

**Mladi za napredek Maribora 2019,
36. srečanje**

Simulacija krivulje leta navadne in golf žogice

**Fizika
Raziskovalna naloga**

Avtor: ROK RAJHER, JAKA GAAL

Mentor: TADEJ CRNJAC, PETER CRNJAC

Šola: II. GIMNAZIJA MARIBOR

Število točk: 167

Mesto: 2

Priznanje: zlato

Maribor, 2019

**Mladi za napredek Maribora 2019,
36. srečanje**

Simulacija krivulje leta navadne in golf žogice

**FIZIKA
RAZISKOVALNA NALOGA**

Maribor, 2019

KAZALO VSEBINE

KAZALO PREGLEDNIC.....	4
KAZALO GRAFOV	4
KAZALO SLIK.....	4
ZAHVALA	5
POVZETEK.....	6
1. UVOD	7
1.1 RAZISKOVALNA VPRAŠANJA.....	8
1.2 HIPOTEZE.....	8
1.3 NAMEN NALOGE	8
2. TEORETIČNO OZADJE	9
2.1 POŠEVNI MET Z UPOŠTEVANJEM ZRAČNEGA UPORA	9
3. MATEMATIČNA FORMULACIJA PROBLEMA	12
3.1 NUMERIČNO REŠEVANJE NAVADNIH DIFERENCIALNIH ENAČB	12
3.2 NUMERIČNA INTEGRACIJA.....	13
4. EKSPERIMENTALNI DEL	16
5. DISKRETIZACIJA VODILNIH ENAČB	20
6. REZULTATI IN DISKUSIJA.....	22
6.1 PREVERJANJE PRAVILNOSTI NUMERIČNEGA ALGORITMA.....	22
6.2 PRIMERJAVA KRIVULJ LETA BREZ IN Z UPOŠTEVANJEM UPORA	23
6.3 REZULTAT SIMULACIJE V ODVISNOSTI OD ČASOVNEGA KORAKA	24
6.4 DOLOČANJE OPTIMALNEGA KOTA.....	26
6.5 KRIVULJA LETA ŽOGIC PRI OPTIMALNEM KOTU IN KOTU 45°.....	29
7. UGOTOVITEV	32
8. ZAKLJUČEK	33
9. VIRI IN LITERATURA	34
10. UPORABLJENI SIMBOLI IN OZNAKE	35
11. PRILOGA	37

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Vrednosti koeficienta upora žogice v odvisnosti od Reynoldsovega števila.....	18
Preglednica 2: Let navadne in golf žogice v brezračnem prostoru, $\alpha = 35^\circ$, $v_0 = 50 \text{ m/s}$	23
Preglednica 3: Analiza časa leta in dometa golf žogice pri različnih časovnih korakih	24
Preglednica 4: Določanje optimalnega kota pri navadni in golf žogici	27
Preglednica 5: Domet navadne in golf žogice pri optimalnem kotu pri različnih hitrostih	28
Preglednica 6: Rezultati simulacije za domet žogic pri optimalnem kotu in kotu 45°	29

KAZALO GRAFOV

Graf 1: Rešitev diferencialne enačbe z Eulerjevo metodo	13
Graf 2: Let navadne in golf žogice brez upoštevanja zračnega upora, $\alpha = 35^\circ$, $v_0 = 50 \text{ m/s}$	22
Graf 3: Krivulji leta navadne in golf žogice v primeru, ko upoštevamo zračni upor in v brezračnem prostoru. Začetna hitrost obeh žogic znaša $v_0 = 50 \text{ m/s}$ in dvižni kot $\alpha = 45^\circ$	24
Graf 4: Rezultat simulacije leta golf žogice v odvisnosti od časovnega koraka	25
Graf 5: Rezultat simulacije časa leta golf žogice v odvisnosti od časovnega koraka	25
Graf 6: Grafični prikaz dometa obeh žogic pri hitrosti $40,0 \text{ m/s}$ in optimalnem kotu 41°	27
Graf 7: Grafični prikaz dometa obeh žogic pri različnih hitrostih in optimalnem kotu 41°	28
Graf 8: Krivulji leta golf in navadne žogice pri optimalnem kotu in kotu 45°	29
Graf 9: Grafi funkcije $x(\alpha)$ pri $y_1 = 20 \text{ m}$ (A), $y_1 = 0 \text{ m}$ (B), $y_1 = 20 \text{ m}$ (C) [5].....	31

KAZALO SLIK

Slika 1: Sile na žogico pri poševnem metu z upoštevanjem sile zračnega upora	9
Slika 2: Anemometer (levo), LabQuest prikazovalnik podatkov (desno).....	16
Slika 3: Merilnik sile (levo), komponente pri izvajanju meritev (desno)	17
Slika 4: Pomen parametra ε	21
Slika 5: Optimizacija problema poševnega meta z upoštevanjem upora (povzeto po [5])	30

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju za pomoč in podporo pri raziskovanju in pisanju raziskovalne naloge in lektorici, ki je lektorirala besedilo.

POVZETEK

Namen raziskovalne naloge je obravnavati in primerjati krivulji leta navadne in golf žogice, ki ju igralec udari pod enakim kotom ter z enako začetno hitrostjo. Let žogice smo obravnavali v vektorski obliki in zapisali vodilne enačbe za hitrost in položaj žogice ob poljubnem času v komponenti obliki. Pri izračunu leta žogice smo upoštevali odvisnost koeficienta upora od vrednosti Reynoldsovega števila oziroma hitrosti, pri čemer smo uporabili linearno Lagrangeevo interpolacijo pri računanju tabelarnih podatkov.

Problem določitve krivulje leta žogice z upoštevanjem zračnega upora analitično ni rešljiv, saj sta vodilni diferencialni enačbi za komponenti hitrosti v ravnini leta sklopljeni in nelinearni. Zato rešujemo problem z numeričnim algoritmom: enačbi hitrosti smo diskretizirali z metodo končnih razlik 1. reda in položaj s trapezno integracijo. V programskem jeziku Scilab smo zapisali računalniški program, ki iterativno rešuje diferencialne enačbe poševnega meta z upoštevanjem kvadratnega zakona upora.

1. UVOD

Amaterski igralec golfa udari na ravnem igrišču enkrat navadno, gladko žogico in drugič profesionalno golf žogico. Obe žogici udari pod enakim kotom ter z enako začetno hitrostjo. Ugotovimo, da letita žogici v enakih vremenskih razmerah, ob uporabi iste palice in istem izvajalcu udarca, različno daleč. V raziskovalni nalogi smo simulirali krivulji leta navadne in golf žogice in poiskali odgovor na vprašanje, zakaj je v enakih pogojih horizontalna metna razdalja golf žogice občutno daljša.

Ko se telo giblje skozi tekočino ali če teče tekočina mimo telesa, razstavimo celotno silo tekočine na statični vzgon (ki je neodvisen od tega, ali tekočina oz. telo miruje ali ne) ter na dinamično silo, ki je neposredno odvisna od hitrosti telesa oziroma tekočine. V realni (viskozni) tekočini se prilepi vzdolž površine ovire mejna plast tekočine, ki skupaj z oviro miruje. Zaustavljena plast zavira gibanje sosednjih plasti, oddaljene plasti pa z viskozni silami vlečejo plasti ob oviri s seboj in tako zmanjšujejo tlak tekočine na nizvodni strani ovire. Razen tega nastajajo za oviro vrtinci, ki se odlepljajo od nje in potujejo v smeri toka. Kinetična energija vrtincev se spotoma izgublja, zato je hitrost tekočine za oviro manjša kot pred njo. Zmanjšanje hitrosti tekočine povzroča sila, s katero se ovira upira mimo tekoči tekočini, ta pa je nasprotno enaka sili, s katero tekočina pritiska na oviro v smeri toka in ga vleče s seboj. Tej sili pravimo upor tekočine.

Pri velikih hitrostih, ki jih dosega žogica, in malo viskoznih tekočinah je za upor tekočine bolj kot vpliv viskoznosti odločilen dinamični učinek, da telo moti potek tokovnic, da tokovnice zakrivlja in da spreminja hitrost tekočine. Tekočina se ob telesu ne ustavi povsem, pač pa ga tokovnice obidejo in na zadnji strani nastajajo vrtinci. Izkušnje kažejo, da je dinamični upor sorazmeren z gostoto kinetične energije nemotenega gibanja tekočine. Sorazmernostni faktor se imenuje koeficient upora, ki je odvisen od oblike in velikosti telesa, v splošnem pa tudi od hitrosti in viskoznosti tekočine. Dinamični upor je lahko zelo velik, posebno pri velikih hitrostih.

Pri obliki telesa je odločilna predvsem zadnja stran, kjer nastajajo vrtinci. Čim močnejši vrtinci nastajajo, tem večji je koeficient upora. Pri danem prečnem prerezu telesa ga zmanjšamo tako, da čim manj zmotimo potek tokovnic; predvsem moramo oslabiliti vrtince na zadnji strani telesa. Bolje je, da nastaja več manjših vrtincev po celotni površini telesa kot nekaj večjih na zadnji strani. Zaradi tega je teniška žoga hrapava, žogica za golf pa ima polno vdolbinic.

Let žogic smo obravnavali v vektorski obliki in zapisali vodilne enačbe za hitrost in položaj žogice ob poljubnem času v komponenti obliki. Vodilni diferencialni enačbi sta sklopljeni, vendar nelinearni, zato nista analitično rešljivi. Enačbi pa lahko vseeno rešimo z numerično metodo. Pri izračunu leta žogice smo upoštevali odvisnost koeficienta upora od vrednosti Reynoldsovega števila oziroma hitrosti. Zaradi tega smo bili primorani izdelati numerični algoritem in izračun leta žogice obravnavati z uporabo programskega paketa Scilab. Kljub vsemu smo realne razmere še vedno poenostavili, saj nismo v fazi leta upoštevali rotacije, ki jo dobi žogica pri udarcu s palico. Če se telo med gibanjem skozi tekočino še vrti okrog osi, pravokotne na smer gibanja, se nesimetričnost obtekanja tokovnic dodatno ojači (Magnusov efekt).

1.1 RAZISKOVALNA VPRAŠANJA

- Zakaj leti golf žogica dalje kot navadna ob uporabi iste palice, istem izvajalcu udarca in ob enakih vremenskih razmerah?
- Ali je metna razdalja pri poševnem metu z upoštevanjem sile zračnega upora maksimalna pri kotu 45° ?

1.2 HIPOTEZE

- **H₁:** *Amaterski igralec golfa udari na ravnem igrišču enkrat navadno, gladko žogico in drugič profesionalno golf žogico. Obe žogici udari pod enakim kotom ter z enako začetno hitrostjo. Ugotovimo, da letita žogici v enakih vremenskih pogojih, ob uporabi iste palice in istem izvajalcu udarca, različno daleč.*
 - Koeficient upora, ki nastopa v enačbi za dinamični upor kot sorazmernostni faktor, je odvisen od oblike in velikosti telesa, v splošnem pa tudi od hitrosti in viskoznosti tekočine. Pri dani obliki telesa je odločilna predvsem zadnja stran, kjer nastajajo vrtinci. Čim močnejši vrtinci nastajajo, tem večji je koeficient upora. Bolje je, da nastaja več manjših vrtincev po celotni površini telesa kot nekaj večjih na zadnji strani. Zaradi tega je teniška žoga hrapava, žogica za golf pa ima polno vdolbinic.
- **H₂:** *Znano je, da je domet žogice krajši, če golfist ne uspe udariti žogice pod optimalnim kotom, temveč udari pod kotom 45° .*
 - Zanimivo je opazovati, kako se menja kot maksimalnega dometa. V brezračnem prostoru je za vse začetne hitrosti kot maksimalnega dometa 45° . V ozračju pa se kot spreminja v odvisnosti od začetne hitrosti.

