Mladi za napredek Maribora 2019

36. srečanje

Naravno število je razlika kvadratov

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: SVEN ALEKSANDAR MARINKOVIĆ, LUKA ALEKSANDER RIEDL

Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ
Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR
Število točk: 142/ 170
Mesto: 4
Priznanje: srebrno

Februar 2019

Kazalo

Kazalo tabel

1. Povzetek

Poznamo naravna števila. Naravna števila seštevamo, odštevamo, delimo, množimo, potenciramo … . Naravna števila imajo zanimive lastnosti. Prav zato so zelo primerna za preiskovanja. Vemo, da so kvadrati naravnih števil spet naravna števila. Vemo, da ni vsako naravno število kvadrat drugega naravnega števila. V raziskovalni nalogi raziščemo možnosti, ko izbrano naravno število zapišemo z razliko kvadratov. Raziščemo, katere lastnosti mora imeti naravno število, da lahko to naredimo, tako naravna števila klasificiramo po tej lastnosti. V raziskovalni nalogi raziščemo tudi, katera naravna števila lahko zapišemo z vsoto kvadratov naravnih števil.

2. Uvod

Naravna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo, delimo in prav tako kvadriramo. Kvadriranje je matematični postopek , pri katerem poljubno število pomnožimo s samim seboj. Zapišemo ga kot n^2 , kjer je n poljubno število. V potenci n imenujemo osnova, 2 pa stopnja saj kvadriramo. Nasproten postopek temu je korenjenje. Kvadrat naravnega števila je naravno število. Vsi kvadrati naravnih števil so popolni kvadrati. Naravno število je popolni kvadrat, če ga lahko zapišemo s kvadratom naravnega števila. Kvadratni koren popolnega kvadrata je naravno število. Število 16 je popolni kvadrat, saj je $4^2 = 16$, oziroma $\sqrt{16} = 4$.

Razlika kvadratov je številski izraz če so osnove kvadratov števila, recimo $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$. Razlika kvadratov je izraz s spremenljivkami, če je vsaj ena osnova spremenljivka, recimo $a^2 - b^2$.

Kvadrat razlike ali vsote je kvadrat dvočlenika števil ali spremenljivk. Tako je kvadrat vsote števil 3 in 5 enak $(3 + 5)^2$, kvadrat vsote števil a in b pa je $(a + b)^2$. Kvadrat dvočlenika zapišemo z vsoto treh členov, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Raziskovalno vprašanje je, ali lahko naravna števila zapišemo z vsoto ali razliko kvadratov drugih dveh naravnih števil. Že zgoraj smo zapisali $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$. To pomeni, da lahko število 16 zapišemo z razliko kvadratov. Število 34 pa z vsoto kvadratov, saj je $5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$. Na vprašanje bomo odgovorili z metodo sistematičnega preizkušanja in posplošitve ugotovitev.

3. Razlika kvadratov

Najprej zapišimo razlike kvadratov zaporednih naravnih števil, ki se razlikujejo za 1 (tabela 1). Vsako izračunano razliko nato še zapišemo s potenco naravnega števila, če se da.

Razlika kvadratov	Vrednost, zapisana s potenco
$2^2 - 1^2 = 3$	/
$3^2 - 2^2 = 5$	/
$4^2 - 3^2 = 7$	/
$5^2 - 4^2 = 9$	3^2
$6^2 - 5^2 = 11$	/
$7^2 - 6^2 = 13$	/
$8^2 - 7^2 = 15$	/
$9^2 - 8^2 = 17$	/

Tabela 1

Razlike kvadratov so števila 3, 5, 7 … .Opazimo, da se z razliko kvadratov dveh zaporednih naravnih števil da zapisati vsako liho naravno število, razen števila 1. Število 1 je prvo naravno število. Ugotovimo, da je vsota osnov kvadratov v razliki enaka lihemu številu, ki je zapisano z razliko kvadratov. Poglejmo lastnost še na dveh primerih.

Število 31 je liho število. Zapišemo ga z vsoto 15 + 16. Preverimo koliko je razlika kvadratov teh seštevancev,

$$16^2 - 15^2 = 256 - 225 = 31.$$

Število 45 lahko zapišemo z vsoto 22 + 23. Ponovno preverimo, koliko je razlika kvadratov seštevancev,

$$23^2 - 22^2 = 529 - 484 = 45.$$

Tudi nekateri popolni kvadrati so liha števila. Število 9 smo zapisali z razliko kvadratov števil 5 in 4. Ugotovimo, da lahko vrednosti nekaterih razlik kvadratov dveh zaporednih naravnih števil, zapišemo s potenco. Tak naslednji primer je število 25, ki je prav tako liho število in popolni kvadrat. Ker je 25 = 12 + 13, je

$5^2 = 25 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25.$

Naslednje liho število, ki je popolni kvadrat, je število 49. Pri tem je 49 = 25 + 24. Tako je

$49 = 7^2$ in $25^2 - 24^2 = 625 - 576 = 49 = 7^2$.

