Mladi za napredek Maribora 2020
37. srečanje

S pregibanjem do znanih likov

Matematika
Raziskovalna naloga

Avtor: BRINA HOMŠAK, DINA ĐONLAGIĆ, LAN ŽIGA ANDERLIČ
Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ
Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR
Število točk: 156/ 170

Februar 2020

KAZALO

1. Uvod 2
2. Kvadrat 4
3. Enakostranični trikotnik... 8
4. Paralelogram 15
5. Ugotovitve 18
6. Družbena odgovornost 19
7. Viri 19

Povzetek

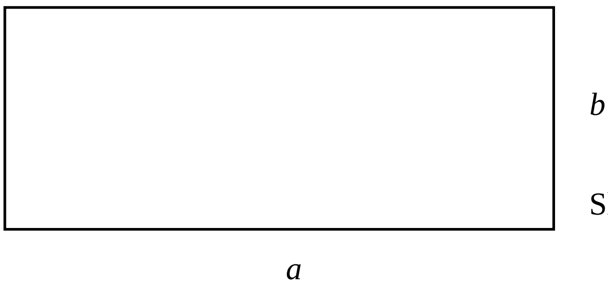
Pregibanje papirja je lahko otroška igra, lahko pa tudi matematična dejavnost. V raziskovalni nalogi raziskujemo, katere like, katerih lastnosti so nam poznane, lahko samo s pregibanjem papirja pridobimo iz izbranih geometrijskih oblik. Tako s pregibanjem oblikujemo kvadrat, enakostranični trikotnik pa še kaj iz papirnega traku, pravokotnika, kroga … . Pri tem predstavimo zakonitosti pregibanja za vsak lik posebej in zapišemo odvisnost dolžine stranice nastalega lika z razsežnostmi izhodiščne geometrijske oblike.

1. Uvod

Pregibanje papirja je lahko zabavna otroška igra, pri kateri dobimo različne dvodimenzionalne oblike ali zanimive tridimenzionalne origamije, ki jih že stoletja izdelujejo Japonci. Lahko pa pregibanje papirja vzamemo kot geometrijsko matematično nalogo, kjer poskušamo dobiti znane pravilne večkotnike in ostale like, katerih lastnosti so nam poznane. Prav tega se bomo lotili v tej raziskovalni nalogi, kjer bomo preiskovali lastnosti likov in iz papirja s pregibanjem oblikovali nam poznane like.

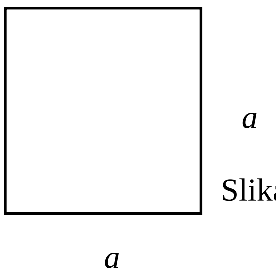
Pri raziskovanju bomo preizkušali pregibanje na modelih, uporabili Geogebro za načrtovanje natančnih slik, na spletu in drugih virih iskali namige, rešitve in tudi nove probleme pregibanja. V nadaljevanju spoznajmo lastnosti začetnih geometrijskih oblik (likov) papirja (pravokotnik, kvadrat, trak, krog) iz katerih bomo s pregibanjem oblikovali druge geometrijske oblike.

Pravokotnik (slika 1) je prvi lik, ki ga bomo s pregibanjem preoblikovali v druge like. Kot za vsak pravokotnik velja, da ima dva para skladnih stranic, kjer sta nasprotni stranici (a in a) vzporedni, sosednji (a in b) stranici pa druga na drugo pravokotni. Začetni pravokotnik bo razsežnosti $a \times b$, v katerem a predstavlja dolžino stranice pravokotnika, b pa širino in za katerega bo praviloma veljalo $a > b$. Dolžina diagonale (d) je $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.



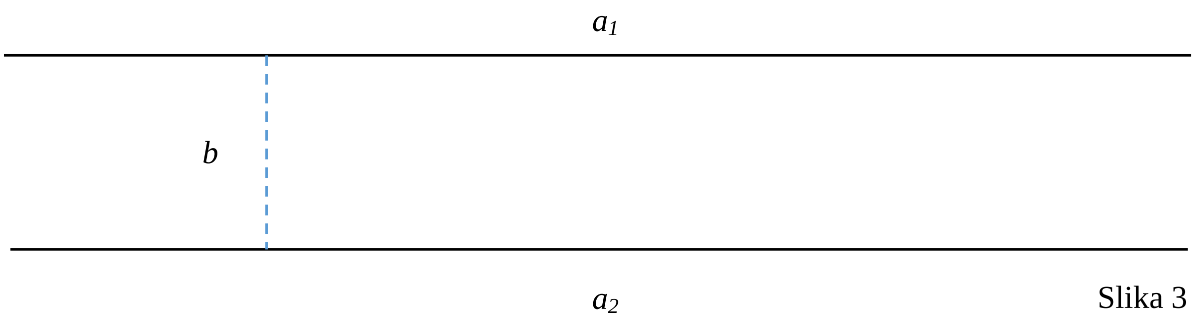
Slika 1: Pravokotnik

Kvadrat (slika 2) je naslednji lik, ki ga bomo pregibali. Kot za vsak kvadrat velja, da ima štiri skladne stranice, nasprotni stranici (a in a) sta si vzporedni, sosednji (a in a) pa ena na drugo pravokotni, saj je kvadrat pravokotnik. Kvadrat ima razsežnosti $a \times a$, v katerem a predstavlja dolžino in širino kvadrata. Dolžina diagonale, $d = a\sqrt{2}$.

