Mladi za napredek Maribora 2020
37. srečanje

Število kvadratov

Matematika
Raziskovalna naloga

Avtor: MATEVŽ PETEK, BLAŽ KOPRIVŠEK

Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ

Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Število točk: 160/ 170

Februar 2020

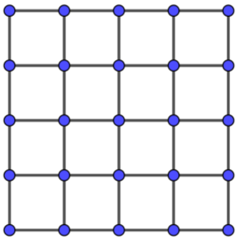
KAZALO

Povzetek

Celoštevilska mreža točk je mreža točk n x n ali m x n, v kateri lahko samo točke mreže uporabimo za oglišča likov. Oddaljenost točk v mreži po vodoravnih ali navpičnih mrežnih črtah merimo s celimi števili. V raziskovalni nalogi raziščemo, koliko različnih kvadratov lahko načrtamo v taki mreži. S sistematičnim preiskovanjem zapišemo pravilo za računanje števila takih kvadratov. V nadaljevanju na kratko preverimo, katere izmed ostalih pravilnih večkotnikov lahko načrtamo v tovrstno mrežo. Število različnih kvadratov preštevamo tudi v poljubni mreži m x n.

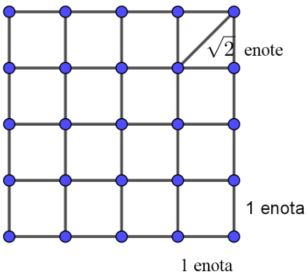
1. Uvod

V kvadratni mreži so premice (mrežne črte) med seboj enako oddaljene. Presečišča premic so točke mreže. Seveda so tudi točke mreže po vodoravni in navpični legi med seboj enako oddaljene (slika 1). Na sliki je primer mreže 5 x 5, kar pomeni da je v vodoravno smer pet mrežnih točk in prav tako v navpično smer pet mrežnih točk.



Slika 1: Mreža točk 5 x 5

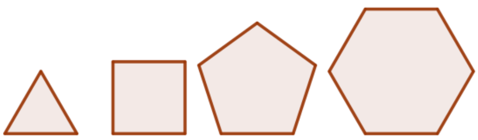
Točke v kvadratni mreži so med seboj oddaljene 1 enoto (v vodoravni oziroma navpični smeri) ter $\sqrt{2}$ enote v smeri diagonale (slika 2).



Slika 2: Razdalje

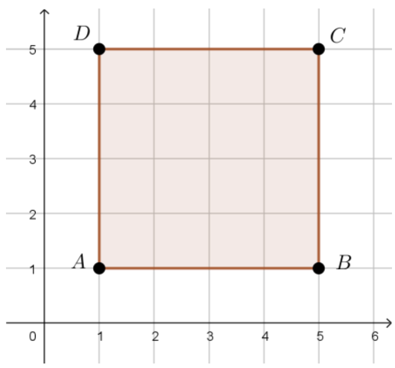
Oddaljenost dveh točk po diagonali izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka. Je dolžina diagonale v kvadratu $a\sqrt{2}$, kjer je $a = 1$.

V kvadratni mreži bomo načrtovali pravilne večkotnike. Pravilni večkotnik je večkotnik z vsemi skladnimi stranicami in skladnimi notranjimi koti. Pravilni večkotniki so recimo enakostranični trikotnik, kvadrat, enakostranični petkotnik, enakostranični šestkotnik (slika 3).



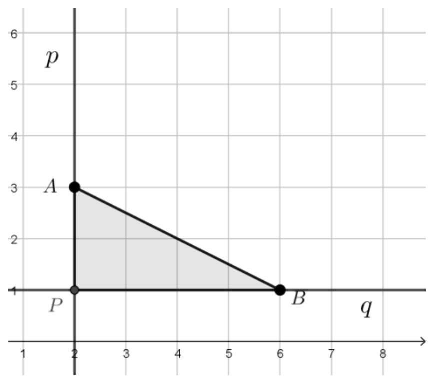
Slika 3: Pravilni večkotniki

Pravilne večkotnike želimo v kvadratno mrežo načrtati tako, da je vsako njihovo oglišče hkrati tudi točka mreže. Stranice pravilnih večkotnikov pa lahko ležijo na mrežnih črtah ali izven njih. Ker načrtujemo večkotnike v kvadratno mrežo, je očitno, da lahko v tako mrežo brez težav načrtamo kvadrate. Če ima kvadrat za sosednji oglišči točki mreže na isti mrežni črti, sta tudi preostali dve oglišči točki mreže na vzporedni mrežni črti (slika 4).