Poglejmo še primer za število 225.

$15^2 = 225$, ker je $225 = 113 + 112$, je $113^2 - 112^2 = 15^2$.

Iz zapisanih primerov vidimo, da smo pravzaprav zapisali pitagorejske trojice števil. Števila 5, 4, 3; 13, 12, 5; 25, 24, 7; 15, 112, 113 so pitagorejske trojice števil.

Ugotovili smo, da vsako liho število lahko zapišemo z razliko kvadratov dveh zaporednih števil. Če je izbrano liho število popolni kvadrat, zapišemo pitagorejsko trojico števil.

Zapišimo še posplošeni zapis razlike kvadratov za dve zaporedni naravni števili, če sta izbrani števili n in n +1. Dobimo $(n+1)^2 - n^2$. Ko poenostavimo ta izraz, dobimo $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$. Izraz $2n + 1$ je posplošen zapis za liha števila v primeru, da je n naravno število ali število 0.

Sedaj zapišimo razlike kvadratov števil, katerih osnovi se razlikujeta za 2 (tabela 2).

Razlika kvadratov	Vrednost, zapisana s potenco
$3^2 - 1^2 = 8$	/
$4^2 - 2^2 = 12$	/
$5^2 - 3^2 = 16$	4^2
$6^2 - 4^2 = 20$	/
$7^2 - 5^2 = 24$	/
$8^2 - 6^2 = 28$	/
$9^2 - 7^2 = 32$	/
$10^2 - 8^2 = 36$	6^2

Tabela 2

Števila 8, 12, 16, 20 … so večkratniki števila 4. Opazimo, da se z razliko kvadratov dveh števil, katerih razlika osnov je 2, da zapisati vsako sodo naravno število, ki je deljivo s 4, razen števila 4. Izračunano število je enako produktu vsote osnov kvadratov s številom 2. Poglejmo nekaj primerov.

Število 28 lahko zapišemo (8 + 6) · $2 = 14 \cdot 2 = 28$

Število 64 lahko zapišemo (17 + 15) · 2 = 32 · 2 = 64

Število 256 lahko zapišemo (65 + 63) · 2 = 128 · 2 = 256

Tudi število 1 000 je deljivo s številom 2. Tako je 1 000 = 2 · 500 = 2 · (251 + 249). Faktor 500 smo zapisali z vsoto dveh naravnih števil, ki se razlikujeta za 2. Potem je $251^2 – 249^2$ = 1 000.

Iz zapisov v preglednici ugotovimo, da so nekatera števila, ki so večkratniki števila 4, popolni kvadrati. Zapisani so s potenco s stopnjo 2. Poglejmo primer za število 36,

$36 = 6^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$. Pri tem je 10 + 8 = 18, 18 · 2 = 36.

Števila 10, 8 in 6 so pitagorejska trojica števil 5, 4, 3 razširjena z 2.

Tudi v primeru števila 64 bi zapisali $64 = 8^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$. Števila 8, 17 in 15 so pitagorejska trojica števil.

Popolni kvadrati sodih števil so soda števila. Vsako sodo število je deljivo s številom 2, vsak kvadrat sodega števila je deljiv s številom 4. Sklepamo, da lahko vsak kvadrat sodega števila zapišemo kot razliko kvadratov naravnih števil, ki se razlikujeta za dva. Poglejmo primera.

Za število 18 je $18^2 = 324 = 162 \cdot 2 = (82 + 80) \cdot 2$ in $82^2 - 80^2 = 6724 - 6400 = 324 = 18^2$.

Za število 76 je $76^2 = 5776 = 2888 \cdot 2 = (1445 + 1443) \cdot 2$ in $1445^2 - 1443^2 = 76^2$.

Ugotovili smo, da vsako naravno število, deljivo s številom 4, lahko zapišemo z razliko kvadratov dveh zaporednih števil pri katerih se osnovi razlikujeta za 2. Če je izbrano število popolni kvadrat, zapišemo pitagorejsko trojico števil.