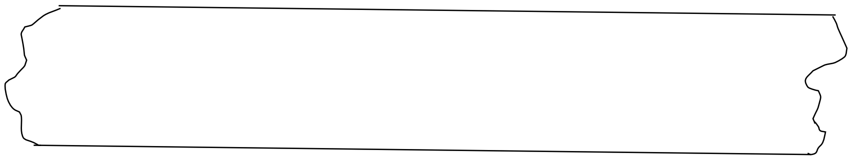


Slika 2: Kvadrat

Trak (pas) (slika 3) je prav tako lahko izhodišče za pregibanje v druge like. Trak ali pas je ploskev med dvema vzporednima premicama (a_1 in a_2). Zaradi neomejenosti premic, nam trak predstavlja del ravnine med vzporednicama, »konec« traku pa ne bo raven oz. bo večkratna lomljenka ali krivulja (slika 3.1). Poznali bomo razdaljo oz. višino med vzporednicama (*b*).

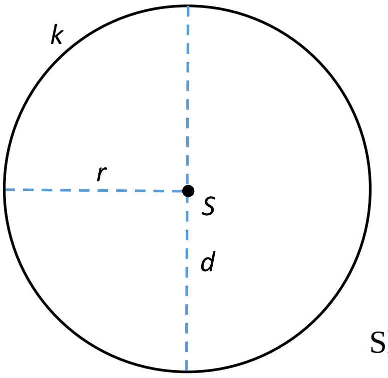


Slika 3



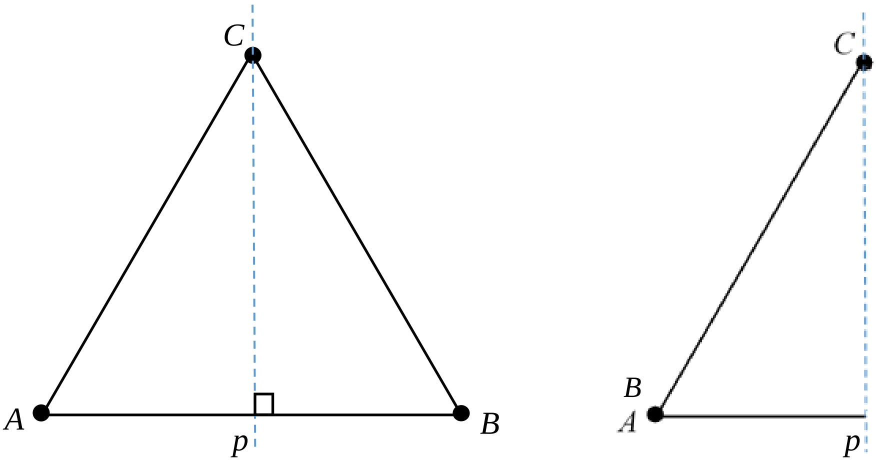
Slika 3.1

Krog (slika 4) je naslednji izhodiščni lik, ki ga bomo pregibali v nove like. Krog je lik, omejen s krožnico (*k*). Središče kroga (*S*) je točka, od katere so vse točke na krožnici enako oddaljene (polmer, *r*). Premer (*d*) je najdaljša tetiva kroga. Dolžina krožnice oz. obseg kroga je $2\pi r$.



Slika 4: Krog

Pregib je v bistvu os zrcaljenja. Pregibanje ima lastnosti zrcaljena čez premico, kar pomeni, da se vsaka točka prezrcali v točko, daljica v skladno daljico, kot v skladen kot, premica v premico, lik v skladen, a nasprotno orientiran lik. Lahko bi rekli, da like zrcalimo (slika 4.1). Na sliki je primer zrcaljenja enakokrakega trikotnika *ABC* preko premice *p*.

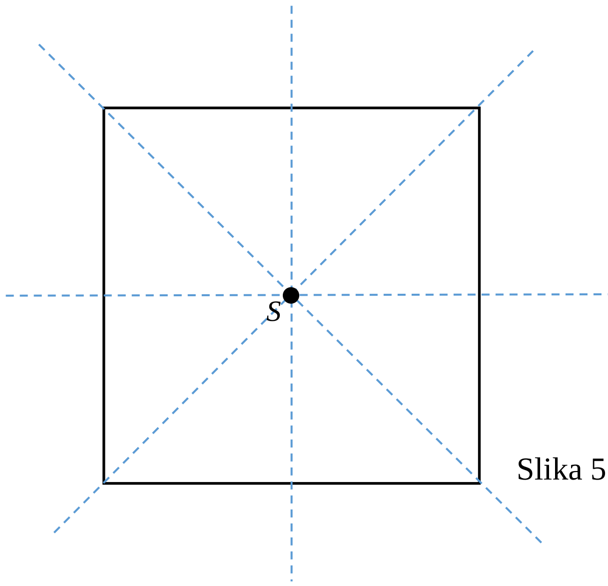


Slika 4.1: Zrcaljenje

Premica p je simetrala osnovnice AB oziroma kota pri vrhu $\angle C$. Točka C se prezrcali sama vase, točka B se prezrcali v točko A in obratno.

2. Kvadrat

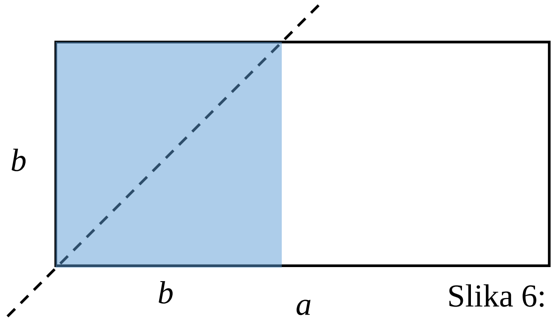
Poglejmo v nadaljevanju, kako iz predlaganih geometrijskih oblik s prepogibanjem oblikujemo kvadrat. Upoštevamo, da so stranice kvadrata enakih dolžin, a. Sosednji stranici sta med seboj pravokotni, nasprotni stranici vzporedni. Obseg kvadrata izračunamo s formulo $o = a + a + a + a = 4 \cdot a$. Ploščino kvadrata izračunamo s formulo $p = a^2$. Dolžino diagonale kvadrata izračunamo s Pitagorovim izrekom, $d = \sqrt{a^2 + a^2}$, oziroma $d = a\sqrt{2}$. Kvadrat je osno simetričen lik. Ima štiri osi simetrije (zrcaljenja) (slika 5). Prav tako je središčno simetričen lik. Središče simetrije je presečišče diagonal kvadrata.