Slika 4: Kvadrat v mreži

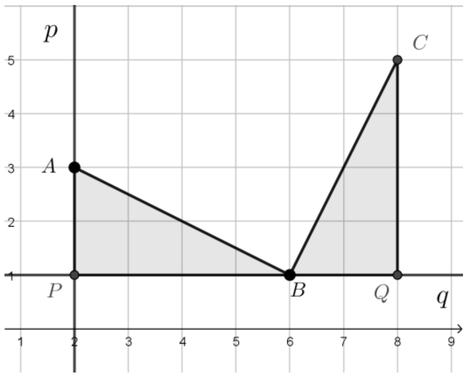
Nekoliko drugače je, če sosednji oglišči kvadrata (točki mreže) ne ležita na isti mrežni črti. Obstoj takega kvadrata, ki ima za svoje stranice diagonale mreže, je treba dokazati (preveriti). V ta namen načrtamo v mrežo točki *A* in *B*, ki naj bosta oglišči kvadrata, a ne ležita na isti mrežni črti (slika 5). Skozi točko *A* načrtamo premico *p*, vzporedno z *y* osjo. Skozi točko *B* načrtamo premico *q*, vzporedno z *x* osjo. Premici *p* in *q* sta mrežni črti. Njuno presečišče je točka mreže, *P*.



Slika 5

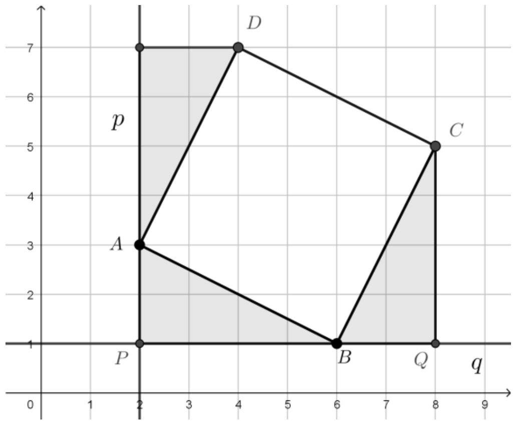
Daljici *AP* in *BP* ležita na mrežnih črtah, oglišča trikotnika *PBA* so točke mreže, točka *P* je vrh pravega kota. Trikotnik *PBA* je pravokotni trikotnik. Dolžini katet sta celi števili. Ker je daljica *AB* stranica iskanega kvadrata, mora za točko (oglišče) *C* veljati $|AB| = |BC|$ in $BC \perp BA$. Potem je daljica *CQ* pravokotna na premico *q* in $Q \in q$. Tako je trikotnik *BQC* pravokotni trikotnik (slika 6). Nasproti enako dolge hipotenuze je v obeh trikotnikih pravi kot. Točka *B* je vrh iztegnjenega kota, ki je vsota kotov $\angle ABP + \angle CBA + \angle QBC$. Vsota je enaka vsoti velikosti notranjih kotov v pravokotnem trikotniku *PBA*, zato velja enakost velikosti kotov $\angle PAB = \angle QBC$. Ker imata trikotnika dva skladna kota, sta skladna tudi $\angle ABP$ in

$\angle BCD$. Oba trikotnika imata skladne vse notranje kote (sta podobna), imata skladni hipotenuzi, zato sta trikotnika *BAP* in *CBQ* skladna. Tako imata tudi daljici *BQ* in *CQ* celoštevilčno dolžino. To pomeni, da je točka *C* ena izmed točk mreže.



Slika 6

Na enak način bi pokazali da je tudi oglišče *D* ena izmed točk mreže. Zato lahko trdimo, da ne glede na izbor sosednjih oglišč kvadrata, ki sta dve izmed točk mreže, vedno obstajata še dve točki mreže, da bo štirikotnik s temi štirimi oglišči kvadrat (slika 7).



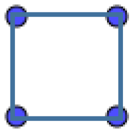
Slika 7

2. Kvadrat v mreži *n* x *n*

V mrežo točk načrtujemo kvadrate. V mreži 1 x 1 seveda ni nobenega kvadrata (slika 8), saj za kvadrat potrebujemo vsaj štiri mrežne točke. Lahko pa rečemo, da je načrtan kvadrat z dolžino stranice 0 (vsa štiri oglišča sovpadajo v eni točki).

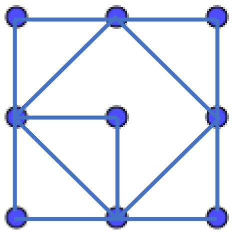
Slika 8: kvadrat v mreži točk 1 x 1

V mrežo točk 2 x 2 lahko načrtamo en kvadrat s stranico, ki točke povezuje po mrežnih črtah oz. vodoravno in navpično z dolžino 1 enota (slika 9).