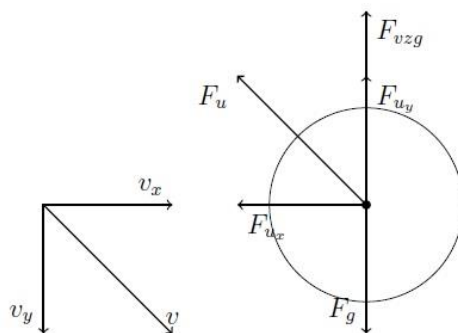
1.3 NAMEN NALOGE

- Obravnavati let žogice v vektorski obliki in zapisati vodilne enačbe za hitrost in položaj žogice ob poljubnem času t v komponenti obliki.
- Zapisati izpeljane vodilne diferencialne enačbe v diskretni obliki z uporabo metode končnih razlik 1. reda in trapezne integracije.
- Upoštevati odvisnost koeficienta upora od vrednosti Reynoldsovega števila. Za tabelarične vrednosti uporabiti linearno Lagrangeovo interpolacijo.
- Izdelati numerični algoritem za izračun leta žogice s programskim paketom Scilab.
- Preveriti pravilnost numeričnega algoritma pri testiranju leta žogic brez upoštevanja zračnega upora.
- Analizirati rezultate simulacije v odvisnosti od časovnega koraka.
- Določiti krivuljo gibanja obeh žogic pri enakih začetnih pogojih in grafično prikazati razliko v doseženi metni razdalji.
- S poskušanjem določiti optimalni kot, pri katerem mora golfist udariti golf žogico, da le-ta pri enaki začetni hitrosti doseže maksimalno razdaljo oziroma domet.
- Ugotoviti odvisnost optimalnega kota od začetne hitrosti. Testirati pri različnih hitrostih.

2. TEORETIČNO OZADJE

2.1 POŠEVNI MET Z UPOŠTEVANJEM ZRAČNEGA UPORA

Opišimo poševni met žogice skozi zrak. Koordinatni sistem postavimo s standardno orientacijo v težišče žogice. Žogica se premika hkrati v x in y smeri, kar pomeni, da žogico pri gibanju zavira sila upora F_u , ki ima vodoravno komponento F_{ux} in navpično komponento F_{uy} , kot je prikazano na sliki 1.



Slika 1: Sile na žogico pri poševnem metu z upoštevanjem sile zračnega upora

Zaradi velike hitrosti žogice izberemo za silo upora kvadratni zakon

$$F_u = \frac{1}{2} C_u \rho S v^2, \quad (2.1)$$

kjer je v hitrost zraka v nemotenem toku merjena glede na telo. Vseeno je, ali se giblje tekočina in miruje telo ali se giblje telo in miruje tekočina. Odločilna je relativna hitrost. Koeficient upora C_u je odvisen od oblike telesa in od njegove lege proti smeri relativne hitrosti, v splošnem pa tudi od hitrosti in viskoznosti tekočine. Za S vzamemo največji presek telesa [1, 7, 8].

Upor je najmanjši za telo s tako imenovano hidrodinamično obliko, ki spominja na obliko nekaterih rib. Podobno obliko imajo tudi krila letal ali celo nekateri športni avtomobili. Sila, ki jo gibajoča se tekočina izvaja na telo, ima smer relativne hitrosti, če ima telo simetrijsko os v smeri te hitrosti. Če telo nima osi v navedeni legi, pa sila nima enake smeri. Zaradi tega je sila tekočine na ploščo, ki je nagnjena proti toku, približno pravokotna na ploščo. V tem primeru razstavimo silo F_u na komponento v smeri relativne hitrosti F_{ux} in na komponento v navpični smeri F_{uy} , ki ji pravimo tudi dinamični vzgon.

Ker ima sila upora smer negativne hitrosti $\vec{v}$, lahko pišemo

$$\vec{F}_u = \frac{1}{2} C_u \rho S v^2 \frac{\vec{v}}{v} = - \frac{1}{2} C_u \rho S v \vec{v}, \quad (2.2)$$

s komponentama

$$F_{ux} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_x , \quad (2.3)$$

$$F_{uy} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_y , \quad (2.4)$$

kjer je absolutna hitrost

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} . \quad (2.5)$$

Kinematiko oziroma gibanje žogice lahko dovolj natančno opišemo z drugim Newtonovim zakonom, in sicer kot

$$\sum_i \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt} , \quad (2.6)$$

pri čemer leva stran predstavlja vsoto vseh sil, ki deluje na žogico, m maso žogice in $d\vec{v}/dt$ njen pospešek. Zapišimo drugi Newtonov zakon za obe smeri

$$ma_x = F_{ux} , \quad (2.7)$$

$$ma_y = -F_g + F_{vzg} + F_{uy} , \quad (2.8)$$

kjer je F_{vzg} sila vzgona, ki jo smemo pri obeh žogicah zanemariti. Dobimo dve sklopljeni navadni diferencialni enačbi [2, 4]

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_x , \quad (2.9)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \frac{1}{2} C_u \rho S v v_y , \quad (2.10)$$

ki pa nista linearni, zato nista analitično rešljivi. Enačbi lahko vseeno rešimo z numerično metodo.

Položaj žogice je določen z diferencialno enačbo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} , \quad (2.11)$$

ali

$$d\vec{r} = \vec{v} dt , \quad (2.12)$$

pri čemer je $\vec{r}$ krajevni vektor in $\vec{v}$ vektor hitrosti. Brž ko poznamo vektor hitrosti za celotno gibanje (to je kot funkcijo časa), lahko določimo tudi lego točke (njen krajevni vektor $\vec{r}$) za poljubni trenutek. Enačba (2.12) podaja spremembo krajevnega vektorja $d\vec{r}$ v časovnem intervalu dt . Celotna sprememba vektorja $\vec{r}$ je vsota (integral) posameznih diferencialnih sprememb $d\vec{r}$

$$\Delta \vec{r} = \int d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{v} dt, \quad (2.13)$$

ali

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt. \quad (2.14)$$

Vektor $\vec{r}_0$ določa začetno lego točke, to je lego točke v začetnem trenutku $t = 0$. Vektorsko enačbo (2.14) lahko zapišemo še v komponentni obliki [7]

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt, \quad (2.15)$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt. \quad (2.16)$$

3. MATEMATIČNA FORMULACIJA PROBLEMA

Numerična metoda predvideva uporabo računalniškega programa, ki nam omogoča hitro reševanje kompleksnih izračunov. Programska koda, ki jo napišemo v poljubnem programskem jeziku, nam ne omogoča, da dobimo analitično rešitev diferencialne enačbe, torej neko funkcijo $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ ali $v_y(t)$, pač pa npr. za problem poševnega meta, program izračuna lego, hitrost in pospešek ob določenem času [4, 5].

V raziskovalni nalogi smo za programsko osnovo izbrali odprtokodni programski paket Scilab, ki ga poleg odprtosti odlikuje tudi preprostost uporabe. Scilab je programski paket za numerično računanje matematičnih funkcij. Uporaben je za računanje z vsemi znanimi oblikami števil, z matrikami, s polinomi itn. Narejen je iz prevajalnika in knjižnic funkcij v programskih jezikih Fortran in C. S Scilabom lahko analiziramo linearne in nelinearne dinamične sisteme, je pa tudi pripomoček za numerično optimizacijo [6].

Scilab omogoča računsko okolje z naslednjimi lastnostmi:

- uporablja različne podatkovne baze v obliki, ki je podobna matematični,
- zagotavlja razumno veliko množico osnovnih funkcij,
- je odprto programsko okolje, s katerim uporabniku ni težko tvoriti in dodajati novih funkcij,
- podpira razvoj knjižnic prek programskih modulov, ki vsebujejo funkcije, namenjene specifičnim aplikacijam.

V raziskovalni nalogi smo programirali s Scilab, in sicer z različico 6.0.1. Programski paket Scilab smo dobili na strani svetovnega spleta <https://www.scilab.org/> in ga brezplačno namestili na računalnik, pri čemer smo morali upoštevati avtorske pravice. Program, s katerim smo simulirali let žogice, je podan kot priloga k raziskovalni nalogi.

3.1 NUMERIČNO REŠEVANJE NAVADNIH DIFERENCIALNIH ENAČB

Navadna diferencialna enačba [9]

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.1)$$

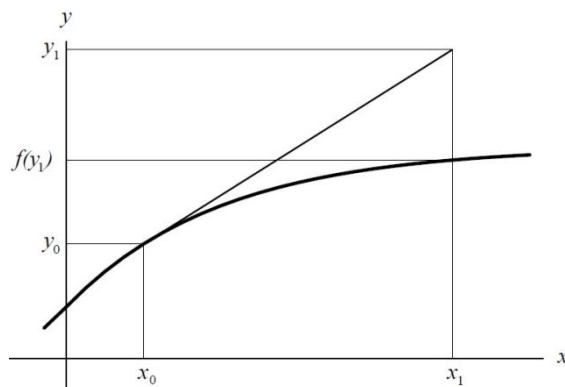
ima na intervalu, npr. $[x_0, x_n]$ neskončno rešitev za y

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_n} f(x, y) dx + C, \quad (3.2)$$

od katerih izberemo tisto, ki ustreza začetnemu pogoju $y(x_0) = y_0$. Najbolj groba, a zato tudi najbolj preprosta od vseh metod reševanja, je Eulerjeva metoda. Na grafu 1 je prikazan postopek, kako izračunamo vrednost rešitve enačbe (3.1) v točki x_1 , če poznamo vrednost v točki x_0 . Na sliki je narisana rešitev diferencialne enačbe, ki gre skozi točko (x_0, y_0) . Razvijmo v Taylorjevo vrsto izraz $y(x_0 + h)$ in zanemarimo višje člene od linearne

$$y(x_0 + h) = y(x_1) \approx y(x_0) + hy'(x_0) = y_1, \quad (3.3)$$

kjer je $h = x_1 - x_0$. Pri Eulerjevi metodi torej aproksimiramo krivuljo s tangento v začetni točki. Naklon tangente dobimo iz diferencialne enačbe [9].



Graf 1: Rešitev diferencialne enačbe z Eulerjevo metodo

Iz enačbe (3.3) povzamemo preprosto diferenčno formulo za izračun odvoda funkcije $f(x)$ v začetni točki x_0

$$\frac{df(x)}{dx} \doteq \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - x_0}{x_1 - x_0}, \quad (3.4)$$

kar imenujemo tudi metoda končnih razlik 1. reda.

Z aproksimacijo prvega odvoda po (3.4) zapišemo diferencialni enačbi (2.9) in (2.10) v časovnem intervalu med t in $t + \Delta t$ v diferenčni obliki [5]

$$m \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_x, \quad (3.5)$$

$$m \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{2} C_u \rho S v v_x. \quad (3.6)$$

3.2 NUMERIČNA INTEGRACIJA

Numerična integracija obravnava numerično rešitev določenega integrala funkcije ene spremenljivke $f(x)$

$$I = \int_a^b f(x) dx + C, \quad (3.7)$$

kjer je funkcija $f(x)$ lahko podana analitično ali v obliki tabelarnih vrednosti. Geometrično gledano je integral I enak ploščini lika pod krivuljo f , in sicer na območju med a in b . Natančnejša metoda izračuna je seveda analitična integracija, ki pa je pogosto prezahtevna že v primeru analitično podanih integrandov [9].