Slika 5: Osi simetrije kvadrata

Največji možni kvadrat v pravokotniku.

Ker je kvadrat osno simetričen lik, se čez nosilko diagonale prezrcali sam vase. Kar izkoristimo pri prepogibanju. Pravokotnik prepognemo tako, da krajšo stranico (b) poravnamo po daljši stranici (a) pravokotnika (slika 6). V bistvu opravimo zrcaljenje čez premico, ki razpolavlja notranji kot pravokotnika.

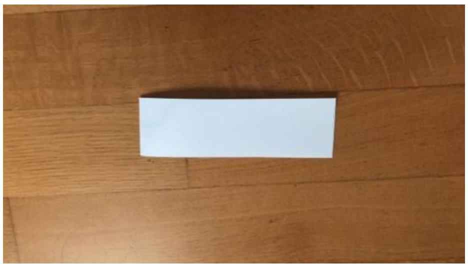


Slika 6: Kvadrat v pravokotniku

Dobili smo največji možni kvadrat, z dolžino stranice b. Dolžina diagonale tega kvadrata je $b\sqrt{2}$. Preostali del pravokotnika ima dolžino $a-b$ in če je $a-b \geq b$, bi pregibanje lahko ponovili in oblikovali nov kvadrat, skladen s prvim. V primeru da je $a-b<b$, lahko s pregibanjem dobimo manjši kvadrat, vendar je to že lahko tema neke druge raziskovalne naloge.

Največji možni kvadrat na traku.

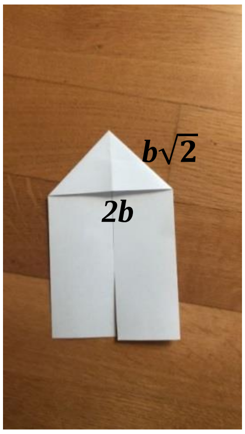
Trak po dolžini prepognemo, tako da se poltraka z izhodiščem v pregibu natanko prekrivata (slika 7). Trak razgrnemo in en del traku prepognemo tako, da se poltrak poravna s prvim



Slika 7

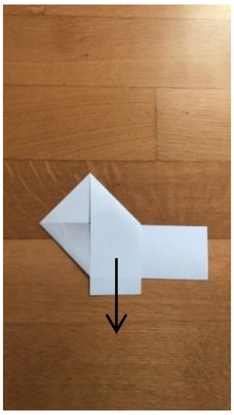
pregibom. Nato na enak način prepognemo še drugi del traku in dobimo trak v obliki puščice (slika 8.1). Dobimo kot med stranicama kvadrata, 90°. Če je širina pasu b, potem je dolžina stranice tega kvadrata $b\sqrt{2}$. Diagonala kvadrata je enaka $2b$ (slika 8.2).

Slika 8.1

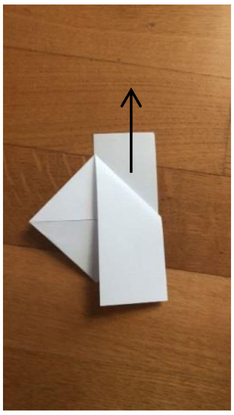


Slika 8.2

Prvi preostali del traku prepognemo tako, da poltrak poravnamo k diagonali kvadrata (slika 9.1). Enako naredimo še z drugim delom traku (slika 9.2). Dobimo izris kvadrata. Nato okoli nastalega lika navijemo ostanek traku (slika 10.1, 10.2) in oblikujemo kvadrat s stranico $b\sqrt{2}$ (slika 10.3).



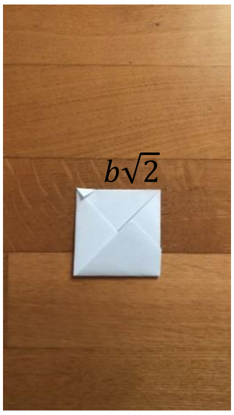
Slika 9.1



Slika 9.2

Slika 10.1

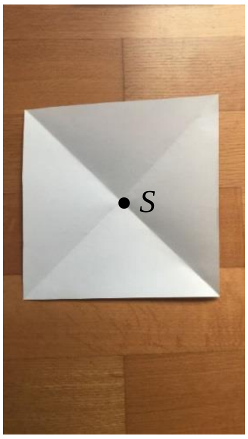
Slika 10.2



Slika 10.3

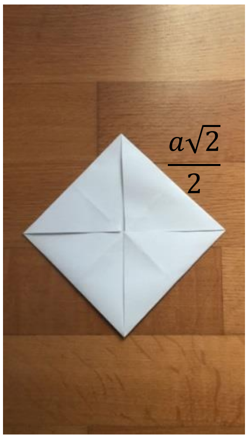
Največji možni kvadrat v kvadratu.

Oblikujmo največji možni kvadrat v kvadratu s stranico a. Kvadrat prepognemo čez obe diagonali (simetrale kotov). Presečišče pregibov je središče zrcaljenja čez točko (slika 11.1). Nato vsako oglišče prepognemo do središča (slika 11.2 in 11.3). Nastali pregib leži na simetrali zrcaljenja oglišča, ki ga prezrcalimo v točko S. Oblikujemo kvadrat s stranico $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Slika 11.1

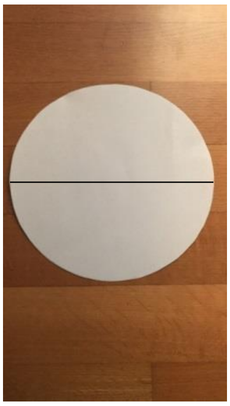

Slika 11.2



Slika 11.3

Največji kvadrat v krogu s polmerom r.