Zapišimo še posplošeni zapis razlike kvadratov za števili z razliko 2. Izbrani števili sta n in n + 2. Dobimo $(n + 2)^2 - n^2$. Poenostavljen izraz je $(n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$. Ko izpostavimo skupni faktor je $4n + 4 = 4(n + 1)$. Pogoj, da je izbrano naravno število razlika kvadratov je, da je deljivo s številom 4.

V nadaljevanju zapišimo razlike kvadratov števil, katerih osnova se razlikuje za 3 (tabela 3).

Razlika kvadratov	Vrednost, zapisana s potenco
$4^2 - 1^2 = 15$	/
$5^2 - 2^2 = 21$	/
$6^2 - 3^2 = 27$	/
$7^2 - 4^2 = 33$	/
$8^2 - 5^2 = 39$	/
$9^2 - 6^2 = 45$	/
$10^2 - 7^2 = 51$	/
$11^2 - 8^2 = 57$	/

Tabela 3

Števila 15, 21, 27, 33 … so lihi večkratniki števila 3, večji od 9. Opazimo, da se z razliko kvadratov dveh števil, katerih razlika osnov je 3, da zapisati vsak lihi dvomestni ali večmestni večkratnik števila 3. Tako število se da zapisati kot produkt vsote osnov s številom 3. Ponovno poglejmo na nekaj primerih.

Število 51 lahko zapišemo $51 = 17 \cdot 3 = (10 + 7) \cdot 3$, $10^2 - 7^2 = 100 - 49 = 51$.

Število 57 lahko zapišemo $57 = 19 \cdot 3 = (11 + 8) \cdot 3$, $11^2 - 8^2 = 121 - 64 = 57$.

Število 69 lahko zapišemo (13 + 10) · 3 = 23 · 3 = 69, $13^2 - 10^2 = 169 - 100 = 69$.

Število 363 lahko zapišemo (59 + 62) · 3 = 121 · 3 = 363, $62^2 - 59^2 = 3844 - 3481 = 363$.

Predvidevamo, da lahko nekatera števila zapišemo kot potenco. Glede na prejšnje primere je prvo tako število 81.

$81 = 9^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$, ker je 81 = 3 · 27 = 3 · (15 + 12).

Trojica števil 15, 12, 9 je pitagorejska trojica 3, 4, 5 razširjena s 3.

Ugotovili smo, da vsako naravno število, ki je dvo ali večmestni lihi večkratnik števila 3, lahko zapišemo z razliko kvadratov dveh zaporednih števil pri katerih se osnovi razlikujeta za 3. Če je izbrano število popolni kvadrat, zapišemo pitagorejsko trojico števil.

Zapišimo posplošen izraz razlike kvadratov, $(n + 3)^2 - n^2$. Poenostavimo tale izraz $(n + 3)^2 - n^2 = n^2 + 6n + 9 - n^2 = 6n + 9 = 3 \cdot (2n + 3)$.

Pogoj, da število zapišemo z razliko kvadratov, ki se razlikujeta za 3, je deljivost števila s s 3. Po deljenju s 3 je drugi faktor razlike $2n$ + 3 = n + (n + 3). Zapisani izraz utemelji, da je faktor po deljenju vsota dveh naravnih števil, ki se razlikujeta za 3. Člena vsote sta n in n + 3.

Raziskovanje nadaljujemo tako, da zapišemo razlike kvadratov števil, katerih osnova se razlikuje za 4 (tabela 4). Spet začnemo z izbiro najmanjših možnih dveh osnov, to sta števili 1 in 5.

Razlika kvadratov	Razlika, zapisana s potenco
$5^2 - 1^2 = 24$	/
$6^2 - 2^2 = 32$	/
$7^2 - 3^2 = 40$	/
$8^2 - 4^2 = 48$	/
$9^2 - 5^2 = 56$	/
$10^2 - 6^2 = 64$	8^2
$11^2 - 7^2 = 72$	/
$12^2 - 8^2 = 80$	/

Tabela 4

Izračunane razlike kvadratov so števila 24, 32, 40, 48 … . Opazimo, da se z razliko kvadratov dveh števil, katerih razlika osnov je 4, da zapisati vsako sodo naravno število, ki je deljivo s številom 8, razen števil 16 in 8, torej prvih dveh večkratnikov števila 8. Izračunano število je enako produktu vsote osnov s številom 4. Poglejmo nekaj primerov.

Število 56 lahko zapišemo kot 56 = 14 · 4 = (9 + 5) · 4.

Število 80 lahko zapišemo kot 80 = 20 · 4 = (12 + 8) · 4.