Numerična integracija temelji na aproksimaciji integranda $f(x)$ s funkcijami, ki jih je mogoče enostavno integrirati. Oglejmo si algoritem za izračun določenega integrala s trapezno shemo, ki jo bomo uporabili v raziskovalni nalogi. Trapezna shema temelji na izračunu integrala kot površine trapeza med dvema točkama. Območje integracije razdelimo na N podobmočij in seštejemo ploščine trapezov pod njimi. Shema se zapiše takole [9]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f\left(a + j \frac{b-a}{N}\right) \right] \quad (3.8)$$

in se v primeru $N = 1$ poenostavi v

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right]. \quad (3.9)$$

Z uporabo (3.9) zapišemo enačbi (2.15) in (2.16) v časovnem intervalu med t in $t + \Delta t$ v naslednji diferenčni obliki

$$x = x_0 + \frac{v_x(t) + v_x(t + \Delta t)}{2} \Delta t, \quad (3.10)$$

$$y = y_0 + \frac{v_y(t) + v_y(t + \Delta t)}{2} \Delta t. \quad (3.11)$$

Do diferenčnih enačb (3.10) in (3.11) lahko pridemo tudi po bolj fizikalni poti. Zapišimo enačbi (2.9) in (2.10) v nekoliko poenostavljeni obliki [4]

$$a_x = -\frac{1}{2m} C_u \rho S v v_x, \quad (3.12)$$

$$a_y = -g - \frac{1}{2m} C_u \rho S v v_y. \quad (3.13)$$

Komponenti pospeška a_x in a_y se stalno spreminjata, prav tako se spreminjata tudi komponenti hitrosti v_x in v_y . Za primerno kratek časovni interval Δt lahko privzamemo, da je pospešek konstanten. Če poznamo koordinati x in y ter komponenti hitrosti v_x in v_y pri določenem času t , lahko izračunamo lego in hitrost v nekoliko poznejšem času $t + \Delta t$ z uporabo enačb za konstanten pospešek.

V časovnem intervalu Δt je v smeri x povprečna komponenta pospeška $a_x = \Delta v_x / \Delta t$, komponenta hitrosti v_x pa se v isti smeri spremeni za $\Delta v_x = a_x \Delta t$. Podobno se komponenta hitrosti spremeni za $\Delta v_y = a_y \Delta t$. Na koncu intervala Δt sta komponenti hitrosti v x in y smeri

$$v_x + \Delta v_x = v_x + a_x \Delta t, \quad (3.14)$$

$$v_y + \Delta v_y = v_y + a_y \Delta t. \quad (3.15)$$

V časovnem intervalu Δt se seveda spremeni tudi lega telesa. V času Δt je povprečna hitrost v x smeri povprečje med v_x in Δv_x ali kar $v_x + \Delta v_x/2$. V tem času se x komponenta spremeni za

$$\Delta x = \left(v_x + \frac{\Delta v_x}{2} \right) \Delta t = v_x \Delta t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2 \quad (3.16)$$

in podobno se y komponenta spremeni za

$$\Delta y = \left(v_y + \frac{\Delta v_y}{2} \right) \Delta t = v_y \Delta t + \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2, \quad (3.17)$$

kar pa je v skladu z enačbami gibanja s konstantnim pospeškom. Ob koncu časovnega intervala Δt sta tako koordinati telesa

$$x + \Delta x = x + v_x \Delta t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2, \quad (3.18)$$

$$y + \Delta y = y + v_y \Delta t + \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2. \quad (3.19)$$

Na tem mestu je potrebno še določiti začetne pogoje; določiti moramo začetne vrednosti x , y , v_x in v_y . Pri poševnem metu postavimo izhodišče koordinatnega sistema v težišče opazovane kroglice, torej bosta začetni koordinati $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ in začetni hitrosti $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$ in $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$, kjer je α dvizni kot žogice po udarcu s palico.

4. EKSPERIMENTALNI DEL

Reynoldsovo število je brezdimenzijsko število, definirano z enačbo [7]

$$Re = \frac{d\rho v}{\eta}, \quad (4.1)$$

pri čemer je v hitrost tekočine (oz. telesa), η in ρ viskoznost in gostota tekočine in d karakteristična dolžina telesa (npr. premer krogle). Količnik viskoznosti in gostote tekočine se pogosto označi z $\nu = \eta/\rho$ in se imenuje kinematična viskoznost tekočine.

Reynoldsovo število se izkaže kot zelo koristen pripomoček, ki pomaga presoditi, ali je pri danem gibanju tekočine odločilen viskozni ali dinamični učinek. Pri počasnem gibanju majhnih teles v močno viskozni tekočini je Re majhen (npr. manjši od 1). Velik Re pa dobimo pri hitrem gibanju velikih teles v malo viskozni tekočini. Velik Re (npr. več kot 1000) torej pomeni, da lahko viskozni učinek zanemarimo, pomembni so dinamični učinki. Ko merimo upor tekočine na modelu telesa v vetrovniku, moramo paziti, da je Re za model enak kot pri pravem telesu.

Merjenje upora zraka (na modelu telesa v vetrovniku) pokaže, da je koeficient upora odvisen neposredno od Reynoldsovega števila. Za $Re < 0,5$ velja pri kroglastem telesu, da je koeficient upora dan z enačbo [7]

$$Cu = \frac{24}{Re}, \quad (4.2)$$

kar pomeni, da je upor tekočine dan z viskoznim uporom. Pri $Re > 1000$ koeficient upora praktično konstanten in torej lahko uporabimo dinamični upor.



Slika 2: Anemometer (levo), LabQuest prikazovalnik podatkov (desno)

V eksperimentalnem delu smo skušali ugotoviti funkcijsko zvezo med Cu in Re . Izdelali smo improviziran vetrovnik, kjer smo zračni tok ustvarjali s pomočjo pihalnika (Air Blower). Hitrost zračnega toka iz pihalnika, ki smo jo lahko spreminjali, smo merili s pomočjo anemometra na vetrnico, dobljene podatke pa analizirali s pomočjo LabQuest

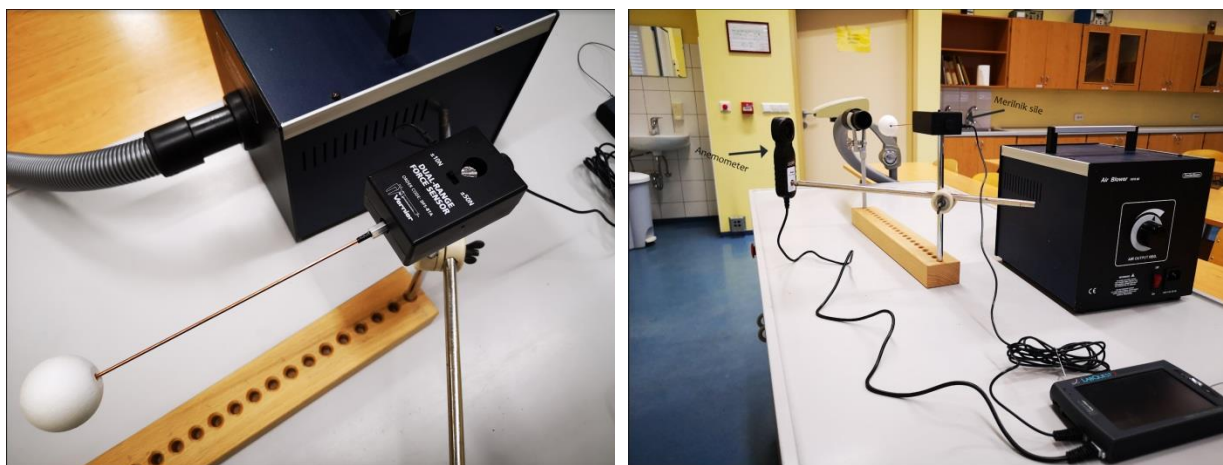
priprave, ki sta prikazana na sliki 2. Bistven pri anemometru je rotor, ki ima os vrtenja postavljeno vzporedno s smerjo vetra. Uporablja magnet, ki se nahaja v rotorju in induktor. Veter povzroča vrtenje rotorja, magneta in gredi. Vrtenje magneta proizvaja električni signal, ki je proporcionalen s hitrostjo vetra.

Najprej smo pri hitrosti zračnega toka $v = 30 \text{ m/s}$ izračunali Re za žogico s premerom $d = 42,67 \text{ mm}$. Iz znanih parametrov za zrak ($\rho = 1,164 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 15,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) izračunamo Reynoldsovo število

$$Re = \frac{vd}{\nu} = 81,5 \cdot 10^3, \quad (4.3)$$

s čimer upravičimo izbiro kvadratnega zakona upor.

Namen nadaljnjih preizkusov je bil ugotoviti koeficient upora za navadno in golf žogico pri različnih zračnih hitrostih ter ga primerjati z vrednostmi iz priročnikov. Tako smo spreminjali hitrost zračnega toka iz pihalnika in na danem mestu izmerili hitrost zračnega toka z anemometrom. Ko smo hitrost izmerili, smo anemometer odstranili, na njegovo mesto pa postavili žogico, ki smo jo trdno vpeli na stojalo. Velikost sile zračnega toka smo merili z merilnikom sile, ki omogoča merjenje sile od 0,01 N pa vse do 50 N. Pred začetkom meritve je bilo treba senzor povezati z vmesnikom (LabQuest) in zagnati aplikacijo za zbiranje podatkov (Logger Pro). Merilnik sile in komponente pri izvajanju meritve so prikazane na sliki 3.



Slika 3: Merilnik sile (levo), komponente pri izvajanju meritev (desno)

Z izmerjenimi hitrostmi smo po enačbi (4.1) izračunali Reynoldsovo število, s pomočjo hitrosti in izmerjene sile pa po enačbi (2.1) še koeficient upora. V preglednici 1 so zbrane meritve vrednosti koeficienta upora navadne in golf žogice v odvisnosti od vrednosti Reynoldsovega števila. Moramo pa poudariti, da smo merili hitrosti le do 50 m/s, pri večjih hitrostih smo si morali pomagati s podatki iz literature [3].

Navadna žogica:

Re	C_u
39806,4	0,4906
50717,1	0,5006
64481,8	0,5053
82828,6	0,5076
103839,2	0,4991
123984,3	0,4805
152635,4	0,4572
180055,8	0,4269
203520,7	0,3928
219073,4	0,3586
231525,9	0,3276
241727,0	0,2918
253929,7	0,2538
263503,5	0,2181
276801,1	0,1816
288983,3	0,1506
309153,4	0,1226
340952	0,1048

Golf žogica:

Re	C_u
39573,4	0,4673
41569,8	0,4323
44207,8	0,3881
46726,9	0,3439
50304,9	0,2957
54810,8	0,2686
60081,3	0,2492
77176	0,2515
97329,3	0,2592
122744,4	0,2678
153857,1	0,274
195224,8	0,281

Preglednica 1: Vrednosti koeficienta upora žogice v odvisnosti od Reynoldsovega števila

V preglednici 1 so zbrane izmerjene vrednosti koeficienta upora v odvisnosti od Reynoldsovega števila oz. od hitrosti. Rezultati opravljenih meritev predstavljajo množico diskretnih podatkov, ki jo želimo opisati z enostavno izračunljivim matematičnim modelom. Naloga modela je, da nam poleg že znanih vrednosti omogoča enostavni izračun vrednosti funkcij za vrednosti parametrov, ki niso zajeti v diskretnih podatkih. Pomagamo si z interpolacijo.

Temeljna ideja interpolacije kot numerične metode je konstrukcija interpolacijske funkcije, ki bo omogočila izračun funkcije za vrednosti parametrov, ki v zbirki podatkov niso zajeti. Za izpeljano interpolacijsko funkcijo je pri tem značilno, da poteka skozi vse

točkovno znane vrednosti funkcije f v primeru funkcije ene spremenljivke, torej skozi vse pare točk $((x_i, f(x_i)))$. Zaradi preprostosti je zelo popularna Lagrangeeva interpolacija, ki temelji na ideji, da vrednost funkcije v vsaki točki $f(x_j)$ pomnožimo s polinomom, ki ima v x_j vrednost 1, v vseh drugih N vozliščih pa vrednost 0. Na koncu je tako dobljenih $N + 1$ polinomov, ki jih seštejemo in dobimo interpolacijski polinom.