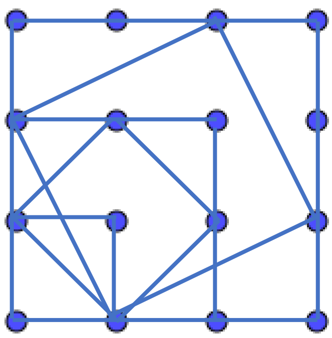
Slika 9: Kvadrat v mreži točk 2 x 2

V mrežo točk 3 x 3 lahko načrtamo tri različne kvadrate (slika 10). Dva kvadrata s stranicami, ki točke povezujejo vodoravno in navpično, oziroma ležijo na črtah mreže. Izhodiščno oglišče je prva točka mreže na prvi mrežni črti. Dolžine stranic teh kvadratov so 1 in 2 enoti. Načrtamo še en kvadrat, ki sosednji oglišči povezuje v diagonalni smeri. Izhodiščno oglišče tega kvadrata je druga točka na prvi vodoravni mrežni črti. Dolžina stranic tega kvadrata je $\sqrt{2}$ enote. Pri tem je $\sqrt{1^2 + {\color{red}1}^2} = \sqrt{2}$. Rdeče obarvana števka predstavlja oddaljenost prve točke na prvi vodoravni mrežni črti od izhodiščnega oglišča kvadrata (druga točka na prvi vodoravni mrežni črti je od prve oddaljena 1 enoto).



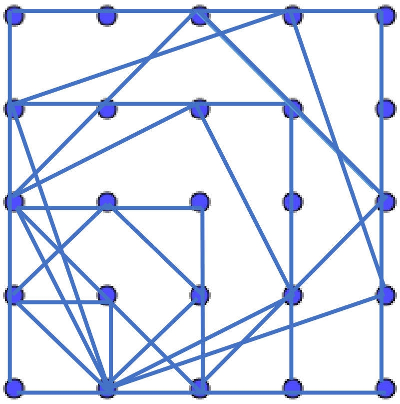
Slika 10: Kvadrati v mreži točk 3 x 3

V mrežo točk 4 x 4 lahko načrtamo pet različnih kvadratov (slika 11). Tri kvadrate s stranicami na mrežnih črtah. Dolžine stranic teh kvadratov so 1, 2 in 3 enote. Dva kvadrata s stranicami, ki točke povezujejo v diagonalni smeri. Izhodiščno oglišče je druga točka na prvi vodoravni mrežni črti. Dolžini stranic teh kvadratov sta $\sqrt{2}$ enoti in $\sqrt{5}$ enot, saj je $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.



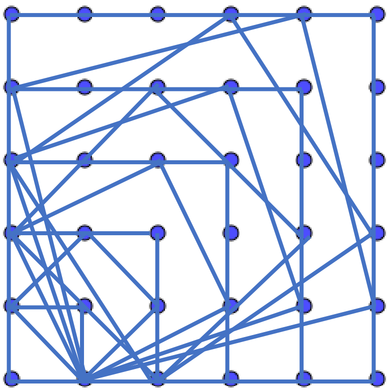
Slika 11: Kvadrati v mreži točk 4 x 4

V mrežo točk 5 x 5 lahko načrtamo osem različnih kvadratov (slika 12). Štiri kvadrate s stranicami na mrežnih črtah. Dolžine stranic teh kvadratov so 1, 2, 3 in 4 enote. Tri kvadrate s stranicami, ki točke mreže povezujejo diagonalno. Izhodiščno oglišče je druga točka na prvi vodoravni mrežni črti. Dolžine stranic so $\sqrt{2}$ enot, $\sqrt{5}$ enot in $\sqrt{10}$ enot. Pri tem vemo, da je $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Prav tako je načrtan en kvadrat s stranicami, ki točke povezujejo v diagonalni smeri in ima za izhodiščno oglišče tretjo točko na prvi vodoravni mrežni črti. Dolžina stranice tega kvadrata je $\sqrt{8}$ enote. Pri tem vemo, da je $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Rdeče obarvana števka predstavlja oddaljenost izhodiščnega oglišča kvadrata od prve točke mreže (tretja točka na prvi vodoravni mrežni črti je od prve oddaljena 2 enoti).



Slika 12: Kvadrati v mreži 5 x 5

V mrežo točk 6 x 6 lahko načrtamo enajst različnih kvadratov (slika 13). Pet kvadratov s stranicami na mrežnih črtah. Dolžine stranic teh kvadratov so 1, 2, 3, 4 in 5 enot. Štiri kvadrate s stranicami, ki točke povezujejo diagonalno. Izhodiščno oglišče je druga točka na prvi vodoravni mrežni črti. Dolžine stranic teh kvadratov so $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ in $\sqrt{17}$ enot. Pri tem vemo, da je $\sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$. Dva kvadrata imata izhodiščno oglišče v tretji točki na prvi vodoravni mrežni črti. Dolžini stranic teh kvadratov sta $\sqrt{8}$ in $\sqrt{13}$ enot. Pri tem vemo, da je $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.



Slika 13: Kvadrati v mreži 6 x 6

Opazimo, da lahko kvadrate v mrežah razdelimo v skupine (tabela 1) glede na izhodiščno oglišče (točka na prvi vodoravni mrežni črti, ki je oglišče kvadrata).