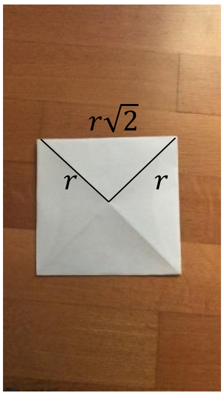
Krog najprej prepognemo na polovico (slika 12.1). Nastali pregib (premer) leži na simetrali kroga. Pravokotno na ta pregib opravimo še en pregib in dobimo še en premer. Pregiba sta med seboj pravokotna (slika 12.2).


Slika 12.1


Slika 12.2

Tetiva je vsaka daljica s krajiščema na krožnici. Po dve zaporedni krajišči premerov na krožnici sta krajišči štirih tetiv. Tako dobimo krožne odseke, ki jih prepognemo navznoter (slika 12.3, slika 12.4). Oblikujemo kvadrat s stranico $r\sqrt{2}$.

Slika 12.3



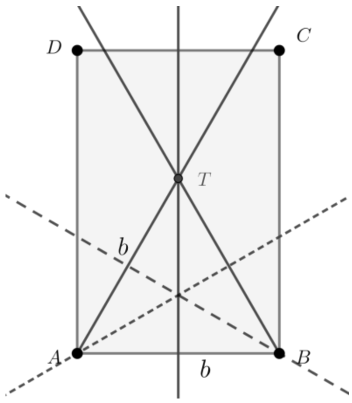
Slika 12.4

3. Enakostranični trikotnik

V nadaljevanju poglejmo, kako iz nekaterih predlaganih oblik s pregibanjem oblikujemo enakostranični trikotnik. Enakostranični trikotnik ima tri skladne stranice in tri skladne kote z velikostjo 60°. Je osno simetričen lik, s tremi simetralami. Vsaka simetrala razpolavlja notranji kot in nasprotno stranico.

<u>Enakostranični trikotnik v pravokotniku.</u>

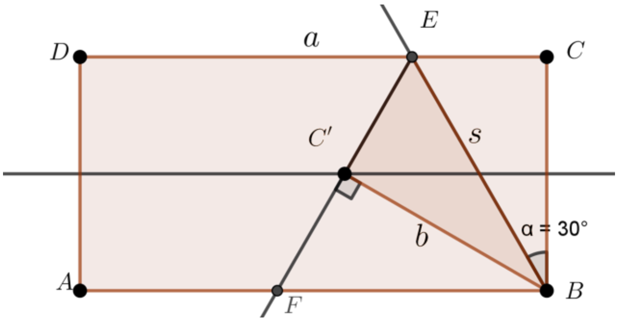
Poglejmo, kako iz pravokotnika oblikujemo enakostranični trikotnik (slika 13). Pravokotnik z dolžino a in širino b najprej prepognemo na polovico, pregib je srednjica pravokotnika oziroma simetrala širine b. Nato eno oglišče prepognemo do srednjice pravokotnika tako, da se drugo oglišče na krajši izmed stranic pravokotnika prezrcali samo vase. Oglišče B prezrcalimo v točko T. Sosednje oglišče A, simetrično glede na srednjico, prav tako zrcalimo v isto točko T. Oglišči pravokotnika in točka T so oglišča enakostraničnega trikotnika ABT s stranico b, saj je $AB \cong AT$ in $AB \cong BT$.



Slika 13

Enakostranični trikotnik (največji) v pravokotniku.

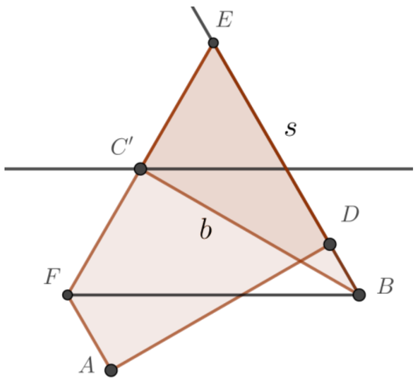
Poglejmo, kako iz pravokotnika oblikujemo največji možni enakostranični trikotnik. Spet pravokotnik prepognemo po dolžini na polovico (srednjica). Nato eno oglišče (zgornje desno) prepognemo do srednjice pravokotnika tako, da se drugo oglišče na krajši izmed stranic pravokotnika prezrcali samo vase, točka *C* v točko *C'* in točka *B* sama vase (slika 14).



Slika 14

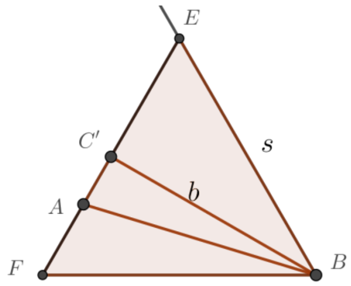
Pregib *BE* je stranica *s* enakostraničnega trikotnika. Točka *C'* leži na srednjici, torej razpolavlja daljico *EF* s krajiščema na stranicah pravokotnika ($EC \cong EC' \cong FC'$). Trikotnika *BEC'* in *FBC'* sta skladna, saj imata dve skladni stranici in vmesni kot (pravi kot). Zaradi zrcaljenja velja $\angle CBE = \angle EBC' = \angle C'BF = 30°$. Ker je npr. velikost dveh kotov v trikotniku *BEC'* 30° in 90°, je velikost kota $\angle FEB = 60°$. Tako je trikotnik *FBE* enakostranični trikotnik.

Nato preostali del pravokotnika prepognemo čez daljico *EF* (slika 15).



Slika 15

Preostal je še manjši zavihek, ki ga prav tako prepognemo in tako oblikujemo enakostranični trikotnik s stranico *s* (slika 16).

