.

Torej je $x = n_1 + \frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+u_3}}$. V k-tem koraku tega postopka dobimo

$$x = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{n_k + u_k}}}}$$

kjer so $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ in $0 \leq u_1, u_2, \dots, u_k < 1$.

Zapišemo krajše $x = [n_1, n_2, n_3, \dots, n_k + u_k]$. Če je $u_k = 0$, se postopek konča. Sicer imamo še vsaj en korak $\frac{1}{u_k} = n_{k+1} + u_{k+1}$. Recimo, da imamo k-korakov. Tako smo pozitivno racionalno število x razvili v verižni ulomek $x = [n_1, n_2, n_3, \dots, n_k]$. Drugi način je, da v zadnjem koraku zapišemo

$$n_k = (n_k - 1) + \frac{1}{1}, \text{ če je } n_k > 1.$$

Pri preoblikovanju verižnega ulomka nazaj v običajni ulomek uporabljamo posebno shemo, ki omogoča preprostejše računanje. Za primer bomo uporabili verižni ulomek [1, 2, 1, 3].

		1	2	1	3
0	1	1	3	4	15
1	0	1	2	3	11

Števila $1, 2, 1, 3$ so koeficienti našega števila, ničle in enke na levi strani pa so začetne vrednosti, ki so potrebne za pravilno delovanje sheme (njihova razporeditev je vedno enaka). Desni del tabele bomo napolnili po principu $a + b \cdot c$. V prvi vrstici je število c, v spodnji pa sta v prejšnjih stolpcih števili a in b. Izračunano število vpišemo v prazen prostorček pod c. Enak postopek uporabljamo za drugo in tretjo vrstico, paziti je treba le, da število c obakrat vzamemo iz prve vrstice.

V drugo vrstico pod število 1 izračunamo $0 + 1 \cdot 1$ in vpišemo rezultat, v tretji vrstici enako $1 + 0 \cdot 1$.

Rezultat se skriva v zadnjem stolpcu in je že zapisan v obliki ulomka. Zraven rezultata $\frac{15}{11}$ smo dobili še tri *verižne približke* desnega števila. Prvi približek je celi del danega števila, zato morda ni najboljši celoštevilski približek. Dobimo še $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$.

Tako pridemo do naslednje ugotovitve.

Vsak verižni približek danega števila, razen morda prvega, je boljši približek tega števila kot katerikoli drug ulomek z manjšim ali enakim imenovalcem.

(Pavletič, 1999, str. 237)

Definicija: Neskončni verižni ulomek je izraz oblike:

$$[a_0, a_1, a_2 \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}}$$

kjer so $a_0 \in \mathbb{Z}$ in $a_1, a_2 \dots \in \mathbb{N}$.

Izrek 2: Verižni ulomek racionalnega števila je končen.

(Hammond, 1997, str. 6)

Dokaz izreka 2: Če je x racionalno število, ga lahko zapišemo v obliki $x = \frac{a}{b}$, kjer je $a, b \in \mathbb{Z}$ in naj bo $b > 0$.

Ulomek $\frac{a}{b}$ zapišemo kot celi del in ulomek manjši od 1. Torej je

$$\frac{a}{b} = n_1 + u_1; 0 \leq u_1 < 1, n_1 \in \mathbb{Z}$$

Iz enačbe izrazimo

$$u_1 = \frac{a - n_1 b}{b}$$

in zapišemo

$$u_1 = \frac{r_1}{b}$$

kjer je r_1 ostanek pri deljenju števila a s številom b. Če je $u_1 = 0$, je x celo število. Sicer je $u_1 > 0$ in tvorimo njegovo recipročno vrednost

$$\frac{1}{u_1} = \frac{b}{r_1}$$

Ponovimo postopek z ulomkom $\frac{b}{r_1}$ in dobimo

$$\frac{b}{r_1} = n_2 + u_2; 0 \leq u_2 < 1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

Iz enačbe izrazimo

$$u_2 = \frac{b - n_2 \cdot r_1}{r_1}$$

Ponovno zapišemo

$$u_2 = \frac{r_2}{r_1}$$

kjer je r_2 ostanek pri deljenju števila b s številom r_1.