Pri linearni interpolaciji moramo imeti dve znani vrednosti: $(x_0, f(x_0))$ in $(x_1, f(x_1))$. Interpolacijski polinom bo torej vsota dveh polinomov [9]

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1). \quad (4.4)$$

Za oba lokalna polinoma mora veljati $L_0(x_0) = 1$ in $L_0(x_1) = 0$, prav tako $L_1(x_0) = 0$ in $L_1(x_1) = 1$. Pogojeva zadostimo z naslednjo obliko funkcij

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (4.5)$$

Linearni Lagrangeev polinom se tako glasi

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1). \quad (4.6)$$

Vrednosti koeficienta upora pri vmesnih vrednostih Reynoldsovega števila, ki niso tabelarično podane, tako računamo v numeričnem algoritmu po (4.6) z naslednjo enačbo

$$C_u(Re) = \frac{Re - Re_1}{Re_0 - Re_1}C_u(Re_0) + \frac{Re - Re_0}{Re_1 - Re_0}C_u(Re_1). \quad (4.7)$$

5. DISKRETIZACIJA VODILNIH ENAČB

Z iteriranjem lahko izračunamo lego in hitrost žogic na koncu vsakega časovnega intervala z začetnimi vrednostmi, in to storimo za veliko število intervalov. Že za 100 intervalov postane računanje z žepnim kalkulatorjem dolgo in zahtevno, tu pa je ključen računalnik, ki računa zelo hitro in seveda bolj natančno. Uporabljena računska shema postane uporabna le za krajše čase, pri daljših pa postane nestabilna, uporabiti bi bilo potrebno simetrično metodo ali katero drugo od bolj sofisticiranih shem, kot je metoda Runge Kutta 4. reda. Je pa naša uporabljena metoda nazorna in ni problematična za implementacijo začetnih vrednosti [5].

Problem določitve komponent hitrosti v_x in v_y iz sklopljenih diferencialnih enačb (2.9) in (2.10) analitično ni možen, ker sta enačbi nelinearni, zato ga obravnavamo z numeričnim algoritmom na osnovi metode končnih razlik (MKR). MKR je numerična metoda, ki služi reševanju diferencialnih enačb. Diferencialno enačbo iskane funkcije v danem prostoru rešujemo numerično tako, da odvod(e) funkcije aproksimiramo s kvociantom razlik, od tod tej metodi tudi ime. Pri diskretizaciji posameznih členov v enačbah (2.9) in (2.10) se pojavljata prva odvoda, ki ju aproksimiramo z desno razliko prvega reda [9].

Razdelimo časovni interval na N enakih delov s časovnim korakom Δt . Z uporabo diferenčne aproksimacije dobimo za vsako od notranjih točk mreže eno neznanko in eno enačbo. Dobljeni sistem enačb zapišemo v matrični obliki, kjer ima matrika navadno posebno strukturo kot bloktridiagonalna ali vsaj kot pasovna [9, 10].

Odvoda, ki nastopata v enačbah (2.9) in (2.10) aproksimirajmo z izrazi, ki vsebujejo samo funkcijske vrednosti v izbranih točkah. Tako zapišemo enačbi v naslednji diskretni obliki

$$m \frac{(v_x^{i+1} - v_x^i)}{\Delta t} = -\frac{1}{2} C_u Re^i \rho S v^i v_x^i, \quad (5.1)$$

$$m \frac{(v_y^{i+1} - v_y^i)}{\Delta t} = -\frac{1}{2} C_u Re^i \rho S v^i v_y^i - mg, \quad (5.2)$$

iz česar sledita po preureditvi izraza za komponenti hitrosti v vsakem vozlišču

$$v_x^{i+1} = v_x^i \frac{\Delta t}{2m} C_u Re^i \rho S v^i v_x^i, \quad (5.3)$$

$$v_y^{i+1} = v_y^i \frac{\Delta t}{2m} C_u Re^i \rho S v^i v_y^i + g \Delta t, \quad (5.4)$$

kjer je

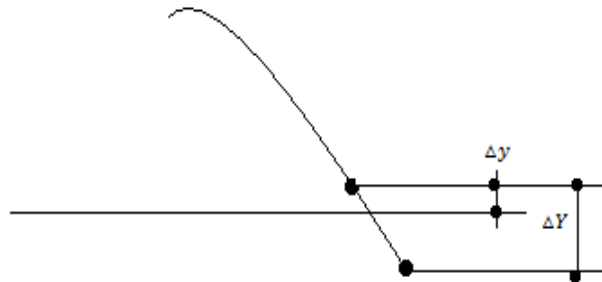
$$v^i = \sqrt{(v_x^i)^2 + (v_y^i)^2}. \quad (5.5)$$

Položaj žogice je določen s trapezno integracijo

$$x^{i+1} = x^i + \frac{(v_x^i + v_x^{i+1})}{2} \Delta t, \quad (5.6)$$

$$y^{i+1} = y^i + \frac{(v_y^i + v_y^{i+1})}{2} \Delta t. \quad (5.7)$$

Zapisati moramo še pogoj, s katerim bo program izračunal čas leta in domet žogice, ko se le-ta dotakne tal. Konsistentno s sliko 4 vpeljimo brezdimenzijski parameter $\varepsilon = \Delta y / \Delta Y$, ki predstavlja zaustavitveni kriterij leta žogice.



Slika 4: Pomen parametra ε

Domet žogice in čas leta bosta v programu določena z naslednjima relacijama

$$x = x^{i-1} + \varepsilon (x^i - x^{i-1}), \quad (5.8)$$

$$t = t^{i-1} + \varepsilon (t^i - t^{i-1}). \quad (5.9)$$

Za reševanje diferenčnih enačb (5.3), (5.4), (5.6) in (5.7) smo uporabili program, ki smo ga napisali v programskem jeziku Scilab. V programu je zapisana masa žogice ($45,93 \cdot 10^{-3}$ kg), premer žogice ($42,67 \cdot 10^{-3}$ m), gostota zraka ($1,164$ kg/m³), kinematična viskoznost zraka pri temperaturi 20 °C ($15,7 \cdot 10^{-6}$ m²/s) in težni pospešek ($9,81$ m/s²). Ko se program zažene, moramo najprej vstaviti časovni interval Δt . Pri izbiri časovnega intervala je potrebno poiskati kompromis med dolžino intervala Δt in številom iteracij. Krajši kot je interval, bolj natančna je metoda, a postane nestabilna po določenem številu iteracij. Zato ne smemo intervala zmanjševati v nedogled, ker gre hkrati število iteracij čez vse meje.

V programu vtiskamo tudi komponenti začetne hitrosti v_x in v_y . Koordinatni sistem je že določen v samem programu; izhodišče koordinatnega sistema je ob času $t = 0$ postavljeno v težišče opazovanega telesa. Program izpiše izračunane podatke v določeno datoteko, ki jo uporabimo za risanje grafov s podprogramom disp. Program izpiše čas t , lego x in y , komponenti hitrosti v_x in v_y ter absolutno hitrost v . Program, ki smo ga uporabljali med raziskavami, je podan kot priloga k raziskovalni nalogi.

6. REZULTATI IN DISKUSIJA

Na podlagi enačb, ki smo jih napisali v diferenčni obliki in razložili v poglavju 5, smo zapisali računalniški program v paketu Scilab, ki nam izriše krivuljo leta žogice v odvisnosti od začetne hitrosti v_0 in dvižnega kota α [6]. Program je podan v prilogi. Osredotočili smo se na začetne hitrosti žogice med 30 m/s in 60 m/s ter na dvižne kote med 30° in 60° .

Obravnavali smo:

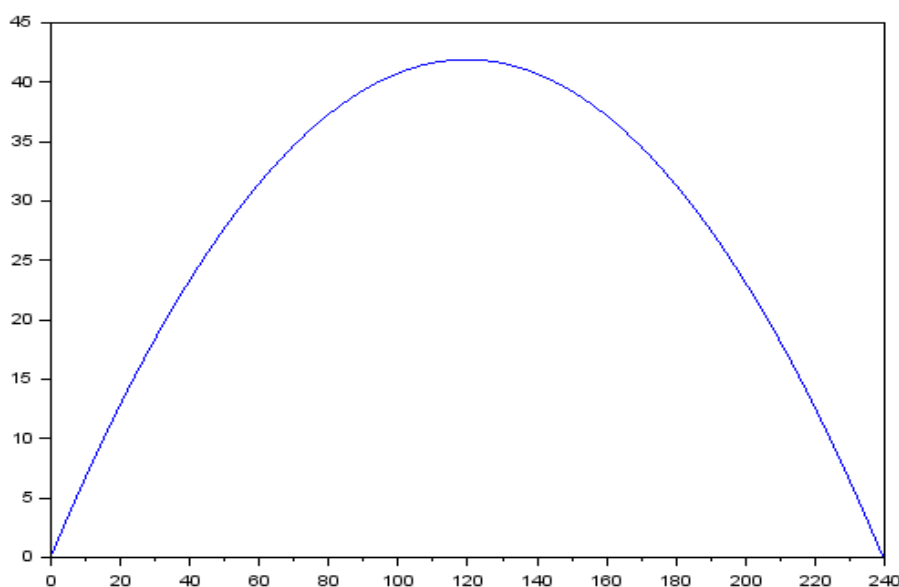
- pravilnost numeričnega algoritma pri testiranju leta žogic brez upoštevanja zračnega upora,
- krivulji leta za navadno in golf žogico brez in z upoštevanjem zračnega upora pri dani začetni hitrosti in danem dvižnem kotu,
- analizo rezultatov simulacije v odvisnosti od časovnega koraka,
- primerjavo leta navadne in golf žogice, določanje optimalnega kota,
- odvisnost optimalnega kota od začetne hitrosti,
- primerjavo dometa pri golf in navadni žogici pri optimalnem kotu in kotu 45° .

6.1 PREVERJANJE PRAVILNOSTI NUMERIČNEGA ALGORITMA

Kot prvi primer smo obravnavali let obeh žogic brez upoštevanja zračnega upora. Za preverjanje pravilnosti numeričnega algoritma oz. napisanega programa smo izbrali poševni met žogice z začetno hitrostjo $v_0 = 50$ m/s in pod kotom $\alpha = 35^\circ$.

Navadna žogica: ■

Golf žogica: ■



Graf 2: Let navadne in golf žogice brez upoštevanja zračnega upora, $\alpha = 35^\circ$, $v_0 = 50$ m/s

Čas leta navadne žogice [s]	Čas leta golf žogice [s]	Dometa navadne žogice [m]	Dometa golf žogice [m]
5,8464292	5,8464292	239,45572	239,45572

Preglednica 2: Let navadne in golf žogice v brezračnem prostoru, $\alpha = 35^\circ$, $v_0 = 50 \text{ m/s}$

Po enačbah poševnega meta brez upoštevanja sile zračnega upora izračunamo za metno razdaljo D in celotni čas padanja t_0

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 239,473145 \text{ m}, \quad t_0 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 5,846855 \text{ s}, \quad (6.1)$$

kjer smo namenoma navedli večje število decimalnih mest zaradi lažje primerjave z rezultatom numeričnega preračuna. Na grafu 2 je prikazana pričakovana krivulja leta, ki mora biti seveda enaka za obe žogici, in izpisana metna razdalja (239,45572 m) ter čas leta (5,8464292 s), kar pomeni odlično ujemanje z izračunanimi vrednostima (6.1). Iz grafa prav tako razberemo, da je padajoči del parabole simetričen z dvigajočim se delom. Na tla pade žogica z enako hitrostjo v_0 in pod enakim kotom α , kot smo jo bili odvrgli. Po teh začetnih preračunavanjih in primerjavah izračunanih in numerično dobljenih rezultatov seveda več ne dvomimo v pravilnost napisanega programa.

