Mladi za napredek Maribora 2019

36. srečanje

Kvadrat in trikotniki

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: IZIDOR GOLČAR, FILIP DUGONIK

Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ
Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR
Število točk: 150/ 170
Mesto: 2
Priznanje: srebrno

Februar 2019

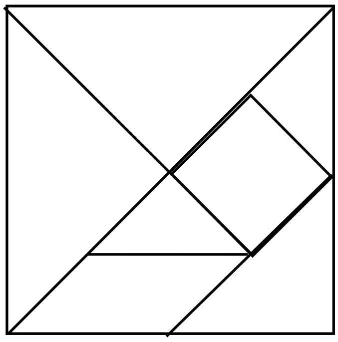
Kazalo

1. Povzetek

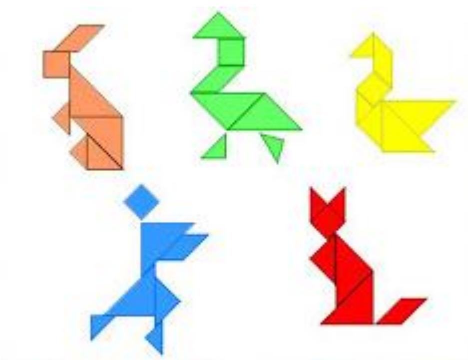
V kvadratu izberemo točko. Povežimo izbrano točko z daljicami s točkami na stranicah ali ogliščih kvadrata. Kvadrat tako razdelimo (razrežemo) na ploščinsko manjše trikotnike, štirikotnike… . V raziskovalni nalogi raziskujemo, kako z eno izbrano točko v kvadratu razdelimo kvadrat na same trikotnike. Ugotovimo, da lahko kvadrat na tak način razdelimo na same pravokotne trikotnike, na same topokotne ali ostrokotne pa ne. V raziskavi natančno opredelimo vrsto trikotnika glede na lego vrha. V nadaljevanju raziščemo možnost, ko kvadrat razdelimo na same ostrokotne trikotnike. Raziščemo tudi, če lahko razdelimo enakokraki pravokotni trikotnik na same ostrokotne trikotnike.

2. Uvod

V kvadratu lahko izberemo poljubno točko. Če je izbrana točka krajišče daljic, ki imajo drugo krajišče na stranicah ali v ogliščih kvadrata, lahko na tak način dobimo razrez kvadrata na različne like. Tako trikotnike ali druge večkotnike. Primer razreza kvadrata je tangram. Tangram je igra sestavljanja likov (slika 2), iz delov razstavljenega kvadrata na naslednji način (slika 1).



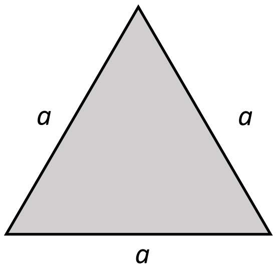
Slika 1: kvadrat sestavljen iz likov tangrama



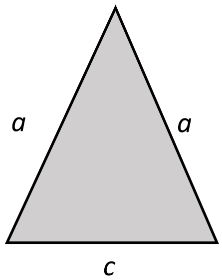
Slika 2: sestavljanje oblik iz likov

Namen raziskave je spoznati, na katere načine lahko razdelimo kvadrat na same trikotnike, in kakšne so značilnosti nastalih trikotnikov. Kam lahko pri dani daljici *AB*, ki je hkrati stranica kvadrata, postavimo tretjo točko, da nastane določena (izbrana) vrsta trikotnika. Spomnimo se, kako razdelimo trikotnike glede na dolžine stranic in velikost notranjih kotov.

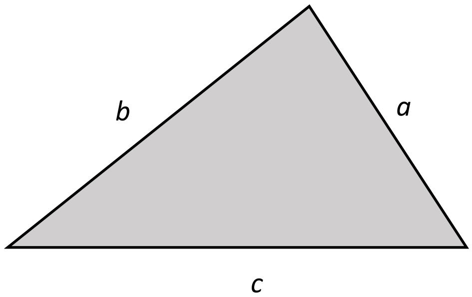
Najprej predstavimo kako razdelimo trikotnike glede na dolžine stranic in velikost notranjih kotov. Vrste trikotnikov glede dolžine stranic: enakostranični (slika 3), enakokraki (slika 4), raznostranični (slika 5).