Tako so kvocienti v tem Evklidovem algoritmu cela števila n_1, n_2 ... Ta števila nastopajo v verižnem ulomku racionalnega števila x. Vemo pa, da ima Evklidov algoritem končno število korakov in se zaključi z ostankom 0. Zato je verižni ulomek racionalnega števila končen.

b) Iracionalna števila in neskončni periodični verižni ulomki

Vsak ulomek lahko zapišemo v decimalni obliki, pri čemer se lahko v zapisu pojavijo težave. Decimalni zapis nedesetiških ulomkov ima neskončno mnogo decimalk in iz praktičnih razlogov ga zaokrožimo na nekaj mest.

<u>Zgled</u>: Računalo nam izpiše število $y = 1.85673452$. To je le decimalni približek. Takšno iracionalno število bomo razvili v verižni ulomek. Postopek je enak kot pri prejšnjem zgledu.

$$y = 1.85673452$$

$$= 1 + 0.856734525$$

$$= 1 + \frac{1}{1.167222717}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + 0.167222717}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5.9800487514}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + 0.9800487514}}$$

$$= \cdots$$

Na računalu je treba izmenično uporabljati tipki FRAC (= ulomljeni del) in $\frac{1}{x}$ (recipročna vrednost).

Dobimo naslednji rezultat $y = [1,1,5,1,49, \dots]$. Iz teh koeficientov lahko tvorimo verižne približke

$$[1] = 1$$

$$[1,1] = 2$$

$$[1,1,5] = \frac{11}{6}$$

$$[1,1,5,1] = \frac{13}{7}$$

$$[1,1,5,1,49] = \frac{648}{349}$$

$$\dots$$

Zadnji verižni približek je praviloma najnatančnejši.

Izrek 3: V verižni ulomek lahko razvijemo poljubno pozitivno realno število. Razvoj racionalnih števil je končen, razvoj iracionalnih števil pa neskončen.

(Pavletič, 1999, str. 239)

Opomba: Na primeru zgoraj smo videli postopek, s katerim lahko poljubno pozitivno realno število razvijemo v verižni ulomek. V **izreku 2** smo že zapisali, da je verižni ulomek racionalnega števila končen, in to tudi dokazali.

Dokaz, da je verižni ulomek iracionalnega števila neskončen, bomo zaradi zahtevnosti izpustili.

Definicija: Neskončni periodični verižni ulomek je neskončni verižni ulomek, kjer se določeni verižni koeficienti periodično ponavljajo.

Oglejmo si dva primera:

1. Poglejmo primer periodičnega verižnega ulomka in poiščimo njegovo vrednost:

Če je $x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\cdots}}}}}$, to lahko zapišemo kot $x = 1 + \frac{1}{y}$.

Pri tem je $y = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\cdots}}}}$

$$y = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{y}}$$

$$y = \frac{7y + 2}{3y + 1}$$

Iz tega dobimo kvadratno enačbo $3y^2 - 6y - 2 = 0$. Diskriminanta $D = 60$ in dobimo rešitev $y = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$. y vstavimo v $x = 1 + \frac{1}{y}$ in dobimo $x = \frac{\sqrt{15}-1}{2}$.

Vrednost vsakega periodičnega verižnega ulomka je rešitev kvadratne enačbe s pozitivno diskriminanto.

2. Število $\sqrt{10}$ brez uporabe tehnologije razvijemo v neskončni periodični verižni ulomek:

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{10}-3}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{\sqrt{10}+3}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{10}-3}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{10}+3}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

$$= [3,6,6,6,\dots]$$

In $\sqrt{10} - 3 = [6,6,6,\dots]$ je popoln nekončni periodični verižni ulomek.