6.2 PRIMERJAVA KRIVULJ LETA BREZ IN Z UPOŠTEVANJEM UPORA

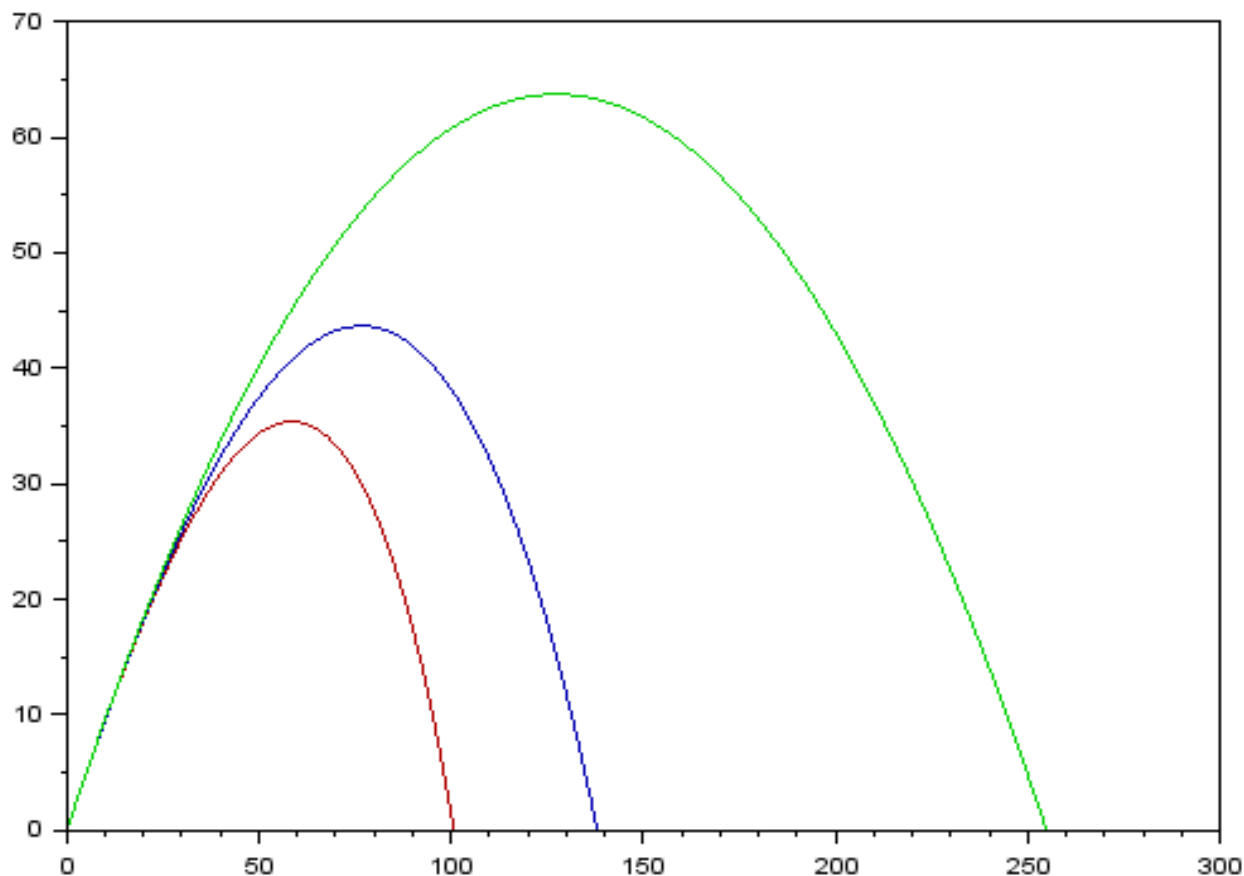
Analizirajmo še krivulji leta navadne in golf žogice v primeru, ko upoštevamo zračni upor in v primeru brezračnega prostora. Da bi pokazali, kako na krivuljo gibanja vpliva zračni upor, smo z računalniškim programom izrisali graf 3. V obeh primerih znaša začetna hitrost žogic $v_0 = 50 \text{ m/s}$ in dvižni kot $\alpha = 45^\circ$. Na grafu 3 so opazne lastnosti balistične krivulje:

- v vsakem primeru je dometa obeh žogic krajši od dometa pod enakim kotom v brezračnem prostoru,
- višina je v vsakem trenutku manjša od višine, ki bi jo žogica dosegla v brezračnem prostoru,
- vpadni kot obeh žogic je večji od dvižnega kota,
- dvigajoči se krak je daljši od padajočega,
- čas, ki ga žogica potrebuje do temena, je krajši od časa, ki ga žogica potrebuje za pot od temena do tal,
- hitrost žogice v točki na dvigajočem se kraku je večja od hitrosti v točki iste višine na padajočem kraku,
- točka najmanjše hitrosti žogice leži na padajočem kraku takoj za temenom.

Golf žogica: ■

Navadna žogica: ■

Golf in navadna žogica brez sile zračnega upora: ■



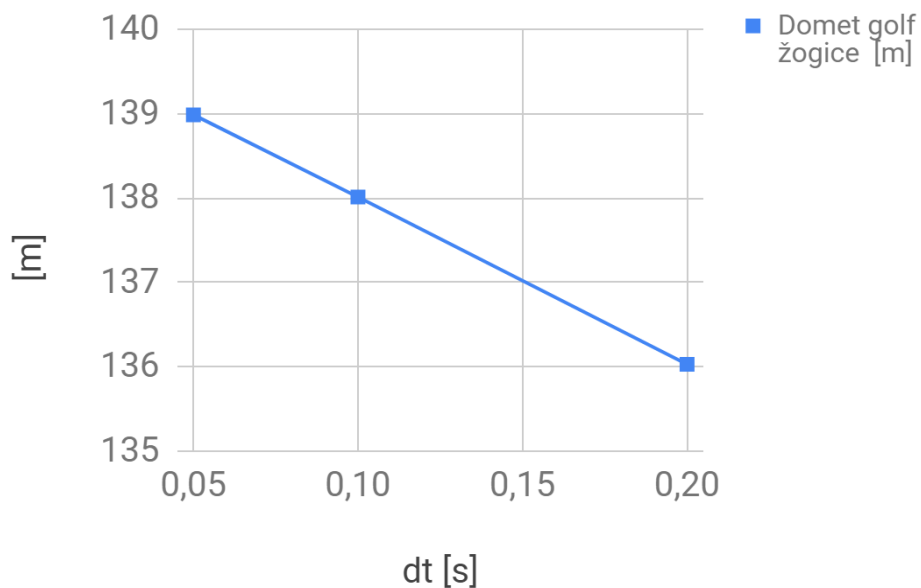
Graf 3: Krivulji leta navadne in golf žogice v primeru, ko upoštevamo zračni upor in v brezzračnem prostoru. Začetna hitrost obeh žogic znaša $v_0 = 50 \text{ m/s}$ in dvižni kot $\alpha = 45^\circ$

6.3 REZULTAT SIMULACIJE V ODVISNOSTI OD ČASOVNEGA KORAKA

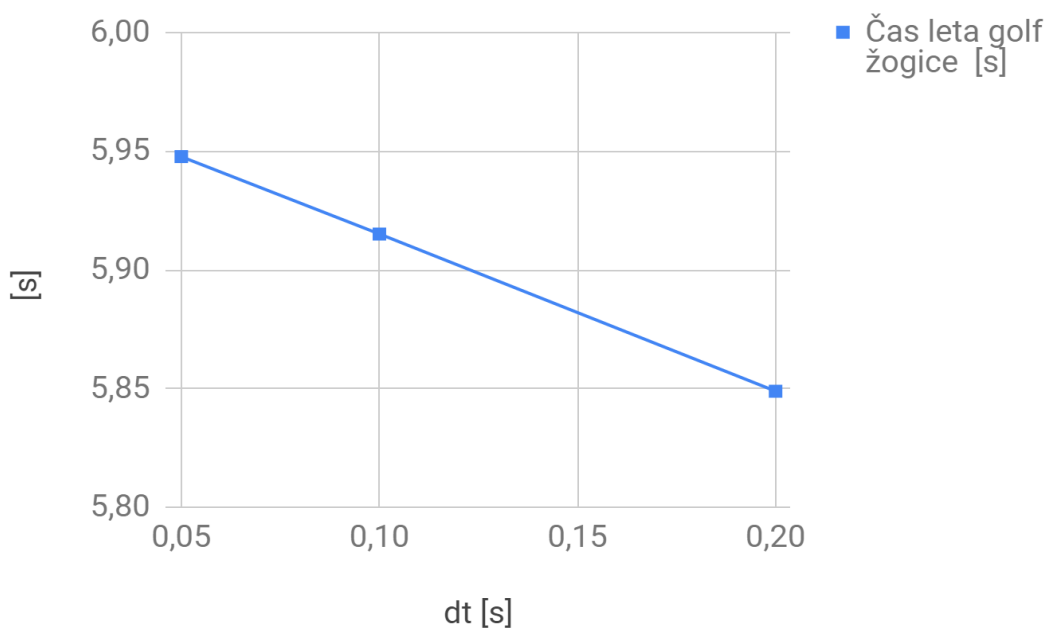
Želeli smo ugotoviti, kako velikost časovnega koraka vpliva na natančnost simulacije. Analizo smo napravili za golf žogico pri $v_0 = 50 \text{ m/s}$ in kotu $\alpha = 45^\circ$.

Čas leta golf žogice[s]	Domet golf žogice [m]	Časovni korak [s]
5,8489693	136,02812	0,20
5,9151278	138,01239	0,10
5,9476726	138,98731	0,05

Preglednica 3: Analiza časa leta in dometa golf žogice pri različnih časovnih korakih



Graf 4: Rezultat simulacije leta golf žogice v odvisnosti od časovnega koraka



Graf 5: Rezultat simulacije časa leta golf žogice v odvisnosti od časovnega koraka

Iz grafov 4 in 5 je razvidno, da se pri zmanjšanju časovnega koraka natančnost leta žogice precej izboljša. Moramo pa pri izbiri časovnega intervala vedno poiskati kompromis med dolžino intervala Δt in številom iteracij. Krajši kot je interval, bolj natančna je metoda, a lahko postane nestabilna po določenem številu iteracij. Zato ne smemo zmanjševati intervala v nedogled, ker gre hkrati število iteracij čez vse meje.

6.4 DOLOČANJE OPTIMALNEGA KOTA

Sledila je obsežna raziskava, pri kateri smo želeli ugotoviti, ali je optimalni kot odvisen od začetne hitrosti. Z računalniško simulacijo smo določali maksimalni domet navadne in golf žogice pri začetnih hitrostih 30,0 m/s, 40,0 m/s, 50,0 m/s in 60,0 m/s. Kot je razvidno iz preglednice 4, smo opravili simulacije pri dvižnih kotih od 39° do 45°. Ugotovitev je presenetljiva: pri začetnih hitrostih od 30,0 m/s do 50,0 m/s je domet golf žogice najdaljši pri kotu 41°, medtem ko je optimalni kot za doseganje največjega dometa pri hitrosti 60,0 m/s 40°. Podobno je pri navadni žogici, kjer se vrednosti največjega dometa gibljejo od 42° pri hitrosti 30,0 m/s do 39° pri hitrostih 40,0 m/s, 50,0 m/s in 60,0 m/s.