Število 96 lahko zapišemo kot 96 = 24 · 4 = (14 + 10) · 4.

Število 288 lahko zapišemo kot 288 = 72 · 4 = (38 + 34) · 4.

Prav tako ugotovimo, da lahko nekatere razlike kvadratov zapišemo s potenco. Poglejmo primera.

Število 64 je večkratnik števila 8 in hkrati kvadrat števila 8. Tako je $64 = 8^2 = 10^2 - 6^2$. Števila 10, 8 in 6 so razširjena pitagorejska trojica števil 5, 4 in 3. Hkrati že vemo, da je 64 večkratnik števila 4 in se da zapisati z razliko kvadratov, kjer se osnovi razlikujeta za 2. Pri tem zapisu dobimo pitagorejsko trojico števil 17, 15 in 8.

Tudi števil 144 je deljivo s številom 8. Je kvadrat števila 12. Tako je $144 = 12^2 = 20^2 - 16^2$.

Števila 20, 16, 12 so s 4 razširjena pitagorejska trojica števil 5, 4 in 3.

Ugotovili smo, da vsako naravno število, ki je deljivo s številom 8, razen števil 8 in 16, lahko zapišemo z razliko kvadratov dveh zaporednih naravnih števil, pri katerih se osnovi razlikujeta za 4. Če je izbrano število popolni kvadrat, zapišemo pitagorejsko trojico števil.

Zapišimo posplošen izraz za razliko kvadratov, kjer se osnovi razlikujeta za 4, $(n+4)^2 - n^2$. Poenostavimo izraz $(n+4)^2 - n^2 = n^2 + 8n + 16 - n^2 = 8n + 16 = 8 \cdot (n+2)$. Če izpostavimo število 4 (ker je tolikšna razlika med osnovama), zapišemo $8n + 16 = 4 \cdot (2n + 4)$.

Pogoj, da število zapišemo z razliko kvadratov naravnih števil, ki se razlikujejo za 4, je deljivost števila s številom 8. Po deljenju z 8 količnik zapišemo v obliki n + 2.

Zapišimo še razlike kvadratov števil, katerih osnova se razlikuje za 5 (tabela 5).

Razlika kvadratov	Razlika, zapisana s potenco
$6^2 - 1^2 = 35$	/
$7^2 - 2^2 = 45$	/
$8^2 - 3^2 = 55$	/
$9^2 - 4^2 = 65$	/
$10^2 - 5^2 = 75$	/
$11^2 - 6^2 = 85$	/
$12^2 - 7^2 = 95$	/
$13^2 - 8^2 = 105$	/

Tabela 5

Števila, ki so razlike kvadratov, so 35, 45, 55, … . Opazimo, da se z razliko kvadratov dveh števil, katerih razlika osnov je 5, da zapisati vsako liho naravno število, ki je deljivo s 5, razen števil 5, 15 in 25, torej prvih treh lihih večkratnikov števila 5. Izračunano število je enako produktu vsote osnov s številom 5. Poglejmo na nekaj primerih.

Število 85 lahko zapišemo kot 85 = 17 · 5 = (11 + 6) · 5.

Število 105 lahko zapišemo kot 105 = 21 · 5 = (13 + 8) · 5.

Število 145 lahko zapišemo kot 145 = 29 · 5 = (17 + 12) · 5, $17^2 - 12^2 = 145$.

Predvidevamo, da lahko nekatere rezultate zapišemo kot potenco, oziroma kvadrat naravnega števila. Poglejmo primer.

Število 225 je liho število, ki je deljivo s številom 5. Vemo, da je število 225 kvadrat števila 15. Tako je 225 = $5 \cdot 45 = 5 \cdot (25 + 20)$ in $25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225$.

Števila 25, 20 in 15 so razširjena pitagorejska trojica števil 5, 4 in 3.

Tudi število 35^2 se da zapisati z razliko kvadratov. Tako je 1225 = 5 · 245 = 5 · (125 + 120). Zato je $125^2 - 120^2 = 1225$. Števila 125, 120 in 35 so razširjena pitagorejska trojica števil 25, 24 in 7.

Ugotovili smo, da vsako naravno število, ki je lihi večkratnik števila 5, razen števil 5, 15 in 25, lahko zapišemo z razliko kvadratov dveh zaporednih naravnih števil, pri katerih se osnovi razlikujeta za 5. Če je izbrano število popolni kvadrat, zapišemo pitagorejsko trojico števil.