Izrek 4: Vsak neskončni periodični verižni ulomek je razvoj kvadratnega iracionalnega števila oblike $\frac{a+b\sqrt{m}}{c}$, kjer so $a, b, c, m \in \mathbb{Z}; m > 0, c \neq 0$ in m ni popoln kvadrat.

(Hammond, 1997, str. 15)

3 RAZISKOVALNI DEL

V tem delu bomo poiskali racionalne približke nekaterih zanimivih iracionalnih števil, kot so $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e$ in zlato število $\boldsymbol{\phi}$. Vsako število posebej bomo razvili v verižni ulomek in ga na koncu tudi preizkusili.

3.1 IRACIONALNO ŠTEVILO $\sqrt{2}$

Iracionalno število $\sqrt{2}$ ima vrednost $1{,}414213562$ ... Zanima nas njegov verižni ulomek.

$$\sqrt{2} = 1 + 0{,}414213562$$

$$= 1 + \frac{1}{0{,}414213562}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{0{,}414213565}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0{,}414213547}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{0{,}414213547}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\cdots}}}}$$

$\sqrt{2}$ razvijemo v verižni ulomek na naslednji način:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}$$

$$= [1,2,2,2,2 \ldots]$$

Lahko uporabimo natančnejšo metodo za razvoj števila $\sqrt{2}$ v verižni ulomek.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} \left(\Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}\right)$$

Uporabimo $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$

saj je

$$1 = \left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$1 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

Tako dobimo:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

Uporabimo $\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$, kar dobimo iz prve enačbe tako, da prištejemo 1 na obeh straneh.

Vstavimo $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}}$ in ponovimo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}}}}$$

$$= [1,2,2, \dots]$$

Kot vidimo, je to neskončni periodični verižni ulomek. Če bi še dalje računali, bi prišli tudi do števil, ki so različna od 2, a to se pojavi zaradi napak pri računanju.

Preizkus oz. racionalni približek:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{5}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{5}{12}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\frac{29}{12}}$$

$$= 1 + \frac{12}{29}$$

$$= 1\frac{12}{29} = 1{,}413$$

Opazimo, da smo dobili na dve decimalki natančen približek. Če bi vzeli daljši verižni ulomek, bi tudi približek bil nekoliko natančnejši.

3.2 IRACIONALNO ŠTEVILO $\sqrt{3}$

Iracionalno število $\sqrt{3}$ ima vrednost $1{,}732050808$ ...

$$\sqrt{3} = 1 + 0{,}732050808$$

$$= 1 + \frac{1}{0{,}732050808}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}366025403}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 0{,}732050818}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + 0{,}366025384}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 0{,}732050955}}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

$\sqrt{3}$ razvijemo v verižni ulomek na naslednji način:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

$$= [1{,}1{,}2{,}1{,}2{,}1{,}2 \dots]$$

Lahko uporabimo natančnejšo metodo.

$$(1)\ \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}$$

Uporabimo: $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = 2$

$$(2)\ 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right) = \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

In dobimo $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$

Iz prve (1) enačbe je

$$\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} \text{ in } \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}$$

Združimo

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}$$

Uporabimo (2) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}$$

In postopek ponavljamo.

Preizkus oz. racionalni približek:

$$\sqrt{3} \approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{8}{3}}}$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{8}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\frac{11}{8}}$$

$$= 1 + \frac{8}{11}$$

$$= \frac{19}{11} \approx 1{,}727$$

3.3 IRACIONALNO ŠTEVILO $\sqrt{5}$

Iracionalno število $\sqrt{5}$ ima vrednost $2{,}236067977$ ...

$$\sqrt{5} = 2 + 0{,}236067977$$

$$= 2 + \frac{1}{0{,}236067977}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{0{,}236067986}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{0{,}236067825}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots}}}}$$

$\sqrt{5}$ razvijemo v verižni ulomek na naslednji način:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots}}}}$$

$$= [2{,}4{,}4{,}4{,}4 \dots]$$

Lahko uporabimo natančnejši postopek.

$$(1)\ \sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{5} - 2}}$$

Uporabimo $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2 \Leftrightarrow 1 = \left(\sqrt{5} + 2\right)\left(\sqrt{5} - 2\right)$

In dobimo $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$

Iz prve (1) enačbe dobimo

$$\sqrt{5}+2=4+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{5}-2}}$$

Združimo

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

In postopek ponavljamo.