Tabela 1

Mreža	Dolžine stranic kvadratov			
1 x 1				
2 x 2	1			
3 x 3	1, 2,	$\sqrt{2}$		
4 x 4	1, 2, 3	$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$		
5 x 5	1, 2, 3, 4	$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$	$\sqrt{8}$	
6 x 6	1, 2, 3, 4, 5	$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$	$\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$	
7 x 7	1, 2, 3, 4, 5, 6	$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{26}$	$\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$,	$\sqrt{18}$

V prvem stolpcu tabele so razsežnosti mrež, v katere načrtujemo kvadrate. Vsaki mreži ustrezajo kvadrati, zapisani v isti vrsti. Ti so podani z velikostjo svoje stranice. S stolpci so kvadrati razdeljeni v skupine glede na lego izhodiščnega oglišča (točka mreže na prvi mrežni črti). Vsi kvadrati v istem stolpcu imajo torej za eno izmed oglišč (izhodiščno oglišče) isto točko mreže na prvi vodoravni mrežni črti. Tako so v primeru mreže 4 x 4 v prvem stolpcu zapisani kvadrati z dolžino stranice 1, 2, 3 enote. Ti imajo izhodiščno oglišče v izhodiščni (prvi) točki mreže na prvi mrežni črti. V drugem stolpcu so zapisane dolžine stranic kvadratov $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ enot. Ta dva kvadrata imata izhodiščno oglišče v drugi točki mreže na prvi mrežni črti.

V nadaljevanju zapišimo v preglednico število kvadratov (tabela 2).

Tabela 2

Mreža	Število kvadratov			
1 x 1				
2 x 2	1			
3 x 3	2	1		
4 x 4	3	2		
5 x 5	4	3	1	
6 x 6	5	4	2	
7 x 7	6	5	3	1
n x n	$n-1$	$n-2$	$n-4$	$n-6$

Vsi kvadrati v istem stolpcu imajo za izhodiščno oglišče isto točko mreže na prvi vodoravni mrežni črti.

Opazimo, da je vseh kvadratov, ki imajo za izhodiščno oglišče prvo (izhodiščno) točko mreže natanko $n - 1$. Ti kvadrati imajo stranice na mrežnih črtah. V mreži 10 x 10 bi bilo natanko 9 takih kvadratov. Dolžine njihovih stranic bi bile 1, 2, 3 … 9 enot.

Kvadratov, ki imajo za izhodiščno oglišče drugo točko mreže na prvi mrežni črti je v mreži n x n natanko $n - 2$. Dolžine stranic izračunamo s Pitagorovim izrekom. Največji zmed teh kvadratov ima dolžino stranice $\sqrt{(n-2)^2 + 1^2}$.

Kvadratov, ki imajo za izhodiščno oglišče tretjo točko mreže na prvi mrežni črti je v mreži n x n natanko $n - 4$. Dolžine stranic izračunamo s Pitagorovim izrekom. Največji izmed teh kvadratov ima dolžino stranice $\sqrt{(n-3)^2 + 2^2}$.

Tako je kvadratov, ki imajo za oglišče četrto točko mreže na prvi mrežni črti natanko $n - 6$. Največji izmed teh kvadratov ima dolžino stranice $\sqrt{(n-4)^2 + 3^2}$.

Tako ima največji kvadrat v mreži n x n, ki ima za izhodišče poljubno točko na prvi mrežni črti (v), dolžino stranice $\sqrt{(n-v)^2 + (v-1)^2}$.

Če skupine, razdeljene po stolpcih posplošimo (glej najnižjo vrstico tabele) ugotovimo, da lahko število kvadratov v poljubni razsežnosti mreže n x n izračunamo s formulo

$$(n-1) + (n-2) + (n-4) + (n-6) + (n-8) + \cdots .$$

Ta formula se z večanjem razsežnosti mreže daljša oz. pridobi več členov vsote. Poskušajmo v naslednjih korakih zapisati tako obliko formule, ki ne bo odvisna od števila členov vsote.

V prvem koraku želimo ugotoviti koliko stolpcev v vrstici zapolnjujejo kvadrati poljubne mreže, oziroma v koliko skupin po izhodiščnem oglišču jih delimo. To število nam pove, koliko členov ima formula. V sledečih formulah n predstavlja eno razsežnost mreže $n \times n$.

Zapisi se nanašajo na tabelo 2.

Kvadrati mreže 1×1 ne zapolnjujejo stolpcev.

Kvadrati mreže 2×2 zapolnjujejo 1 stolpec.

Kvadrati mreže 3×3 zapolnjujejo 2 stolpca.

Kvadrati mreže 4 × 4 zapolnjujejo 2 stolpca.

Kvadrati mreže 5 × 5 zapolnjujejo 3 stolpce.

Kvadrati mreže 6 × 6 zapolnjujejo 3 stolpce.

Kvadrati mreže 7 × 7 zapolnjujejo 4 stolpce.

Iz zapisnega lahko sklepamo, da kvadrati mreže 8 × 8 zapolnjujejo 4 stolpce, v mreži 9 × 9 je 5 zapolnjenih stolpcev, v mreži 10 × 10 je 5 zapolnjenih stolpcev. Do spremembe števila zapolnjenih stolpcev pride pri vsaki lihi razsežnosti mreže.