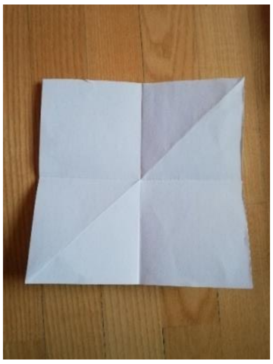


Slika 16

Na sliki 14 je prikazano, da je višina enakostraničnega trikotnika enaka dolžini stranice pravokotnika b. Tako je $b = \frac{s\sqrt{3}}{2}$. Iz enačbe izrazimo dolžino stranice enakostraničnega trikotnika, $s = \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{2b\sqrt{3}}{3}$.

Iz kvadrata v enakostranični trikotnik.

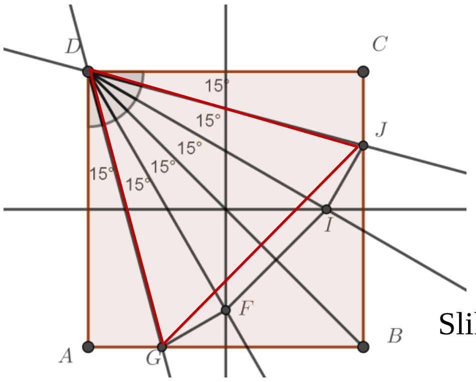
Najprej kvadrat prepognemo po simetralah, ki razpolovijo stranice (slika 17.1). Nato dve nasprotni si oglišči prepognemo do najbližje točke na simetralah. Pregiba imata skupno tretje oglišče kvadrata (slika 17.2). Preostalo oglišče prepognemo tako, da napravimo še zadnjo stranico (slika 17.3).


Slika 17.1

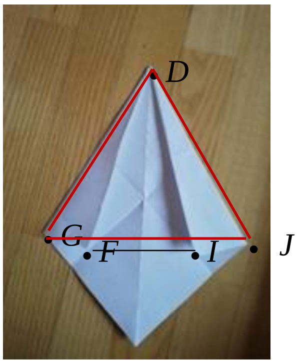

Slika 17.2


Slika 17.3

Pa poglejmo, zakaj je nastali trikotnik enakostraničen in zapišimo dolžino njegove stranice. Na sliki 18.1 je kvadrat *ABCD*. Načrtani sta simetrali, ki razpolavljata nasprotne pare stranic. Premica *DG* je os zrcaljenja (pregib), pri katerem točko *A* prezrcalimo v točko *F*. Točka *G* je eno oglišče enakostraničnega trikotnika, ki ga želimo oblikovati. V pomoč so oznake na fotografiji (slika 18.2). Enak (simetričen) pregib naredimo na drugi strani. Označimo točki *I* in *J*.



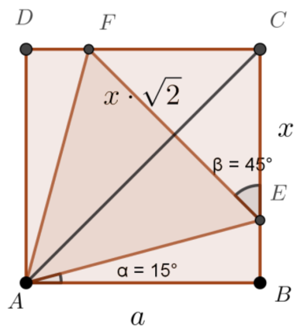
Slika 18.1



Slika 18.2

Trikotniki *AGD*, *GFD*, *IJD*, *JCD* so pravokotni in skladni. Trikotnik *FID* je enakokraki, Njegova somernica leži na diagonali kvadrata. Ugotovimo, da somernica razdeli trikotnik *FID* na dva skladna pravokotna trikotnika. Tudi s pomočjo načrtovanja in zapisa velikosti kotov v Geogebri ugotovimo, da pravi kot ∠ *D* razdelimo na šest enako velikih kotov z velikostjo 15°. Tako je trikotnik *GJD*, ki ima velikost kota ∠*GDJ* = 60° in priležni skladni stranici, enakostraničen.

Izrazimo še dolžino stranice trikotnika z dolžino stranice kvadrata (slika 19).



Slika 19

Trikotnik *AEF* je enakostranični. Dolžina stranice kvadrata je *a*. Trikotnik *ECF* je pravokotni in enakokraki, z dolžino kraka *x*. Tako je dolžina stranice enakostraničnega trikotnika $x\sqrt{2}$. Za trikotnik *ABE* lahko zapišemo Pitagorov izrek in preoblikujemo zapis:

$(x\sqrt{2})^2 = a^2 + (a - x)^2$

$2x^2 = a^2 + a^2 - 2ax + x^2$

$x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$ ta izraz dopolnimo do razlike kvadratov,

$(x + a)^2 - 3a^2 = 0$ zapišemo s produktom vsote in razlike,

$\left(x + a - a\sqrt{3}\right)\left(x + a + a\sqrt{3}\right) = 0$

Produkt je enak številu 0, če je vsaj en izmed faktorjev enak 0,

$x + a - a\sqrt{3} = 0$. Tako je $x = a\sqrt{3} - a = a(\sqrt{3} - 1)$ 1. Možnost

$x + a + a\sqrt{3} = 0$. Tako je $x = -a\sqrt{3} - a = -a(\sqrt{3} - 1)$ 2. Možnost

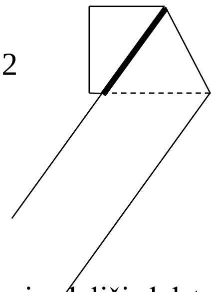
V drugi možnosti je vrednost dolžine $x < 0$, kar v našem primeru ne more biti. Tako je dolžina stranice enakostraničnega trikotnika $x\sqrt{2} = a\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \sqrt{2} = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Enakostranični trikotnik na traku.

Oblikujmo še enakostranični trikotnik na traku. Poglejmo, kako s pregibanjem oblikujemo trikotnik (slika 20.1). Trak najprej prepognemo pod poljubnim kotom. Nato daljši del traku prepognemo ob tem prvem pregibu (20.2). Po izravnavi sta na traku dva pregiba, ki oblikujeta trikotnik (slika 20.3).