<u>Preizkus oz. racionalni približek:</u>

$$\sqrt{5}\approx 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{17}{4}}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{4}{17}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{72}{17}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{17}{72}}$$

$$=2+\cfrac{1}{\cfrac{305}{72}}$$

$$= 2 + \frac{72}{305}$$

$$= \frac{682}{305} = 2{,}236065574$$

3.4 IRACIONALNO ŠTEVILO π

Iracionalno število π ima vrednost $3{,}14159265359\ldots$

$$\pi = 3 + 0{,}14159265359$$

$$= 3 + \frac{1}{0{,}14159265359}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{0{,}062513306}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{0{,}99659439}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}003417248}}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{0{,}6331364}}}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ldots}}}}}}$$

π razvijemo v verižni ulomek na naslednji način:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}$$

$$= [3,7,15,1,292,1,1,\dots]$$

<u>Preizkus oz. racionalni približek:</u>

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1}}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{293}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{\frac{294}{293}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \frac{293}{294}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\frac{4703}{294}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{294}{4703}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{\frac{33215}{4703}}$$

$$= 3 + \frac{4703}{33215} = 3{,}141592654$$

3.5 IRACIONALNO ŠTEVILO e

Iracionalno število e ima vrednost $2{,}718281828\ldots$

$$e = 2 + 0{,}718281828$$

$$= 2 + \frac{1}{0{,}718281828}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}392211192}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{0{,}549646773}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}819350261}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}22047926}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\cdots}}}}}}$$

Število e razvijemo v verižni ulomek na naslednji način:

$$e \approx 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}$$

$$= [2,1,2,1,1,4,\dots]$$

<u>Preizkus oz. racionalni približek:</u>

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{5}{4}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{4}{5}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{9}{5}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{5}{9}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{23}{9}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{9}{23}}$$

$$= 2 + \frac{1}{\frac{32}{23}}$$

$$= 2 + \frac{23}{32}$$

$$= \frac{87}{32} = 2{,}71875$$

3.6 ZLATO ŠTEVILO $\boldsymbol{\phi}$

Iracionalno število ϕ ima vrednost $1{,}618033988749894\ldots$

$$\phi = 1 + 0{,}618033988749894$$

$$= 1 + \frac{1}{0{,}618033988749894}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}618033989}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}618033988}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}618033991}}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots}}}}}$$

Zlati $\boldsymbol{\phi}$ razvijemo v verižni ulomek na naslednji način:

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

$$= [1,1,1,1,1,1 \ldots]$$

Lahko si pomagamo s približkom za $\sqrt{5}$:

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}\right)$$

Približno $\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{17}{4}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{76}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{228}{76} = \frac{57}{38}$$

<u>Preizkus oz. racionalni približek:</u>

$$\phi \approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{3}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{5}{3}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{5}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\frac{8}{5}}$$

$$= 1 + \frac{5}{8}$$

$$= \frac{13}{8} = 1{,}625$$

3.7 SKLEP

Ugotovili smo, da lahko vsa našteta iracionalna števila razvijemo v verižne ulomke. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3}$, $\boldsymbol{\phi}$ imajo periodične vrednosti, π, e pa ne. Nekatera iracionalna števila, ki smo jih raziskali, imajo lepe verižne približke, ki nam lahko pomagajo pri določenih nalogah. Takšna števila se velikokrat pojavljajo v različnih tipih nalog. Če poznamo točne vrednosti iracionalnih števil, hitro pridemo do njihovih verižnih ulomkov. Ni nam treba več dvomiti o njihovi pravilnosti, ker smo vse tudi preizkusili.