Poglejmo kako je s številom zasedenih stolpcev pri lihi razsežnosti mreže, *n* je liho število.

(1 – 1= 0 stolpcev) V mreži 1 x 1 ni načrtanega kvadrata. Zaradi lepšega zapisa pa lahko rečemo, da je načrtan en kvadrat z dolžino stranice 0, potem bi zapisali 1 – 0 = 1. S premislekom ugotovimo, da lahko število zasedenih stolpcev izračunamo

3 – 1= 2 stolpca

5 – 2 = 3 stolpci

7 – 3 = 4 stolpci

9 – 4= 5 stolpcev

Oziroma za *n*, $n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$. S formulo $\frac{n+1}{2}$ izračunamo število stolpcev in s tem število členov vsote vseh kvadratov v mreži z liho razsežnostjo *n*.

V primeru $n = 9$ je $\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$. Tako je 5 členov v vsoti, to so $n - 1 = 9 - 1 = 8$, $n - 2 = 9 - 2 = 7$, $n - 4 = 9 - 4 = 5$, $n - 6 = 9 - 6 = 3$, $n - 8 = 9 - 8 = 1$.

Vseh različnih kvadratov je tako $8 + 7 + 5 + 3 + 1 = 24$.

Poglejmo kako je s številom zasedenih stolpcev pri sodi razsežnosti mreže, *n* je sodo število. Število zasedenih stolpcev in s tem število členov vsote izračunamo

2 – 1= 1 stolpec,

4 – 2= 2 stolpca,

6 – 3 = 3 stolpci,

8 – 4 = 4 stolpci,

10 – 5 = 5 stolpcev.

Za n stolpcev je formula $n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$. S formulo $\frac{n}{2}$ tako izračunamo število zasedenih stolpcev, oziroma število členov vsote, s katero izračunamo vsoto vseh različnih kvadratov v mreži s sodo razsežnostjo n.

V primeru n = 10, je $\frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5$ je 5 členov vsote. Ti členi so $n - 1 = 10 - 1 = 9$, $n - 2 = 10 - 2 = 8$, $n - 4 = 10 - 4 = 6$, $n - 6 = 10 - 6 = 4$, $n - 8 = 10 - 8 = 2$.

Vseh različnih kvadratov je tako $9 + 8 + 6 + 4 + 2 = 29$.

Število členov v formuli $(n - 1) + (n - 2) + (n - 4) + (n - 6) + (n - 8) + \cdots$ izračunamo glede na razsežnost mreže, ali je liha ali soda.

Naj bo število členov k. Potem je k število zasedenih stolpcev v tabeli, oziroma število točk mreže, ki so izhodiščna oglišča kvadratov. Vsoto lahko zapišemo $(n - 1) + (n - 2) + (n - 4) + (n - 6) + \cdots + (n - 2(k - 1))$, saj bi bilo poljubno sodo število $2k$, vendar je v tej vsoti prvi seštevanec število 1, zato $2(k - 1)$.

Vsoto preoblikujemo v $k \cdot n - (1 + 2 + 4 + \cdots + 2(k - 1))$.

Preoblikujemo odštevanec $(1 + 2 + 4 + \cdots + 2(k - 1)) = 1 + (2 + 4 + \cdots + 2(k - 1))$. V oklepaju je vsota k zaporednih sodih naravnih števil, zato izpostavimo skupni faktor 2. Tako je $1 + 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + (k - 1))$. V oklepaju je vsota prvih $k - 1$ naravnih števil, kar zapišemo $\frac{k(k-1)}{2}$.

Zapišimo odštevanec $1 + 2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} = 1 + k \cdot (k - 1) = k^2 - k + 1$.

Skupno število vseh različnih kvadratov izračunamo s formulo $kn - (k^2 - k + 1)$.

Poglejmo nekaj primerov. Naj bo n liho število, n = 13. Potem je število členov $k = \frac{n+1}{2} = 7$. V vsoti je torej 7 členov: $(n - 1) + (n - 2) + (n - 4) + (n - 6) + (n - 8) + (n - 10) + (n - 12) = (13 - 1) + (13 - 2) + (13 - 4) + (13 - 6) + (13 - 8) + (13 - 10) + (13 - 12) = 12 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 48$.

Z našo formulo pa izračunamo $kn - (k^2 - k + 1) = 7 \cdot 13 - (7^2 - 7 + 1) = 91 - 43 = 48$.

V mreži 13 x 13 je 48 različnih kvadratov.

V naslednjem primeru naj bo *n* sodo število, *n* = 14. Potem je število členov $k = \frac{n}{2} = 7$. V vsoti je torej spet 7 členov: $(n-1)+(n-2)+(n-4)+(n-6)+(n-8)+(n-10)+(n-12) = (14-1)+(14-2)+(14-4)+(14-6)+(14-8)+(14-10)+(14-12) = 13+12+10+8+6+4+2 = 55.$

Z našo formulo pa izračunamo $kn-(k^2-k+1) = 7\cdot 14-(7^2-7+1) = 98-43 = 55.$ V mreži 14 x 14 je 55 različnih kvadratov.