Zapišimo posplošen izraz razlike kvadratov, kjer se osnovi razlikujeta za 5, $(n+5)^2 - n^2$. Poenostavimo izraz $(n+5)^2 - n^2 = n^2 + 10n + 25 - n^2 = 10n + 25 = 5 \cdot (2n+5)$.

Pogoja, da se da naravno število zapisati z razliko kvadratov, v katerih se osnovi razlikujeta za 5, je deljivost števila s 5. Po deljenju količnik zapišemo kot $2n + 5$.

V nadaljevanju bomo v preglednico zapisali vse posplošene ugotovitve za opazovane primere (tabela 6). V levi stolpec zapišemo razliko med osnovama, v srednji stolpec pravilo, ki ga za nekatere primere preoblikujemo zaradi enostavnejše primerjave zapisov. Preoblikovane izraze zapišemo v tretji stolpec.

Razlika med osnovama v razliki kvadratov	Pravilo	Preoblikovanje
1	$2n+1$	$1(2n+2)$
2	$4(n+1)$	$2(2n+2)$
3	$3(2n+3)$	$3(2n+3)$
4	$8(n+2)$	$4(2n+4)$
5	$5(2n+5)$	$5(2n+5)$
6	$12(n+3)$	$6(2n+6)$
7	$7(2n+7)$	$7(2n+7)$
8	$16(n+4)$	$8(2n+8)$
9	$9(2n+9)$	$9(2n+9)$
10	$20(n+5)$	$10(2n+10)$

Tabela 6

Z opazovanjem preoblikovanih zapisov vidimo, da je vsako pravilo zapisano s produktom. Na primer za razliko osnov 4 je $4(2n+4)$, za razliko 5 je $5(2n+5)$. Sklepamo, da bi za razliko 6 zapisali $6(2n+6)$.

Preverimo za $n=5$, kjer je $6\cdot(2\cdot5+6)=96$.

Potem je $96=\ 6\cdot16=6\ \cdot(11+5)$, $\quad 11^2-5^2=121-25=96$.

Napišimo posplošen izraz za razliko kvadratov, kadar je razlika med osnovama poljubno število (k).

$$(n+k)^2-n^2=n^2+2kn+k^2-n^2=k^2+2kn=k(2n+k).$$

Produkt $k(2n+k)$ pomeni, da izbrano število najprej delimo s k (k je delitelj števila), ki je hkrati tudi razlika med osnovama. Po deljenju dobimo vsoto $2n+k$. Če od količnika odštejemo k (delitelj) in je razlika sodo število, se izbrano število da zapisati z razliko kvadratov.

Primer.

Število 84 ima delitelje 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84. Zapišemo ga lahko s produktom praštevil, $84=2\cdot2\cdot21=2\cdot2\cdot3\cdot7$.

1. $k=1$ $\quad 84:1=84$, $\quad 84-1=83$ $\quad$ je liho.
2. $k=2$ $\quad 84:2=42$, $\quad 42-2=40$ $\quad$ je sodo.
   Število 84 se da zapisati z razliko kvadratov, pri katerih se osnovi razlikujeta za 2. Pri tem je $n=40:2=20$ in drugo število 22, $22^2-20^2=84$.
3. $k=3$ $\quad 84:3=28$, $\quad 28-3=25$ $\quad$ ni sodo.
4. $k=4$ $\quad 84:4=21$, $\quad 21-4=17$ $\quad$ ni sodo.
5. $k=6$ $\quad 84:6=14$, $\quad 14-6=8$ $\quad$ je sodo.
   Število 84 se da zapisati z razliko kvadratov, pri katerih se osnovi razlikujeta za 6. Pri tem je $n=8:2=4$ in drugo število je $4+6=10$. Tako je $10^2-4^2=100-16=84$.
6. $k=7$ $\quad 84:7=12$, $\quad 12-7=5$ $\quad$ ni sodo.
7. $k=12$ $\quad 84:12=7$, $\quad 7-12=-5$ $\quad$ ni naravno.

8. $k = 14$ $84 : 14 = 6,$ $6 - 14 = -8$ ni naravno.

9. $k = 21$ $84 : 21 = 4,$ $4 - 21 = -17$ ni naravno.

10. $k = 28$ $84 : 28 = 3,$ $3 - 28 = -25$ ni naravno.

11. $k = 42$ $84 : 42 = 2,$ $2 - 42 = -40$ ni naravno.

12. $k = 84$ $84 : 84 = 1,$ $1 - 84 = -83$ ni naravno.