Slika 3: enakostranični trikotnik

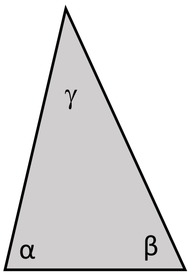


Slika 4: enakokraki trikotnik

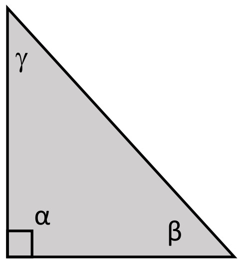


Slika 5: raznostranični trikotnik

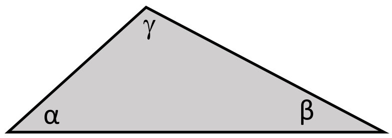
Vrste trikotnikov glede na velikost notranjih kotov:



Slika 6: ostrokotni trikotnik



Slika 7: pravokotni trikotnik



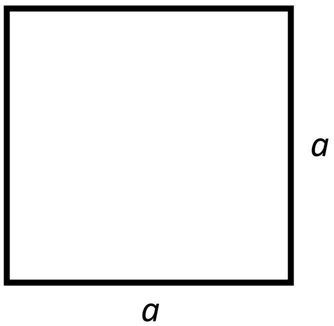
Slika 8: topokotni trikotnik

V ostrokotnem trikotniku so velikosti notranjih kotov manjše od pravega kota (slika 6).

V pravokotnem trikotniku je velikost enega notranjega kota enaka pravemu kotu (slika 7).

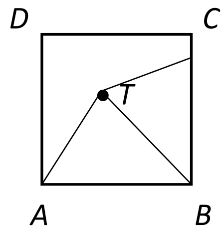
V topokotnem trikotniku je je velikost enega notranjega kota večja od pravega kota (slika 8).

Ker raziskujemo trikotnike v kvadratu, opišemo še kvadrat (slika 7). Je štirikotnik s skladnimi stranicami in pravimi koti.



Slika 7: kvadrat

Če v kvadratu izberemo točko *T*, lahko z izbiro daljic, ki imajo eno krajišče v točki *T*, kvadrat razdelimo na različne večkotnike (slika 8). V prikazanem primeru sta to dva trikotnika in udrti petkotnik (slika 8).

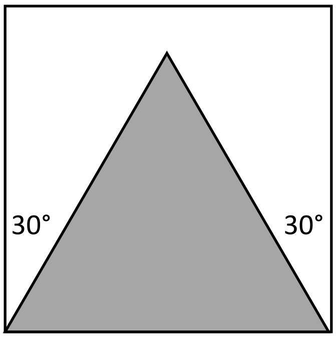


Slika 8: primer razdelitve kvadrata z poljubno izbrano točko

3. Enakostraničen trikotnik v kvadratu

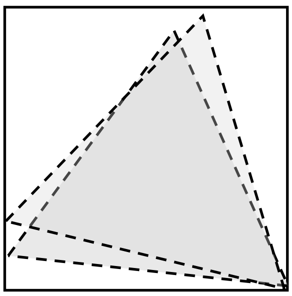
V vsak kvadrat lahko načrtamo enakostranični trikotnik. Kakšna je lega največjega možnega enakostraničnega trikotnika (trikotnika z najdaljšo možno stranico) v kvadratu?

Za stranico enakostraničnega trikotnika izberemo stranico kvadrata (slika 9). Dve oglišči trikotnika sta hkrati oglišči kvadrata.

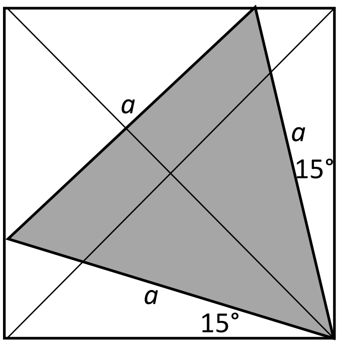


Slika 9: enakostranični trikotnik v kvadratu

Trikotnik začnemo sukati okoli enega izmed oglišč na stranici kvadrata (slika 10). Hkrati s sukanjem daljšamo stranice trikotnika. Postopek izvajamo tako dolgo, dokler preostali oglišči trikotnika ne ležita na stranicah kvadrata. Eno oglišče trikotnika sovpada z ogliščem kvadrata.


Slika 10: premikanje trikotnika v kvadratu

Enakostranični trikotnik je največji, ko je ena stranica vzporedna z diagonalo kvadrata in višina trikotnika na to stranico leži na drugi diagonali kvadrata (slika 11).