Število členov v zaporedju izračunamo torej s k^2-k+1. Število vseh različnih kvadratov s formulo $kn-(k^2-k+1)$.

Naj *n* predstavlja eno razsežnost mreže *n* x *n*.

<u>Za sodo razsežnost mreže je</u> $k = \frac{n}{2}$, tako je

$$n\cdot k-(k^2-k+1) =$$

$$n\cdot\frac{n}{2}-\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2-\frac{n}{2}+1\right) =$$

$$\frac{n^2+2n}{4}-1 = \frac{n^2+2n-4}{4}$$

<u>Za liho razsežnost mreže je</u> $k = \frac{n+1}{2}$, tako je

$$n\cdot k-(k^2-k+1) =$$

$$n\cdot\frac{n+1}{2}-\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{n+1}{2}+1\right) =$$

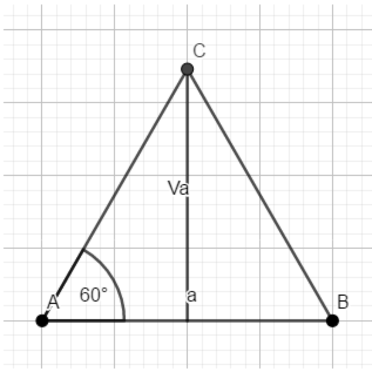
$$\frac{n^2+2n-3}{4}$$

Ker se k (poljubno število členov, oziroma število točk mreže, ki so izhodiščna oglišča kvadratov) pri sodih in lihih razsežnostih mrež razlikuje, smo dobili dve različni formuli za sode in lihe razsežnosti. Z vsako izmed formul lahko izračunamo število različnih kvadratov v mreži.

V primeru *n* = 13 vemo, da je število kvadratov 48, kar izračunamo tudi s formulo $\frac{n^2+2n-3}{4} = \frac{13^2+2\cdot 13-3}{4} = 48.$

3. Pravilni večkotniki v mreži *n* x *n*

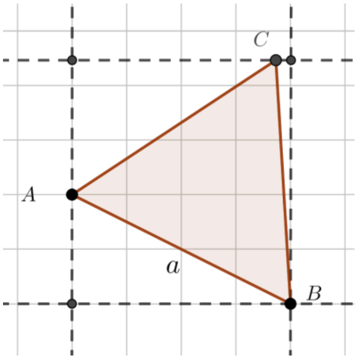
V nadaljevanju poskušajmo namesto kvadrata v mrežo narisati različne pravilne večkotnike.



Slika 11

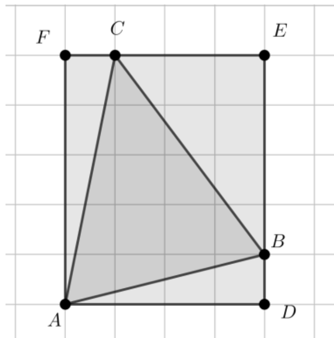
Pravilni večkotnik z najmanj stranicami je enakostranični trikotnik (slika 11). Za enakostranični trikotnik je značilno, da ima vse stranice enako dolge in notranje kote enake z velikostjo 60°. Če trikotnik načrtamo tako, da stranica AB leži na mrežni črti, oglišče C ne more biti točka mreže, saj je višina na stranico a iracionalno število. Njeno dolžino izračunamo s formulo $\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$. Krajišči višine sta namreč oglišče C in razpolovišče stranice. Tudi v primeru, ko je razpolovišče stranice na točki mreže (slika 11), oglišče C ni točka mreže. Obe točki ležita namreč na isti mrežni črti, ker pa je dolžina te daljice iracionalno število, vsaj eno izmed oglišč ni točka mreže.

Kako je v primeru, ko oglišči A in B ne ležita na isti mrežni črti in je daljica AB stranica enakostraničnega trikotnika (slika 12).



Slika 12

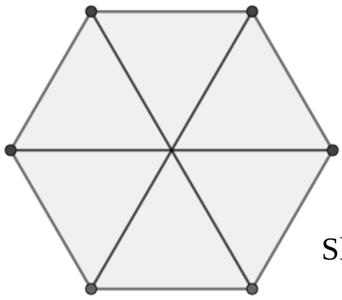
Ploščina poljubnega enakostraničnega trikotnika je iracionalno število, $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. V primeru, da je v mrežo točk načrtan trikotnik, ki ima za oglišča točke mreže, je njegova ploščina racionalno število (slika 13).