Kot [°]	Začetna hitrost [m/s]	Domet navadne žogice [m]	Domet golf žogice [m]	Razlika dometa [m]
39	30,00	56,889657	68,742366	11,852709
40	30,00	57,016336	68,917252	11,900916
41	30,00	57,069201	69,005249	11,936048
42	30,00	57,075147	68,978046	11,902899
43	30,00	57,028737	68,859202	11,830465
44	30,00	56,915878	68,656840	11,740962
45	30,00	56,758418	68,354622	11,596204

Kot [°]	Začetna hitrost [m/s]	Domet navadne žogice [m]	Domet golf žogice [m]	Razlika dometa [m]
39	40,00	80,874706	105,098540	24,223834
40	40,00	80,908405	105,351830	24,443425
41	40,00	80,856673	105,465690	24,609017
42	40,00	80,736281	105,454490	24,718209
43	40,00	80,547777	105,325190	24,777413
44	40,00	80,291183	105,081490	24,790307
45	40,00	79,952209	104,723230	24,771021

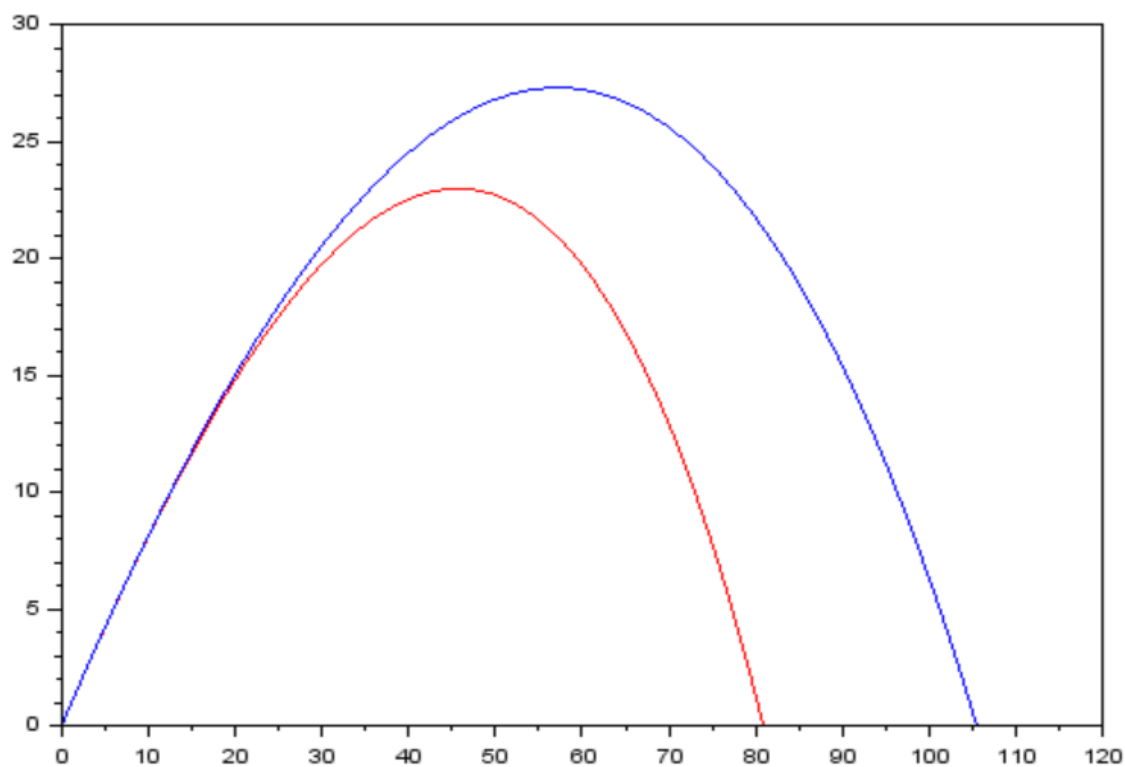
Kot [°]	Začetna hitrost [m/s]	Domet navadne žogice [m]	Domet golf žogice [m]	Razlika dometa [m]
39	50,00	102,62510	139,00000	36,37490
40	50,00	102,51167	139,16335	36,65168
41	50,00	102,31271	139,19444	36,88173
42	50,00	102,03028	139,09357	37,06329
43	50,00	101,66580	138,86236	37,19656
44	50,00	101,21959	138,50181	37,28222
45	50,00	100,68875	138,01239	37,32364

Kot [°]	Začetna hitrost [m/s]	Domet navadne žogice [m]	Domet golf žogice [m]	Razlika dometa [m]
39	60,00	122,23623	169,65854	47,42231
40	60,00	121,96412	169,68167	47,71755
41	60,00	121,59605	169,55312	47,95707
42	60,00	121,13279	169,27344	48,14065
43	60,00	120,57529	168,84398	48,26869
44	60,00	119,92624	168,26521	48,33897
45	60,00	119,18745	167,53840	48,35095

Preglednica 4: Določanje optimalnega kota pri navadni in golf žogici

Navadna žogica: ■

Golf žogica: ■



Graf 6: Grafični prikaz dometa obeh žogic pri hitrosti 40,0 m/s in optimalnem kotu 41°

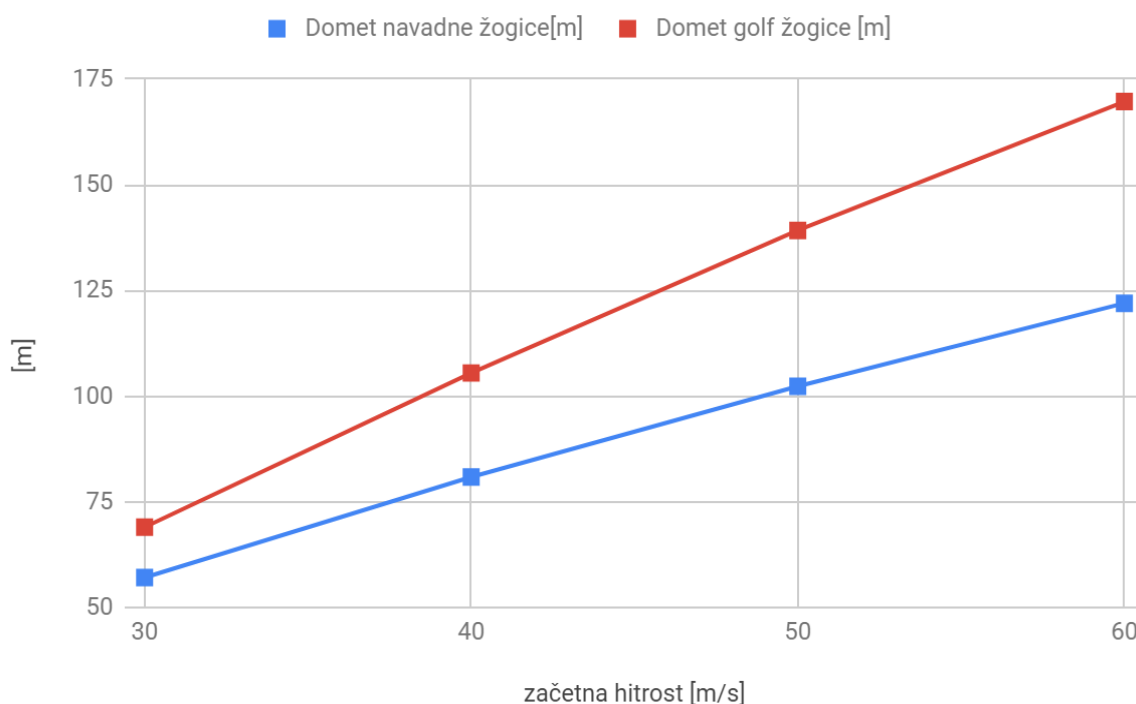
Na grafu 6 je lepo ilustrirana znatna razlika v dometu žogic pri hitrosti 40,0 m/s in optimalnem kotu 41°. Koeficient upora, ki nastopa v enačbi za dinamični upor kot sorazmernostni faktor, je odvisen od oblike in velikosti telesa. Pri dani obliki žogic je odločilna predvsem zadnja stran, kjer nastajajo vrtinci. Čim močnejši nastajajo vrtinci, tem večji je koeficient upora. Bolje je, da nastaja več manjših vrtincev po celotni površini

žogice kot nekaj večjih na zadnji strani. Zaradi tega ima žogica za golf po površini vdolbinice.

Kot je razvidno iz preglednice 4, dosežemo pri spreminjanju začetnih hitrosti, tako pri navadni kot tudi pri golf žogici, različne domete. Tako so rezultati računalniške simulacije nedvoumno pokazali, da je optimalni kot, pod katerim mora golfist udariti žogico, da doseže maksimalno horizontalno razdaljo, odvisen od začetne hitrosti. V preglednici 5 in grafu 7 je prikazan domet navadne in golf žogice pri optimalnem kotu pri različnih hitrostih.

Kot [°]	Začetna hitrost [m/s]	Domet navadne žogice[m]	Domet golf žogice [m]
41	30	57,06920	69,00525
41	40	80,85667	105,46569
41	50	102,31271	139,19444
40	60	121,96412	169,68167

Preglednica 5: Domet navadne in golf žogice pri optimalnem kotu pri različnih hitrostih



Graf 7: Grafični prikaz dometa obeh žogic pri različnih hitrostih in optimalnem kotu 41°

6.5 KRIVULJA LETA ŽOGIC PRI OPTIMALNEM KOTU IN KOTU 45°

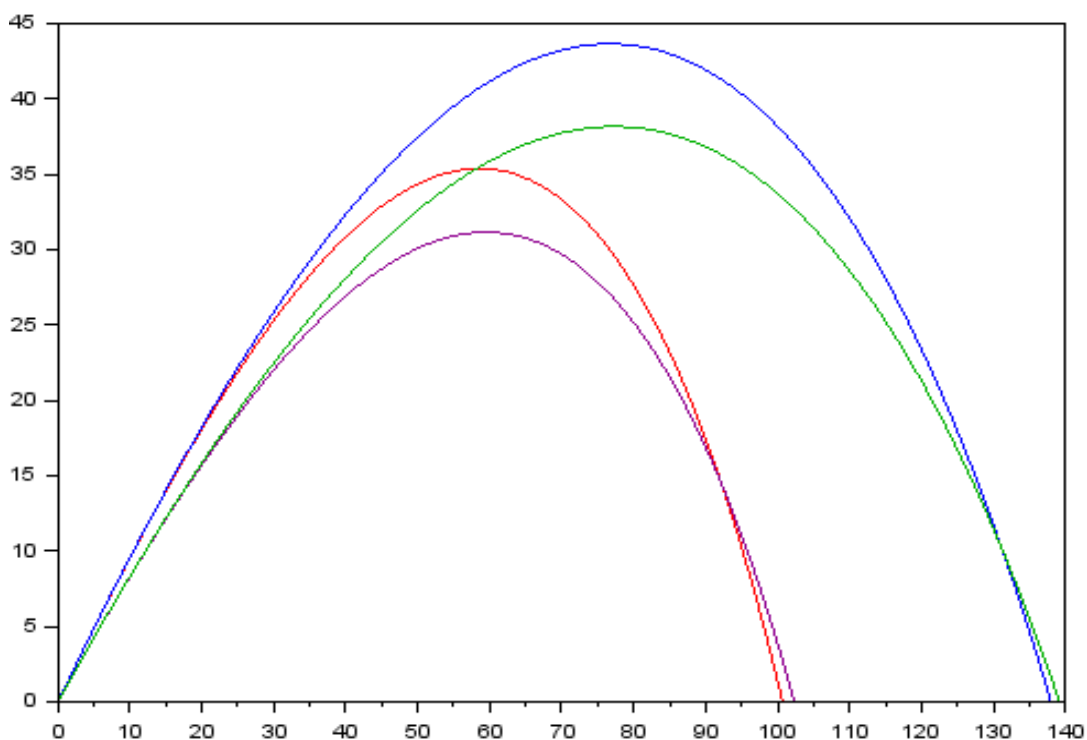
Analize zaključimo s primerjavo krivulje leta navadne in golf žogice pri optimalnem kotu in pri kotu 45°. Začetna hitrost žogic naj znaša v obeh primerih 50 m/s. Rezultati so zbrani v preglednici 6. Z računalniško simulacijo smo potrdili hipotezo, da je metna razdalja golf žogice pri optimalnem kotu 41°, pod katerim mora golfist udariti žogico z začetno hitrostjo 50 m/s, da doseže maksimalno horizontalno razdaljo, za 1,18205 m daljša, kot pri udarcu žogice pod kotom 45°. Pri navadni žogici znaša ta razlika 1,62395 m, kot preberemo iz preglednice 6.