4 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Tema, ki sem jo obravnavala, je zelo koristna pri nekaterih računskih nalogah. Potrudila sem se, da čim bolj pregledno predstavim, do kakšnih ugotovitev sem prišla. Informacije sem črpala iz različnih knjig in časopisov ter jih ustrezno citirala. Nalogo sem tudi večkrat predstavila sošolcem in sosošolcem ter jih seznanila z glavnimi ugotovitvami te naloge.

5 ZAKLJUČEK

Dosežen je bil glavni cilj raziskovalne naloge: našla sem racionalne približke iracionalnih števil, kot so $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi$ in zlato število $\boldsymbol{\phi}$. Na začetku sem postavila tri hipoteze.

Hipoteza 1: Vsako iracionalno število lahko razvijemo v verižni ulomek in mu poiščemo racionalni približek.

To hipotezo sem potrdila s pomočjo literature in jo preverila na nekaj primerih. Ulomke razdelimo na celi in ulomljeni del, dobljeni ulomljeni del pa spremenimo v dvojni ulomek in ta postopek ponavljamo.

Hipoteza 2: Racionalnega približka iracionalnih števil ne moremo določiti brez računala.

To hipotezo sem delno potrdila. Uporabila sem postopek, pri katerem lahko pridemo do racionalnega približka iracionalnih števil $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ in zlatega števila $\boldsymbol{\phi}$, ne da bi uporabila računalo. Vendar mi to ni uspelo za števili e in π.

Hipoteza 3: Vsakemu iracionalnemu številu lahko pripišemo več racionalnih približkov.

To hipotezo sem prav tako potrdila, saj lahko najdemo več racionalnih približkov iracionalnemu številu, vendar niso vsi približki dovolj natančni.

S to raziskovalno nalogo sem izvedela nekaj zanimivosti o iracionalnih številih ter našla preprostejši način računanja z iracionalnimi števili, s tem ko sem jih zamenjala z njihovimi racionalnimi približki.

Ob koncu naloge ostaja še nekaj možnosti za nadaljnje raziskave. Lahko bi se osredotočili na pisanje računalniškega programa, ki bi nam omogočil lažje pretvarjanje iracionalnih števil v verižne ulomke in iskal najboljše racionalne približke za ta števila. Lahko bi raziskali racionalne približke še več iracionalnih števil.

6 VIRI

6.1 LITERARNI IN SPLETNI VIRI

- PAVLETIČ, Marino. PRESEK: List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje. *Verižni približki.* 1999, št. 4, str. 234–240. ISSN 0351-6652.
- GAJSER, David. *Verižni ulomki* (online). Ljubljana: FMF. 5. 11. 2009. Datum citiranja: 2. 8. 2019. Dostopnost: https://www.fmf.unilj.si/~juvan/Racunalnistvo3/gradivo/verizni_ulomki.pdf.
- HAMMOND, Matthew. Lecture notes prepared for math 326. *Continued Fractions and the Euclidean Algorithm.* 1997, št. 326, str. 2–15.
- BENTLEY, Peter. 2008. *Knjiga o številih: skrivnost števil in kako so ustvarila sodobni svet.* Ljubljana: Tehniška založba. ISBN 978-961-251-212-5.
- LEGIŠA, Peter. PRESEK: List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje. *Pravilo 72 in število e.* 1993, št. 20, str. 290–293. ISSN 0351-6651. Dostopno na spletu http://www.presek.si/20/1146-Legisa.pdf.
- Vega 2 [online]. *Eučbeniki.* [citirano: 23. 9. 2019]. Dostopno na spletnem naslovu: https://eucbeniki.sio.si/vega2/286/index6.html#.

6.2 VIRI SLIK

- Slika 1: Lastni vir.
- Slika 2: Lastni vir.
- Slika 3: Lastni vir.
- Slika 4: BENTLEY, Peter. *Knjiga o številih: skrivnost števil in kako so ustvarila sodobni svet.*
- Slika 5: Lastni vir.
- Slika 6: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/sl/2/2b/Daljica_konst1.png. [citirano: 9. 11. 2019].