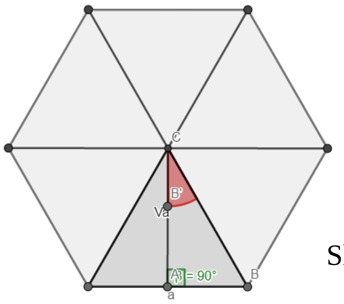
Slika 13

Ploščina pravokotnika *ADEF* je racionalno, oziroma celo število, saj so koordinate točk mreže celoštevilčne. Tudi koordinate oglišč trikotnika *ABC* so celoštevilčne, saj so prav tako točke mreže. Zato so ploščine vseh pravokotnih trikotnikov, trikotnika *ADB,* trikotnika *BEC* in trikotnika *CFA* racionalna števila. Ploščina trikotnika *ABC* je razlika med ploščino pravokotnika in vsote ploščin pravokotnih trikotnikov. Razlika dveh racionalnih števil je racionalno število. Če bi torej imel enakostranični trikotnik vsa oglišča v točkah mreže, bi njegova ploščina bila racionalno število. Ker pa vsako ploščino enakostraničnega trikotnika izrazimo kot iracionalno število, pridemo do protislovja. Enakostranični trikotnik ne more imeti vseh oglišč v točkah mreže.

Trditev, da v kvadratno mrežo ne moremo načrtati nobenega pravilnega večkotnika razen kvadrata, lahko podkrepimo z dokazom podobnim temu za enakostranični trikotnik. Vsak pravilni večkotnik lahko razdelimo na skladne enakokrake trikotnike. Ti imajo vrh v središču večkotniku očrtane krožnice, kraki pa segajo do oglišč lika. Lastnost je predstavljena na primeru šestkotnika (slika 15).


Slika 15

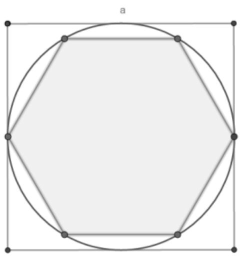
Za izračun površine trikotnika uporabimo formulo $\frac{a \cdot Va}{2}$. Stranica a je že podana. S pomočjo kotnih funkcij lahko izračunamo dolžino višine v_a. V osnovni šoli seveda o kotnih funkcijah še nič ne vemo. Vemo pa, da ima krog središčni kot 360°. Če je n število skladnih enakokrakih trikotnikov v pravilnem večkotniku, je velikost središčnega kota v poljubnem pravilnem večkotniku $\frac{360°}{n}$. V opazovanem trikotniku *ABC* je kot $\angle ACB$ polovica središčnega kota, ki ga razpolavlja v_a (slika 16).



Slika 16

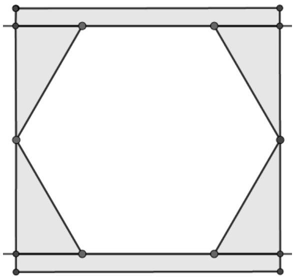
Velikost kota $\angle ACB$ je torej $\frac{360°}{2n}$. V nadaljevanju bi morali poznati pomen kotnih funkcij, saj se izkaže, da je ploščina trikotnika racionalno število le v primeru ko je velikost središčnega kota 45°, torej v kvadratu. Tako ugotovimo, da je edini večkotnik z racionalno ploščino, ki ga lahko načrtamo, kvadrat.

Predpostavimo, da je v mrežo točk načrtan poljuben pravilni večkotnik, ki ima za oglišča točke mreže. Očrtamo mu krožnico, ki je hkrati včrtana krožnica kvadrata, ki ima za stranice mrežne črte. Dolžino stranice kvadrata označimo z a, tako je njegova ploščina a^2. Opis je predstavljen na primeru šestkotnika (slika 17).



Slika 17

Ker so oglišča večkotnika po predpostavki točke mreže, jih lahko povežemo s stranicami kvadrata po mrežnih črtah in tvorimo pravokotnike in pravokotne trikotnike. Vsi novo nastali liki imajo racionalno ploščino, saj imajo oglišča v točkah mreže, katete ali stranice pa na mrežnih črtah (slika 18).

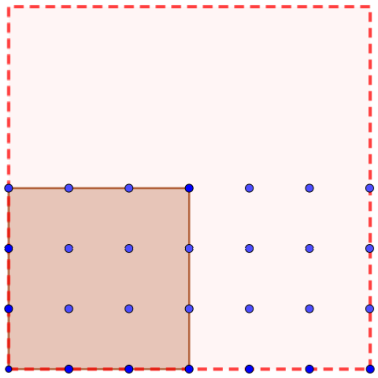


Slika 18

Osenčeni del ima torej racionalno ploščino. Kvadrat ima racionalno ploščino a^2. Ploščina šestkotnika je razlika ploščine kvadrata in osenčenega dela. Razlika dveh racionalnih števil je racionalno število, zato je ploščina šestkotnika racionalno število. Ta lastnost naj bi veljala za vse pravilne večkotnike, ki imajo oglišča v točkah mreže. Ta trditev je v protislovju s prejšnjo ugotovitvijo, da ploščine vseh pravilnih večkotnikov razen kvadrata izrazimo kot iracionalne vrednosti. Tako noben pravilen večkotnik z izjemo kvadrata ne more imeti oglišč v točkah mreže.