Let golf žogice pod kotom 45°: ■

Let navadne žogice pod kotom 45°: ■

Let golf žogice pod kotom 41°: ■

Let navadne žogice pod kotom 41°: ■



Graf 8: Krivulji leta golf in navadne žogice pri optimalnem kotu in kotu 45°

Kot [°]	Začetna hitrost [m/s]	Domet navadne žogice [m]	Domet golf žogice [m]	Razlika dometa [m]
41	50,00	102,31271	139,19444	36,88173
45	50,00	100,68875	138,01239	37,32364

Preglednica 6: Rezultati simulacije za domet žogic pri optimalnem kotu in kotu 45°

Določanje optimalnega kota pri analizi poševnega meta z upoštevanjem kvadratnega zakona upora je eden od velikih problemov klasične fizike. Primerjajmo naše rezultate iz preglednice 4 z odmevno študijo ruskega profesorja Chudinova [5]. Spomnimo se, kako zapišemo enačbo tirnice točkastega telesa pri poševnem metu brez upoštevanja zračnega upora. Enačbo zapišimo v eksplisitni obliki

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{Hx(D-x)}{x_a^2}. \quad (6.2)$$

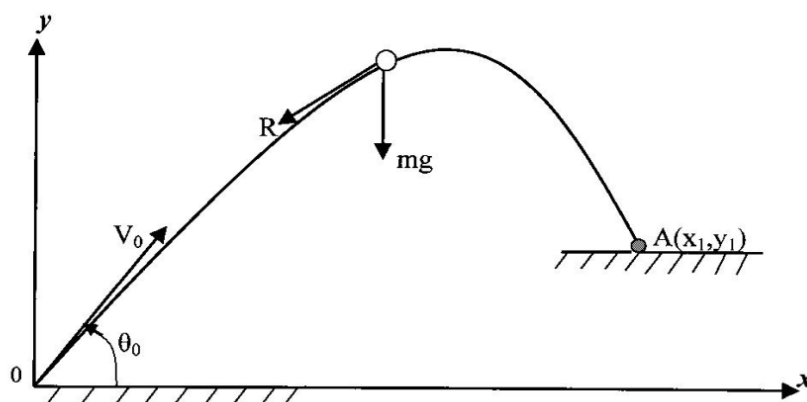
To je enačba parabole, ki je simetrična glede na najvišjo točko, ki je na višini H nad tlemi. Z x_a smo označili razdaljo med izhodiščem koordinatnega sistema in x koordinato najvišje točke, ki jo telo doseže, ki je zaradi simetričnosti parabole $x_a = D/2$.

Pri gibanju z upoštevanjem zračnega upora postane parabola nesimetrična, kjer se vrh parabole premakne v desno proti točki, kjer pade telo na tla. Z upoštevanje tega premika najdemo v [5] korigirano enačbo tirnice, s katero lahko aproksimativno opišemo poševni met s parametri H , D in x_a kot

$$y(x) = \frac{Hx(D-x)}{x_a^2 + (D-2x_a)x}. \quad (6.3)$$

Odvisnost $y(x)$ upošteva premik vrha tirnice v desno in ima vertikalno asimptoto. V primeru brez upora velja $D = 2x_a$ in preide enačba (6.3) v (6.2). Ko vstavimo eksaktne vrednosti H , D in x_a , ki jih dobimo z numerično integracijo nelinearnega sistema enačb (2.9), (2.10), (2.15) in (2.16) v (6.3) in primerjamo numerično tajektorijo z analitično, ki jo izrišemo z uporabo (6.3), ugotovimo, da sta praktično identični.

Pomemben vidik problema poševnega meta z upoštevanjem kvadratnega zakona upora je določitev optimalnega kota meta, ki zagotavlja maksimalni domet. Predstavljajmo si, da smo telo odvrgli z začetno hitrostjo v_0 in pod kotom ($\alpha = \theta_0$), kot je prikazano na sliki 5.



Slika 5: Optimizacija problema poševnega meta z upoštevanjem upora (povzeto po [5])

Označimo z A mesto, kjer prileti telo na vodoravno podlago, y_1 nad tlemi. Uporabimo enačbo (6.3), v kateri so H , D in x_a parametri, odvisni od začetnih pogojev v_0 in α . Vstavimo y_1 v enačbo (6.3) in jo rešimo po spremenljivki x

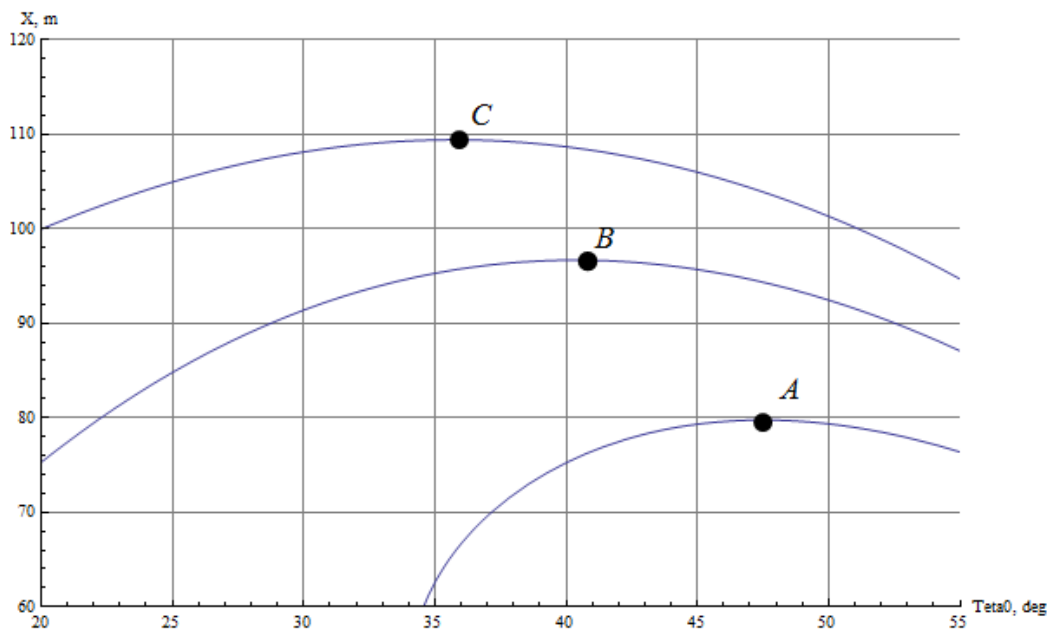
$$x(v_0, \alpha, y_1) = \delta + \sqrt{\delta^2 - Dy_1 \cot \alpha}, \quad (6.4)$$

kjer smo označili

$$\delta = \frac{D}{2} + \frac{y_1}{H} \left(x_a - \frac{D}{2} \right). \quad (6.5)$$

Za dane vrednosti parametrov v_0, y_1 je x funkcija dvižnega kota α . Da poiščemo optimalni kot α^{opt} , pri katerem bo imel x pri danih v_0 in y_1 maksimalno vrednost, funkcijo (6.4) po α odvajamo ali narišemo graf funkcije s poskušanjem.

Navedimo zgled, ki je naveden v viru [5]. V primeru je analiziran let žogice za baseball z uporovnim faktorjem $k = C_u \rho S / 2mg = 0,000625 \text{ s}^2/\text{m}^2$. Za ostala parametra gibanja so izbrali $v_0 = 40 \text{ m/s}$ in $y_1 = 0, \pm 20 \text{ m}$. Na grafu 9 so prikazani lokalni maksimumi A, B in C funkcije $x(\alpha)$ pri $y_1 = 20 \text{ m}$, 0 m in -20 m .



Graf 9: Grafi funkcije $x(\alpha)$ pri $y_1 = 20 \text{ m}$ (A), $y_1 = 0 \text{ m}$ (B), $y_1 = -20 \text{ m}$ (C) [5]

Iz grafa razberemo, da znaša v primeru B maksimalni doseg žogice 96,6 m in optimalni kot $40,8^\circ$. Zaradi koeficienta upora baseball žogice, ki je nekje med vrednostjo naše navadne in golf žogice, znaša pri začetni hitrosti $v_0 = 40 \text{ m/s}$ domet baseball žogice 96,6 m, medtem ko je optimalni kot $40,8^\circ$, kar se presenetljivo dobro ujema z našo numerično vrednostjo v preglednici 4.

7. UGOTOVITEV

V raziskovalni nalogi smo uspešno odgovorili na zastavljena vprašanja in potrdili postavljene hipoteze:

- V nalogi smo simulirali krivulji leta navadne in golf žogice in poiskali odgovor na vprašanje, zakaj je v enakih pogojih horizontalna metna razdalja golf žogice občutno daljša. Potrdili smo hipotezo, da je koeficient upora, ki nastopa kot sorazmernostni faktor v enačbi za dinamični upor, odvisen od oblike in velikosti telesa, v splošnem pa tudi od hitrosti tekočine. Hkrati smo razložili pomen vdolbinic, s katerimi je posejana površina golf žogice. Pri dani obliki telesa je namreč odločilna predvsem zadnja stran, kjer nastajajo vrtinci. Čim močnejši vrtinci nastajajo, tem večji je koeficient upora. Bolje je, da nastaja več manjših vrtincev po celotni površini telesa kot nekaj večjih na zadnji strani, zato ima golf žogica vdolbinice po celotni površini.
- Z numerično analizo smo potrdili hipotezo, da je optimalni kot, pod katerim mora golfist udariti žogico, da doseže maksimalno horizontalno razdaljo, odvisen od začetne hitrosti. V brezračnem prostoru je za vse začetne hitrosti kot maksimalega dometa seveda 45° . V ozračju pa se kot spreminja v odvisnosti od začetne hitrosti. Z računalniško simulacijo smo določali maksimalni domet navadne in golf žogice pri začetnih hitrostih 30,0 m/s, 40,0 m/s, 50,0 m/s in 60,0 m/s, pri dvižnih kotih od 39° do 45° . Ugotovitev je presenetljiva: pri začetnih hitrostih od 30,0 m/s do 50,0 m/s je domet golf žogice najdaljši pri kotu 41° , medtem ko je optimalni kot za doseganje največjega dometa pri hitrosti 60,0 m/s 40° . Podobno je pri navadni žogici, kjer se vrednosti največjega dometa gibljejo od 42° pri hitrosti 30,0 m/s do 39° pri hitrostih 40,0 m/s, 50,0 m/s in 60,0 m/s.
- Zavedamo se, da smo v nalogi realne razmere pri letu golf žogice v ozračju poenostavili, saj nismo v fazi leta upoštevali rotacije, ki jo dobi žogica pri udarcu s palico. Vrteče se telo zaradi viskoznih sil vrta okolišne tekočinske plasti. Hitrost tekočinskih plasti v okolici telesa je zato sestavljena iz hitrosti zaradi gibanja težišča in iz hitrosti zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče. Ti hitrosti se na eni strani telesa seštevata, na drugi odštevata. Po Bernoullijevi enačbi se tako tlak na eni strani zmanjša in na drugi poveča. Nastane prečna sila, ki zavije tirnico v smeri proti manjšemu tlaku. Govorimo o Magnusovem učinku. Tako bi bilo treba v fazi leta, poleg sile teže in sile upora, upoštevati tudi vpliv Magnusove sile, zaradi česar postane gibanje žogice tridimenzionalno in zelo zahtevno tudi za numerično matematično obdelavo.