Število 84 smo zapisali z razliko kvadratov na dva načina.

Poglejmo še primer števila 10, ki ima štiri delitelje, to so števila 1, 2, 5 in 10.

1. $k = 1$ $10 : 1 = 10,$ $10 - 1 = 9$ je liho.
2. $k = 2$ $10 : 2 = 5,$ $5 - 2 = 3$ je liho.
3. $k = 5$ $10 : 5 = 2,$ $2 - 5 = -3$ ni naravno.
4. $k = 10$ $10 : 10 = 1,$ $1 - 10 = -9$ ni naravno.

Število 10 se ne da zapisati z razliko kvadratov.

4. Vsota kvadratov

V nadaljevanju zapišimo zaporedoma vsote kvadratov naravnih števil, kjer se osnove razlikujejo za 1 (tabela 7).

Vsota kvadratov	Vrednost napisana z potenco
$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$	/
$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$	/
$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$	5^2
$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$	/
$5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$	/
$6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$	/
$7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$	/
$8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$	/
$9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181$	/
$10^2 + 11^2 = 100 + 121 = 221$	/

Tabela 7

Števila 5, 13, 25, 41, 61 … so vsote kvadratov zaporednih naravnih števil. So liha števila. Razlika med zaporednima številoma je večkratnik števila 4. Tako je razlika med 5 in 13 število 8. Razlika med 13 in 25 je število 12. Naslednja razlika je 16, nato 20. Razlike naraščajo.

Zapišimo posplošen izraz za vsoto kvadratov dveh zaporednih naravnih števil.

$(n+1)^2 + n^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n+1) + 1.$

Zapis $2n(n+1)+1$ nam pove obliko, ki jo ima neko število, ki je vsota kvadratov zaporednih naravnih števil. Če od tega števila odštejemo število 1, dobimo sodo število $2n(n+1)$. Po deljenju s številom 2 dobimo produkt zaporednih dveh števil $n(n+1)$.

Poglejmo primer za število 145.

Zapišemo razliko 145 – 1 = 144. Dobimo sodo število.

Število 144 delimo s številom 2, dobimo število 72.

Število 72 je produkt zaporednih naravnih števil 8 in 9. Kar pomeni, da lahko število 145 zapišemo z vsoto kvadratov zaporednih naravnih števil,

$145 = 144 + 1 = 2 \cdot 72 + 1 = 2 \cdot (8 \cdot 9) + 1, \quad 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145.$

Poglejmo še primer števila 60.

Zapišemo razliko 60 – 1 = 59. Dobimo liho število. Ker smo izbrali sodo število, zapis z vsoto kvadratov zaporednih naravnih števil ni možen.

Ugotovimo, da lahko z vsoto kvadratov zaporednih dveh naravnih števil zapišemo le nekatera liha naravna števila. Oblika zapisa teh naravnih števil je $\mathbf{2n(n+1)+1}$.

Zapišimo še vsoto kvadratov dveh naravnih števil, ki se razlikujeta za k. Tako je $(n+k)^2 + n^2 = n^2 + n^2 + 2nk + k^2 = 2n^2 + 2nk + k^2 = 2n(n+k) + k^2$.

Zapis pomeni, če od izbranega števila odštejemo kvadrat želene razlike med osnovama k^2, dobimo sodo število $2n(n+k)$. Po deljenju te razlike s številom 2 dobimo produkt števila n in za k večjega števila $n + k$.

Poglejmo na primeru števila 89. Zanima nas ali se da zapisati z vsoto kvadratov naravnih števil.

1. k = 1, 85 – 1 = 84, 84 : 2 = 42. Ker je 6 · 7 = 42, je $6^2 + 7^2$ = 36 + 49 = 85.

2. k = 2, 85 – 2 = 83, ni sodo število.

3. k = 3, 85 – 3 = 82, 82 : 2 = 41. Ker je praštevilo, se 85 ne da zapisati z vsoto kvadratov števil, ki se razlikujeta za 3.

4. k = 4, 85 – 4 = 81, ni sodo število.

5. k = 5, 85 – 5 = 80, 80 : 2 = 40. Ker 40 ni produkt dveh števil, ki se razlikujeta za 5, se število 85 ne da zapisati z vsoto kvadratov takih dveh števil.

Preverjanje bi lahko nadaljevali. Za razliko k bi izbirali bi samo liha števila, saj je razlika dveh lihih števil sodo število.

5. Razlika kubov

V nadaljevanju zapišimo zaporedoma razliko kubov naravnih števil, kjer se osnove razlikujejo za 1 (tabela 8).