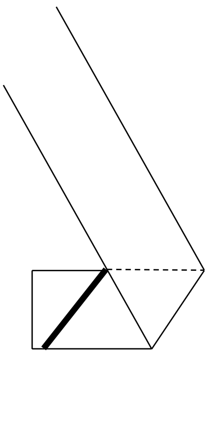
Slika 20.1

Slika 20.2



Slika 20.3

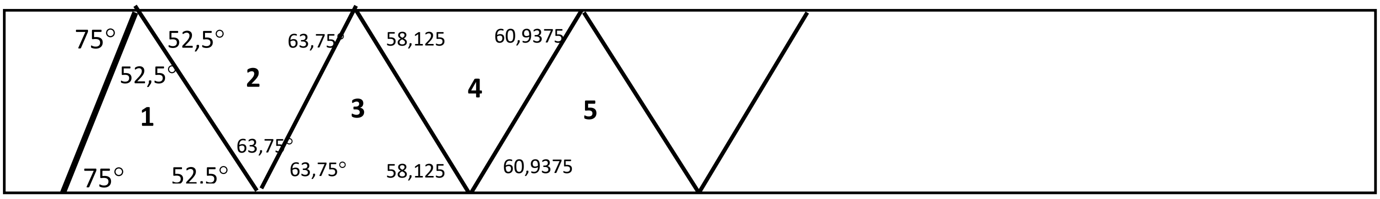
V nadaljevanju daljši del traku zavihamo navzgor (slika 20.4). Po izravnavi sta na traku že dva trikotnika (slika 20.5).



Slika 20.4

Slika 20.5

Ugotovimo, da po vsakem opravljenem pregibu dobimo trikotnik z notranjimi koti, ki so vedno bolj enaki. Kar pomeni, da smo z vsakim pregibom bližje enakostraničnemu trikotniku. Vsak pregib je simetrala kota, kar nam pomaga pri dokazu, da se velikost kotov res bliža kotu 60°. Poglejmo na primeru, ko je velikost kota ob pregibu 75°(slika 21).

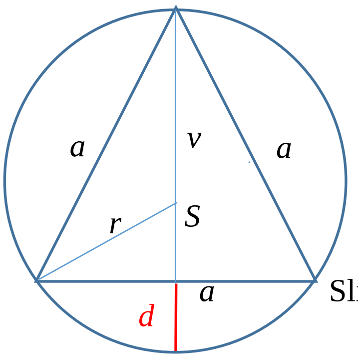


Slika 21

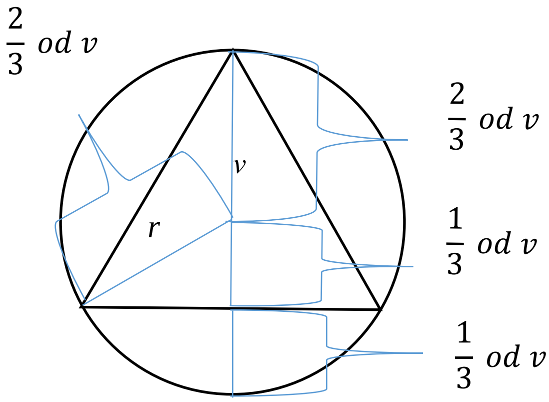
S prepogibanjem traku razpolovimo v trikotniku 1 sokot kota 75°, zato je velikost enega kota 52,5°. Trikotnik je enakokrak. Enakokrak je tudi vsak naslednji trikotnik. Očitno je, da je na vsakem naslednjem trikotniku velikost notranjih kotov bliže kotu 60°. Dolžina stranice trikotnika naj bo a. Širina traku b je hkrati višina trikotnika, tako je $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Po preoblikovanju je dolžina stranice $a = \frac{2b\sqrt{3}}{3}$.

<u>Enakostranični trikotnik v krogu.</u>

Poglejmo še, kako oblikujemo s pregibanjem enakostraničen trikotnik iz kroga. Izhodišče je krog iz papirja, ki je očrtana krožnica trikotnika. Upoštevamo dejstvo, da je polmer očrtane krožnice, oziroma razdalja med ogliščem trikotnika in središčem krožnice, enaka $\frac{2}{3}$ višine enakostraničnega trikotnika. Ker vemo, da je enakostranični trikotnik osno simetričen lik, ugotovimo, da je premer kroga enak $\frac{4}{3}$ višine enakostraničnega trikotnika. Da bi dobili stranico trikotnika, le prepognemo naključen del krožnice do središča krožnice. Tako polmer, ki meri $\frac{2}{3}$ višine trikotnika, prepognemo po polovici, zato je med daljico prepogiba, skozi središče do krožnice razdalja enaka $\frac{3}{3}$ višine oziroma višini trikotnika. To ponovimo še dvakrat, tako da se oglišča krožnih odsekov stikajo, to so oglišča enakostraničnega trikotnika (slika 22 in 23).

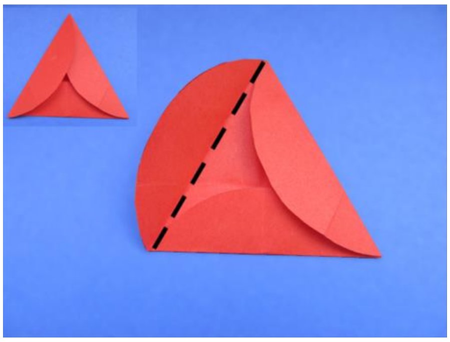


Slika 22



Slika 23

Tako dobimo napotek za pregibanje kroga v enakostranični trikotnik (slika 24).