8. ZAKLJUČEK

S poenostavljenim fizikalnim modelom, s katerim opišemo gibanje žogice v zraku z upoštevanjem kvadratnega zakona upora, smo poiskali odgovor na vprašanje, zakaj je v enakih pogojih horizontalna metna razdalja golf žogice občutno daljša kot pri navadni žogici. Hkrati smo potrdili hipotezo, da je koeficient upora, ki nastopa kot sorazmernostni faktor v enačbi za dinamični upor, odvisen od oblike in velikosti telesa, v splošnem pa tudi od hitrosti tekočine.

Z numerično analizo smo potrdili hipotezo, da je domet žogice krajši, če golfist ne uspe udariti žogice pod optimalnim kotom, temveč udari pod kotom 45° , ki predstavlja v brezračnem prostoru pri vseh začetnih hitrostih kot maksimalnega dometa. Rezultati računalniške simulacije so nedvoumno pokazali, da je optimalni kot, pod katerim mora golfist udariti žogico, da doseže maksimalno horizontalno razdaljo, odvisen od začetne hitrosti.

9. VIRI IN LITERATURA

- [1] Acheson, P. J., "Elementary Fluid Dynamics," Oxford University Press, 1990.
- [2] Cengel, Y. A., Cimbala, J. M., "Fluid Mechanics-Fundamentals and Applications," McGraw-Hill, NY, 2006.
- [3] Cimbala, J. M., "Drag on Spheres," Penn State University, 2012.
- [4] Crosseli, D., "Gibanje pod vplivom močnega upora," Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, 2014.
- [5] Chudinov, P., "Approximate Analytical Description of the Projectile Motion with a Quadratic Drag Force," *Athens Journal of Sciences*, Vol. 1, pp. 97– 106, 2014.
- [6] Golli, B., "Numerične metode, Osnove numeričnega reševanja," Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2004.
- [7] Makarovič, M. 2005. Priročnik programskega paketa Scilab za uporabnika začetnika. Pridobljeno s:
<http://dsc.ijs.si/damir.vrancic/fl/Scilab/prirocnik%20za%20uporabnika%20za%20etnika%202005.pdf>
- [8] Strnad, J., "Fizika," I. del, Mehanika, Toplota, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana, 1973.
- [9] Škerget, L., "Mehanika Tekočin," Univerza v Mariboru, 1994.
- [10] Vidav, I., "Višja matematika III," Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1976.

10. UPORABLJENI SIMBOLI IN OZNAKE

Latinski simboli

		<u>Enota</u>
a	pospešek	[m/s ²]
C	integracijska konstanta	[-]
C_u	koeficient upora	[]
d	premer žogice, prečna dimenzija telesa	[m]
d	diferencial	[-]
F_u	sila upora	[N]
f	poljubna funkcija	[-]
g	težni pospešek	[m/s ²]
I	integral funkcije	[-]
L	Lagrangeeva funkcija	[-]
m	masa žogice	[kg]
N	število podintervalov	[-]
P	interpolacijski polinom	[-]
Re	Reynoldsovo število	[-]
$\vec{r}$	krajevni vektor	[m]
S	prečni prerez telesa	[m ²]
t	čas	[s]
v	hitrost telesa oz. tekočine	[m/s]
$\vec{v}$	vektor hitrosti	[m/s]
x	kartezijska koordinata	[m]
y	kartezijska koordinata	[m]

Grški simboli

		<u>Enota</u>
α	dvižni kot	[°]
Δ	diferenca	[-]
ν	kinematična viskoznost	[m ² /s]
ρ	masna gostota	[kg/m ³]

Uporabljene kratice kot spodnji indeksi

0	začetna vrednost
x	komponenta v smeri osi x
y	komponenta v smeri osi y

Druge uporabljene kratice

MKR	metoda končnih razlik
-----	-----------------------

Oznake, uporabljene v programu Scilab

A	prečni presek žogice
alf0	kot meta
C	izbrani koeficient upora
Calfa	kosinus začetnega kota meta
CuG	koeficient upora za golf žogico
CuN	koeficient upora za navadno žogico
d	premer žogice
dt	časovni korak
g	težni pospešek
i	indeks
m	masa žogice
ni	kinematična viskoznost
q, r	prazni matriki
Re	Reynoldsovo število
ro	gostota zraka
Salfa	sinus začetnega kota
v	hitrost žogice
v0	začetna hitrost
vx	komponenta hitrosti v smeri osi x
vy	komponenta hitrosti v smeri osi y

11. PRILOGA

K raziskovalni nalogi je priložen program, s katerim smo simulirali let golf in navadne žogice:

```
/**PODATKI**  
//Začetna hitrost [m/s]  
v0=50;  
//Kot meta [°]  
alfa0=45;  
//Masa žogice [kg]  
m=45.93e-3;  
//Premer žogice [m]  
d=42.67e-3;  
//Gostota [kg/m^3]  
ro=1.164  
//Kinematična viskoznost [m^2/s]  
ni=15.7e-6;  
//Težni pospešek [m/s^2]  
g=9.81;  
//Koeficient upora v odvisnosti od Re števila za navadno žogico (Re,Cu)  
CuN=[39806.4,0.4906;50817.1,0.5006;64481.8,0.5053;82828.6,0.5076;103839.2,0.4991;123984.3,0.4805;152635.4,  
0.4572;180055.8,0.4269;203520.7,0.3928;219073.4,0.3586;231525.9,0.3276;241727.0,0.2918;253929.7,0.2538;263  
503.5,0.2181;276801.1,0.1816;288983.3,0.1506;309153.4,0.1226;340952.0,0.1048;392424.5,0.0924;519714.9,0.093  
9;722680.5,0.1063;986649.9,0.1203;1314548.5,0.1327;1698782.7,0.1428;2235921.9,0.1529;2960928.6,0.1630];  
//Koeficient upora v odvisnosti od Re števila za golf žogico (Re,Cu)  
CuG=[39573.4,0.4673;41569.8,0.4323;44207.8,0.3881;46726.9,0.3439;50304.9,0.2957;54810.8,0.2686;60081.3,0.24  
92;77176.0,0.2515;97329.3,0.2592;122744.4,0.2678;153857.1,0.2740;195224.8,0.2810];  
  
//Časovni korak [s]  
dt=0.1;  
  
/**ALGORITEM**  
//Prečni presek žogice [m^2]  
A=%pi*d^2/4;  
//Izračun cos in sin začetnega kota meta  
Calfa=cos(alfa0/180*%pi);  
Salfa=sin(alfa0/180*%pi);  
  
/**IZRAČUN LETA NAVADNE ŽOGICE**  
//Izbrani koeficienti upora navadne žogice  
C=CuN;  
//Ustvari prazno matriko  
r=[];  
//t=0  
r(1,1)=0;  
//x=0  
r(1,2)=0;  
//y=0  
r(1,3)=0;  
//Hitrosti so v trenutku t=0 enake začetnim pogojem  
v=v0;  
vx=v0*Calfa;  
vy=v0*Salfa;  
  
i=1;  
while (r(i,3)>=0)  
    i=i+1;  
    //Izračunaj Reynolds-ovo število  
    Re=v*d/ni;  
    a=1;  
    while(C(a,1)<Re)  
        a=a+1;  
    end
```

Raziskovalna naloga: Simulacija leta navadne in golf žogice

```
//Izračunaj koeficient upora
Cu=(Re-C(a-1,1))/(C(a,1)-C(a-1,1))*C(a,2)+(C(a,1)-Re)/(C(a,1)-C(a-1,1))*C(a-1,2);
//Cu=0;

//Izračunaj nove hitrosti
vxNov=vx-dt/(2*m)*Cu*A*ro*v*vx;
vyNov=vy-dt/m*(0.5*Cu*A*ro*v*vy+m*g);
v=(vxNov^2+vyNov^2)^0.5;

//Izračunaj in zapiši čas, koordinato x in koordinato y
r(i,1)=r(i-1,1)+dt;
r(i,2)=r(i-1,2)+(vx+vxNov)/2*dt;
r(i,3)=r(i-1,3)+(vy+vyNov)/2*dt;

//Prepiši stare hitrosti z novimi
vx=vxNov;
vy=vyNov;
end

//Izračunaj čas in domet žogice, ko se ta dotakne tal
eps=(0-r(i-1,3))/(r(i,3)-r(i-1,3));
r(i,1)=eps*(r(i,1)-r(i-1,1))+r(i-1,1);
r(i,2)=eps*(r(i,2)-r(i-1,2))+r(i-1,2);
r(i,3)=eps*(r(i,3)-r(i-1,3))+r(i-1,3);
//Zapiši i za potrebe prikaza rezultatov na koncu
n=i;

***IZRAČUN LETA GOLF ŽOGICE***
//Izbrani koeficienti upora golf žogice
C=CuG;
//Ustvari prazno matriko
q=[];
//t=0
q(1,1)=0;
//x=0
q(1,2)=0;
//y=0
q(1,3)=0;
//Hitrosti so v trenutku t=0 enake začetnim pogojem
v=v0;
vx=v0*Calfa;
vy=v0*Salfa;

i=1;
while (q(i,3)>=0)
    i=i+1;
    //Izračunaj Reynolds-ovo število
    Re=v*d/ni;
    a=1;
    while(C(a,1)<Re)
        a=a+1;
    end

//Izračunaj koeficient upora
Cu=(Re-C(a-1,1))/(C(a,1)-C(a-1,1))*C(a,2)+(C(a,1)-Re)/(C(a,1)-C(a-1,1))*C(a-1,2);
//Cu=0;

//Izračunaj nove hitrosti
vxNov=vx-dt/(2*m)*Cu*A*ro*v*vx;
vyNov=vy-dt/m*(0.5*Cu*A*ro*v*vy+m*g);
v=(vxNov^2+vyNov^2)^0.5;

//Izračunaj in zapiši čas, koordinato x in koordinato y
q(i,1)=q(i-1,1)+dt;
q(i,2)=q(i-1,2)+(vx+vxNov)/2*dt;
```

Raziskovalna naloga: Simulacija leta navadne in golf žogice

```
q(i,3)=q(i-1,3)+(vy+vyNov)/2*dt;  
  
//Prepiši stare hitrosti z novimi  
vx=vxNov;  
vy=vyNov;  
end  
  
//Izračunaj čas in domet žogice, ko se ta dotakne tal  
eps=(0-q(i-1,3))/(q(i,3)-q(i-1,3));  
q(i,1)=eps*(q(i,1)-q(i-1,1))+q(i-1,1);  
q(i,2)=eps*(q(i,2)-q(i-1,2))+q(i-1,2);  
q(i,3)=eps*(q(i,3)-q(i-1,3))+q(i-1,3);  
  
//Izpiši čas leta navadne žogice  
disp(r(n,1),"Čas leta navadne žogice je [s]:")  
//Izpiši čas leta golf žogice  
disp(q(i,1),"Čas leta golf žogice je [s]:")  
//Izpiši domet navadne žogice  
disp(r(n,2),"Domet navadne žogice je [m]:")  
//Izpiši domet golf žogice  
disp(q(i,2),"Domet golf žogice je [m]:")  
  
//Izriši trajektorijo leta žogice  
plot(r(:,2),r(:,3),'r', q(:,2),q(:,3),'b')
```