Razlika kubov	Vrednost zapisana s potenco
$2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7$	/
$3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$	/
$4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$	/
$5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$	/
$6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$	/
$7^3 - 6^3 = 343 - 216 = 127$	/
$8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169$	13^2
$9^3 - 8^3 = 729 - 512 = 217$	/
$10^3 - 9^3 = 1000 - 729 = 271$	/
$11^3 - 10^3 = 1331 - 1000 = 331$	/

Tabela 8

Števila 7, 19, 37, 61, 91… so razlike kubov zaporednih naravnih števil. So liha števila. Razlika med zaporednima številoma je večkratnik števila 6. Tako je razlika med 19 in 7 število 12. Razlika med 37 in 19 je število 18. Razlika med 61 in 37 pa 24. Naslednja razlika je 30, potem 36... .

Zapišimo posplošen izraz za razliko kubov dveh zaporednih naravnih števil.

$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n+1) + 1.$

Zapis $3n(n+1)+1$ nam pove obliko, ki jo ima neko število, ki je razlika kubov zaporednih naravnih števil. Če od tega števila odštejemo število 1, dobimo sodo število $3n(n+1)$, saj je produkt dveh zaporednih naravnih števil $n(n+1)$ vedno sodo število. Po deljenju s številom 3 dobimo produkt zaporednih dveh števil $n(n+1)$.

Poglejmo primer za število 271.

Najprej zapišemo razliko $271 - 1 = 270$. Dobimo sodo število, ki je deljivo s 3, saj je $2 + 7 + 0 = 9$ in število 9 je deljivo s številom 3. Količnik števila 270 in števila 3 je število 90.

Število 90 je produkt zaporednih števil 9 in 10. Kar pomeni, da lahko število 271 zapišemo z razliko kubov zaporednih naravnih števil, ki se razlikujeta za 1.

$271 = 270 + 1 = 3 \cdot 90 + 1 = 2 \cdot (9 \cdot 10) + 1, \qquad 10^3 - 9^3 = 1000 + 729 = 271.$

Poglejmo še primer števila 113.

Zapišemo razliko $113 - 1 = 112$. Dobimo sodo število, zato nadaljujemo postopek. Ker število 112 ni deljivo s 3 ($1 + 1 + 2 = 4$, 4 ni deljivo s številom 3), zapis z razliko kubov zaporednih naravnih števil ni možen.

Ugotovimo, da lahko z razliko kubov zaporednih dveh naravnih števil zapišemo le nekatera liha naravna števila. Oblika zapisa teh naravnih števil je $\boldsymbol{3n(n+1)+1}$.

Zapišimo za konec še razliko kubov dveh naravnih števil, ki se razlikujeta za k. Tako je $(n+k)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2k + 3k^2n + k^3 - n^3 = 3n^2k + 3k^2n + k^3 = 3nk(n+k) + k^3$.

Zapis pomeni, če od izbranega števila odštejemo kub želene razlike med osnovama k^3, dobimo število $3nk(n+k)$. Po deljenju te razlike s številom 3 dobimo produkt števila nk in vsote $n+k$.

Poglejmo na primeru števila 85. Zanima nas ali se da zapisati z razliko kubov dveh naravnih števil.

1. k = 1, $85 - 1^3 = 85 - 1 = 84$, število 84 je deljivo s številom 3. Količnik je 28. Ker je k = 1, bi morali število 28 zapisati s produktom $n(n+1)$, kar ne gre.

2. k = 2, $85 - 2^3 = 85 - 8 = 7$. Ker 77 ni deljivo s 3, števila 85 ni mogoče zapisati z razliko kubov, kjer se osnovi razlikujeta za 2.

Preverjanje bi lahko nadaljevali, vendar je postopek zamuden. Če v izrazu $3n^2k + 3k^2n + k^3 = k(3n^2 + 3kn + k^2)$ izpostavimo želeno razliko med osnovama kubov, vidimo da mora biti število deljivo s pričakovano razliko k. Delitelji števila 85 so 1, 5, 17, 85. Torej bi lahko morda število zapisali z razliko med osnovama k = 5 ali k = 17, za število 1 smo že preverili.

3. k = 5, $85 - 5^3 = 85 - 125 = -40$, kar ni naravno število. Kar pomeni, da tudi za k = 17 ne dobimo razlike kubov.

6. Vsota kubov

V nadaljevanju zapišimo zaporedoma vsote kubov naravnih števil, kjer se osnove razlikujejo za 1 (tabela 9).