Slika 24

Poglejmo še, kolikšna je dolžina stranice nastalega trikotnika. Višino v enakostraničnem trikotniku lahko izrazimo kot $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ in če enačbo preoblikujemo, dobimo dolžino stranice a.

$$r = \frac{2}{3} \cdot v$$

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad / \cdot 3$$

$$3r = a\sqrt{3} \; / \div \sqrt{3}$$

$$\frac{3r}{\sqrt{3}} = a$$

$$a = \frac{3r \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

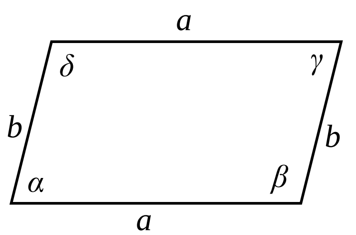
$$a = r\sqrt{3}.$$

Dobimo enačbo za dolžino stranice trikotnika. Potrdimo še največjo razdaljo med stranico trikotnika in krožnim lokom, označeno d (na sliki 22). Je razlika med premerom kroga in višino trikotnika, tako je $d = 2r - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2r - \frac{r\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{2}$. Izračunana vrednost pomeni, če prepognemo del kroga tako, da se točka na krožnici dotika središča kroga, je nastali pregib stranica enakostraničnega trikotnika.

4. Paralelogram

Poglejmo, kako oblikujemo paralelogram iz nekaterih predlaganih oblik. Pri tem vemo, da je tudi pravokotnik paralelogram, vendar v našem primeru pomeni paralelogram štirikotnik z dvema paroma skladnih, vzporednih stranic, kjer sosednji stranici ne ležita pod pravim kotom (slika 25).

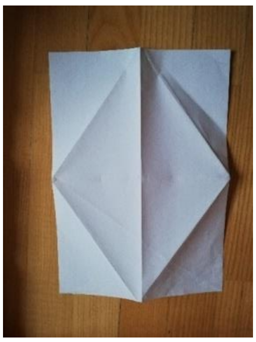
Paralelogram ima štiri stranice. Nasprotni koti so v paralelogramu skladni in $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. Paralelogram je središčno simetričen lik. Središče simetrije je presečišče diagonal. Diagonali se med seboj razpolavljata.



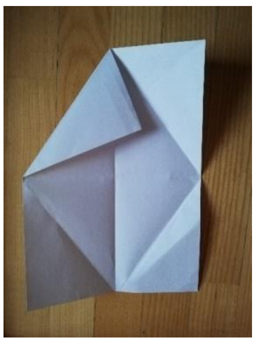
Slika 25

Paralelogram v pravokotniku.

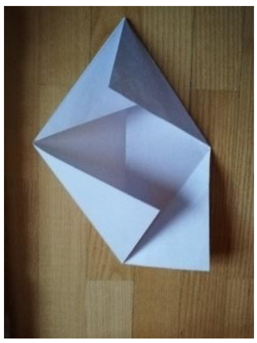
Pravokotni list papirja prepognemo po simetralah obeh stranic, in ga nato razpremo (slika 26.1). Dobimo razpolovišča stranic. Vsako oglišče prepognemo (zrcalimo) čez navidezno daljico, ki ima za krajišči razpolovišči sosednjih stranic (slika 26.2 in 26.3). Tako dobimo romb, ki je seveda tudi paralelogram (slika 26.4).



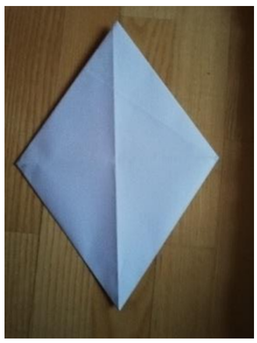
Slika 26.1



Slika 26.2



Slika 26.3



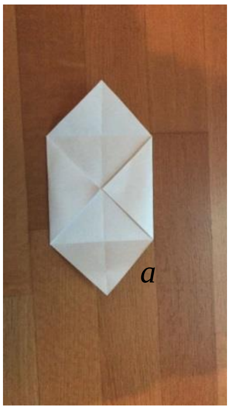
Slika 26.4

Paralelogram smo oblikovali iz pravokotnika z dolžino a in širino b. Dolžina stranice romba s je po Pitagorovem izreku $s^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2$.

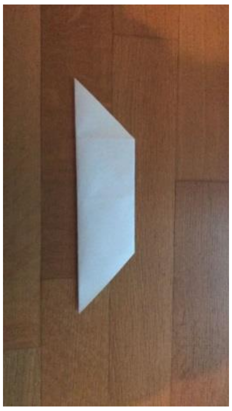
Romb lahko po enakem postopku oblikujemo tudi iz kvadratnega lista papirja.

Paralelogram v kvadratu.

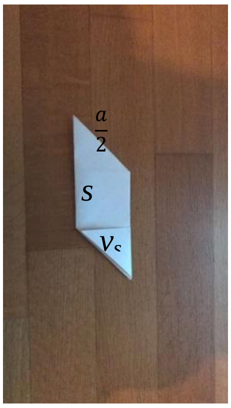
Poglejmo, kako iz kvadratnega lista papirja oblikujemo paralelogram, ki ni romb. Najprej kvadrat prepognemo po diagonalah in ga nato spet razpremo. Dve nasprotni oglišči prepognemo do točke kjer se sekata diagonali (slika 27.1). Prepognemo po diagonali, ki ne seka izbranih nasprotnih kotov. Tako dobimo trapez (slika 27.2). Da bi dobili paralelogram, moramo najprej na enem koncu prepogniti papir tako, da pregib predstavlja višino trapeza, ki poteka skozi eno od zgornjih oglišč (slika 27.3). Ko to naredimo, dobimo pravokotni trikotnik (del papirja, ki smo ga prepognili in izstopa). Tega prepognemo po hipotenuzi in tako dobimo paralelogram (slika 27.4).



Slika 27.1


Slika 27.2


Slika 27.3



Slika 27.4

Dolžino stranice kvadrata označimo a. Dolžino daljše stranice paralelograma označimo $s = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tako je $v_s = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Ploščina paralelograma je $\frac{a^2}{4}$. Druga dolžina stranice paralelograma je $\frac{a}{2}$.