4. Kvadrati v mreži *m* x *n*

Mreža m x n je mreža v kateri število mrežnih točk v vodoravni smeri ni enaka številu točk v navpični smeri. Tudi v tako mrežo lahko načrtujemo kvadrate. Največji kvadrat ima stranico vedno enako krajši stranici mreže (na sliki 19 je mreža 7 x 4).



Slika 19

V mrežo 7 x 4 lahko narišemo enako število različnih kvadratov kot v mrežo 4 x 4, saj ima največji kvadrat stranico enako krajši razsežnosti mreže. Če ta kvadrat povečamo tako, da so njegove stranice enake daljši razsežnosti, kvadrat preseže meje mreže točk. Zato lahko v mrežo m x n ($m > n$) načrtamo enako število kvadratov, kot v mrežo n x n. Enako velja za mrežo n x m ($n < m$), le da je daljša stranica potem navpična.

5. Ugotovitve

Navedimo, kaj smo ugotovili v raziskovalni nalogi.

- S pomočjo pravokotnih trikotnikov smo pokazali, da lahko načrtamo v kvadratno mrežo točk kvadrat, ki ima oglišča v točkah mreže.
- Prikazali smo vse možne kvadrate v razsežnostih mrež 1 x 1, 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4, 5 x 5 in 6 x 6.
- Ugotovili smo, da ima največji kvadrat, ki ima za izhodišče poljubno točko na prvi mrežni črti in razsežnosti mreže n x n, dolžino stranice $\sqrt{(n-v)^2+(v-1)^2}$. Z v označimo zaporedno število točke na prvi mrežni črti.
- Izračunali smo dolžine stranic kvadratov in število različnih kvadratov v razsežnostih mrež 1 x 1, 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4, 5 x 5, 6 x 6, 7 x 7 in ugotovitve posplošili za poljubno razsežnost mreže n x n.
- Zapisali smo formulo za izračun števila kvadratov v poljubni razsežnosti mreže n x n: $(n-1)+(n-2)+(n-4)+(n-6)+(n-8)+\cdots$
- Izračunali smo število skupin kvadratov glede na izhodiščno oglišče prve mrežne črte, oziroma število členov vsote, s katero izračunamo vsoto vseh različnih kvadratov v poljubni mreži n x n. Za sodo razsežnost mreže je $\frac{n}{2}$, za liho razsežnost mreže je $\frac{n+1}{2}$. Konstanto smo poimenovali k.
- Zapisali smo formulo za izračun števila kvadratov v poljubni razsežnosti mreže n x n, $kn-(k^2-k+1)$.

- Za sodo razsežnost mreže n smo zapisali formulo za izračun števila kvadratov

$$\frac{n^2+2n-4}{4}.$$

Za liho razsežnosti mreže n x n smo zapisali formulo za izračun števila kvadratov

$$\frac{n^2+2n-3}{4}.$$

- Pokazali smo, zakaj enakostraničnega trikotnika ne moremo načrtati v kvadratno mrežo tako, da bi vsa oglišča trikotnika bila točke mreže.
- S protislovjem smo pokazali da je kvadrat edini pravilni večkotnik, ki ga lahko načrtamo v kvadratno mrežo tako, da ima oglišča v točkah mreže.

- Pokazali smo, da lahko v mrežo m x n ($m > n$), načrtamo le toliko različnih kvadratov, kot v mrežo n x n.

6. Družbena odgovornost

Z raziskovalno nalogo sva pridobila veliko novih izkušenj, tako z osvajanjem matematičnih vsebin, kot z zapisovanjem matematičnih besedil. Pri raziskovanju sva sodelovala in se dogovarjala. Pridobljene izkušnje in znanja bova lahko uporabila v srednji šoli. Raziskovalna naloga je v celoti najino delo, ki temelji na zapisanih virih, pomoči mentorja in najinih ugotovitvah. Ugotovitve in znanje, ki sva jih pridobila so priročne tudi pri reševanju nalog na drugih področjih znanosti. Meniva, da je najina raziskovalna naloga lahko vir znanja tudi za druge, zainteresirane vrstnike.

7. Viri

1. Kadum, Vladimir: *Cjelobrojni kvadrati u kvadratnoj mreži* Metodicki obzori 10, vol. 5 (2010)2

2. Lavrič, Boris: Večkotniki na kvadratni mreži, Presek, Letnik 18 (1990-1991), številka 3, stran 140 - 145

3. https://www.quora.com/Can-regular-polygons-other-than-squares-have-integer-coordinates-on-Cartesian-plane

Pridobljeno: 9. 2. 2020, ura: 10:31

4. https://en.wikipedia.org/wiki/Niven's_theorem

Pridobljeno: 9. 1. 2020, ura: 21:10

5. https://www.mathopenref.com/cotangent.html

Pridobljeno: 9. 2. 2020, ura: 10:33