Vsota kvadratov	Vrednost napisana z potenco
$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$	3^2
$2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$	/
$3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91$	/
$4^3 + 5^3 = 64 + 125 = 189$	/
$5^3 + 6^3 = 125 + 216 = 341$	/
$6^3 + 7^3 = 216 + 343 = 559$	/
$7^3 + 8^3 = 343 + 512 = 855$	/
$8^3 + 9^3 = 512 + 729 = 1241$	/
$9^3 + 10^3 = 729 + 1000 = 1729$	/
$10^3 + 11^3 = 1000 + 1331 = 2331$	/

Tabela 9

Števila 9, 35, 91, 189, 343 … so vsote kubov zaporednih naravnih števil. So liha števila. Razlika med zaporednima številoma je večkratnik števila 2. Tako je razlika med 9 in 35 število 26. Razlika med 35 in 91 je število 56. Naslednja razlika je 98, nato 152. Razlike naraščajo.

Zapišimo posplošen izraz za vsoto kubov dveh zaporednih naravnih števil.

$(n+1)^3 + n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 = 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n(2n^2 + 3n + 3) + 1.$

Zapis $n(2n^2 + 3n + 3) + 1$ nam pove obliko, ki jo ima neko število, ki je vsota kubov zaporednih naravnih števil. Če od tega števila odštejemo število 1, dobimo število $n(2n^2 + 3n + 3)$.

Poglejmo primer za $n = 3$,

$3 \cdot (2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 3) + 1 = 3 \cdot (18 + 9 + 3) + 1 = 3 \cdot 30 + 1 = 91.$

Iz tabele 9 je razvidno, da tale enačba drži.

Zapišimo še posplošen izraz za vsoto kubov s poljubno razliko med osnovama.

$(n+k)^3 + n^3 = n^3 + 3kn^2 + 3k^2n + k^3 + n^3 = 2n^3 + 3kn^2 + 3k^2n + k^3 = n(2n^2 + 3kn + 3k^2) + k^3.$

Ugotovimo, da lahko z vsoto kubov dveh naravnih števil zapišemo le nekatera naravna števila. Oblika zapisa teh naravnih števil je $\boldsymbol{n(2n^2 + 3kn + 3k^2) + k^3}$.

Zapis naravnega števila nam ne daje veliko možnosti za spretno ugotavljanje ali je izbrano število vsota kubov dveh naravnih števil, kjer se osnovi razlikujeta za $\boldsymbol{k}$.

7. Ugotovitve

V raziskovalni nalogi smo ugotovili na kakšen način ugotovimo ali se da naravno število zapisati z razliko kvadratov naravnih števil.

Če se naravno število da zapisati z razliko kvadratov, kjer se osnovi razlikujeta za k, ima število obliko zapisa $k(2n+k)$.

Če se naravno število da zapisati z vsoto kvadratov, kjer se osnovi razlikujeta za k, ima število obliko zapisa $2n(n+k)+k^2$.

Prav tako smo v raziskovalni nalogi ugotovili, kako naravno število zapišemo z razliko ali vsoto kubov naravnih števil, kjer se osnovi razlikujeta za k.

Če se naravno število da zapisati z razliko kubov, kjer se osnovi razlikujeta za k, ima število obliko zapisa $3nk(n+k)+k^2$.

Če se naravno število da zapisati z vsoto kubov, kjer se osnovi razlikujeta za k, ima število obliko zapisa $n(2n^2+3kn+3k^2)+k^3$.

8. Družbena odgovornost

V raziskovalni nalogi sva razširila svoje znanje o lastnostih naravnih števil. Pri raziskovanju sva uporabljala znanja, pridobljena v šoli pri pouku in z brskanjem po spletu. Pridobila sva tudi nova znanja in spretnosti, ki jih bova lahko uporabila v novih situacijah ali z njimi pomagala sošolcem in sošolkam. Raziskovalna naloga nama je omogočila razširiti in poglobiti matematična znanja, pridobljena pri pouku. S pisanjem raziskovalne naloge pa sva pridobila izkušnjo izražanja v bolj matematičnem jeziku.

9. Viri

[1] Matematika za radovedneže 9, učbenik za deveti razred, Jožica Smogavec in Cvetka Govejšek, založba ICO d.o.o. , 2012.

[2] E-učbenik Vega 1, http://eucbeniki.sio.si/vega1/15/index1.html

(Citirano 21. 1. 2019)

[3] Delovno gradivo Zavoda za šolstvo, predmetna skupina za matematiko, 2018