Paralelogram na traku.

Najprej en del traku prepognemo čez širino traku, da se oba dela prekrijeta (slika 28.1). Nato trak razgrnemo in en del traku prepognemo po pregibu, ki smo ga naredili s prvim pregibanjem (slika 28.2). Drugi del traku prepognemo enako, vendar v nasprotno smer (slika 28.3). Preostali del traku prelagamo tako dolgo, da se prekrije s paralelogramom (slika 28.4 do 28.7).

Slika 28.1

Slika 28.2

Slika 28.3

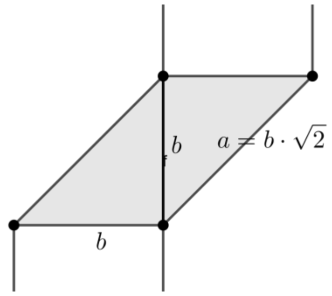
Slika 28.4

Slika 28.5

Slika 28.6

Slika 28.7

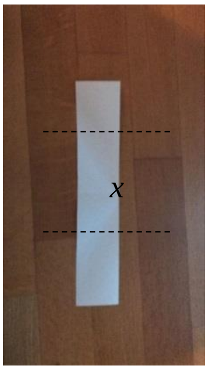
Nastali paralelogram ima višino na krajšo izmed stranic enako širini traku, b. Tudi dolžini krajših stranic paralelograma sta enaki širini traku, b. Dolžina daljše stranice je zato $b\sqrt{2}$ (slika 28.8).



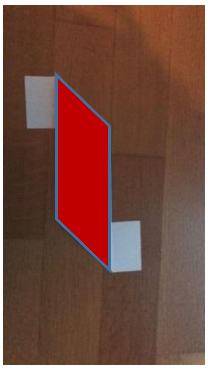
Slika 28.8

Iz traku lahko naredimo paralelogram poljubne dolžine (glede na dolžino traku, seveda). Pregiba v nasprotno stran ni potrebno narediti na enakem mestu, ampak lahko trak prepognemo čez širino na začetku na poljubnih mestih (slika 29.1, 29.2, 29.3).

Višina na daljšo stranico nastalega paralelograma je enaka širini traku, b. Z uporabo Pitagorovega izreka lahko izračunamo dolžino krajše stranice paralelograma, $b\sqrt{2}$. Če z x označimo razdaljo med pregiboma (slika 29.1), je dolžina daljše stranice paralelograma enaka vsoti dolžin $x + 2b$.



Slika 29.1



Slika 29.2

Slika 29.3

5. Ugotovitve

Namen naše naloge je bil ugotoviti, kako iz papirja izbranih oblik s pregibanjem oblikovati znane like. Pregibanje papirja nam daje nešteto možnosti izdelave znanih likov. Zato smo si pred začetkom raziskovanja postavili nekatere omejitve. Tako smo pregibali pravokotnik, kvadrat, trak (pas) in krog. Poznati smo morali lastnosti zrcaljenja, kar pregibanje papirja tudi je. Naloge smo se lotili sistematično, z veliko pregibanja, premišljanja, diskusije in brskanja po virih.

Največji možni kvadrat smo s pregibanjem dobili iz kvadrata, pravokotnika, traku in kroga.

Enakostranični trikotnik smo s pregibanjem oblikovali iz pravokotnika. Prikazali smo dve možni rešitvi. Prav tako smo enakostranični trikotnik s pregibanjem pridobili na traku, v krogu in v kvadratu. Za vsak primer posebej smo zapisali dolžino stranice trikotnika v odvisnosti od razsežnosti izhodiščnega lika.

Na koncu smo iz pravokotnika, kvadrata in traku oblikovali še paralelogram, ki ni romb ali pravokotnik.

Zagotovo je pregibanje papirja neizčrpen vir nadaljnjih raziskav in dela. Že spoznavanje lastnosti origamija bi lahko bila posebna raziskovalna naloga.

6. Družbena odgovornost

Z raziskovalno nalogo smo raziskali tudi drugo plat matematike, ki večini sošolcev pa tudi odraslih ni tako znana, ampak nas je ravno zaradi tega pritegnila. Med pisanjem smo se med sabo zelo zbližali in pridobili veliko znanja, ki ga bomo lahko uporabili v naši bližnji prihodnosti, torej srednji šoli, ko se bomo spet srečali s podobnimi matematičnimi problemi. Želimo, da s to raziskovalno nalogo navdihnemo sovrstnike, ki mogoče ne vedo kaj bi raziskovali ali pa še vedno ugotavljajo in iščejo področja, ki so jim všeč.
Raziskovalna naloga je naše avtorsko delo, smo pa korektno in skrbno navedli vse vire, iz katerih smo povzemali nekatere ideje ali postopke. Zavedamo se, da je prav spoštovanje avtorskega dela pomemben vidik raziskovalnih nalog.

7. Viri

[1] How to fold simple shapes from A4 paper, Andrew Jobbings (http://www.arbelos.co.uk/Papers/Fold-shapes.pdf), 18 February 2012. Pridobljeno 15. 10. 2019.

[2] trikotnik v krogu, 28.1.2020 (https://www.google.com/search?q=equilateral+triangle+in+circle+paper+folding&client=firefox-b-d&tbm=isch&source=iu&ictx=1&fir=leagKGMS4qi1dM%253A%252CRIMGRxYLxkKTjM%252C_&vet=1&usg=AI4_-kRixNVl30S17eQOrNY1cQFP5Lbs_g&sa=X&ved=2ahUKEwj_yqOPqqnnAhXC2qQKHQTMD60Q9QEwA3oECAcQCw#imgrc=prhC2vJlFl4BWM:&vet=1)

[3] Flexagon, M. Lazič, A. Glavnik, Mladi za napredek Maribora, Februar 2015.