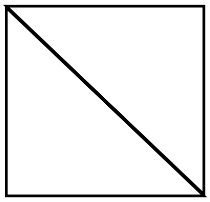


Slika 11: Največji enakostranični trikotnik v kvadratu.

Ko v kvadrat včrtamo največji možni enakostranični trikotnik, razdelimo kvadrat na štiri trikotnike: enakostranični s stranico *a*, enakokraki pravokotni s hipotenuzo *a* in dva skladna pravokotna raznostranična trikotnika prav tako s hipotenuzo *a* (slika 11).

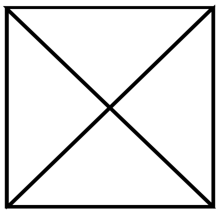
3.1 Skladni pravokotni trikotniki v kvadratu

Kvadrat lahko razdelimo na najmanj dva pravokotna skladna trikotnika. To naredimo tako, da včrtamo eno izmed diagonal kvadrata (slika 12).



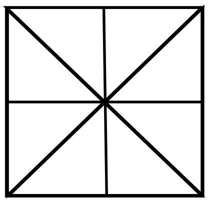
Slika 12: razdelitev kvadrata na 2 trikotnika

Če načrtamo še drugo diagonalo kvadrata, razdelimo kvadrat na štiri skladne enakokrake pravokotne trikotnike. Vrh vsakega izmed trikotnikov je v presečišču diagonal, ki je središče kvadratu očrtane krožnice. Dobimo štiri skladne pravokotne trikotnike s skupnim ogliščem v presečišču diagonal (slika 13).



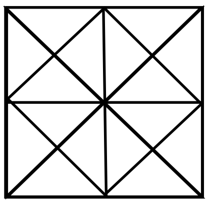
Slika 13: razdelitev kvadrata na 4 trikotnike

Z načrtovanjem dveh srednjic kvadrata razdelimo kvadrat na 8 skladnih enakokrakih pravokotnih trikotnikov (slika 14).



Slika 14: razdelitev kvadrata na 8 trikotnikov

Kvadratu načrtamo naslednje štiri diagonale manjših kvadratov. Kvadrat razdelimo na 16 skladnih enakokrakih pravokotnih trikotnikov (slika 15).



Slika 15: razdelitev kvadrata na 16 trikotnikov

Kvadrat lahko še dalje delimo na skladne enakokrake pravokotne trikotnike po opisanem postopku. S postopkom deljenja kvadrata na skladne pravokotne trikotnike lahko z dodajanjem diagonal in srednjic dobimo naraščajoče število skladnih pravokotnih trikotnikov. Ta postopek lahko ponavljamo v nedogled.

Zapišimo število trikotnikov v preglednico (tabela 1). V levem stolpcu je zapisano število včrtanih daljic v kvadrat (diagonal ali srednjic). Če včrtamo eno diagonalo, razdelimo kvadrat na dva skladna pravokotna trikotnika, kar je zapisano v desnem stolpcu. Opazimo da lahko število vrisanih daljic, kakor število skladnih trikotnikov zapišemo s potenco z osnovo 2. Število najmanjših skladnih pravokotnih trikotnikov v kvadratu dobimo tako, da stopnji potence vrisanih daljic prištejemo ena.

Tabela 1: Število skladnih pravokotnih trikotnikov v kvadratu glede na število vrisanih daljic

Število vrisanih daljic	Število skladnih pravokotnih trikotnikov
2^0	2^1
2^1	2^2
2^2	2^3
2^3	2^4
$\mathbf{2^n}$	$\mathbf{2^{n+1}}$

Z včrtanjem 2^n daljic razdelimo kvadrat na 2^{n+1} skladnih enakokrakih pravokotnih trikotnikov. Zaporedje števil v desnem stolpcu je 2, 4, 8, 16, 32, 64, … . Vsako naslednje skupno število trikotnikov lahko izračunamo s formulo $2k$, kjer je k predhodno skupno število skladnih pravokotnih trikotnikov.

Skupno število vseh pravokotnih trikotnikov je vsota vseh možnih enakokrakih pravokotnih trikotnikov.

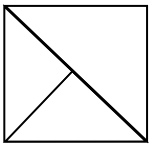
Za eno včrtano daljico dobimo 2 trikotnika.

Za dve včrtani daljici dobimo 2 + 4 = 6 trikotnikov.

Za štiri včrtane daljice dobimo 2 + 4 + 8 = 14 trikotnikov.

Za $\mathbf{2^n}$ včrtanih daljic je skupna vsota $2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1}$ trikotnikov.

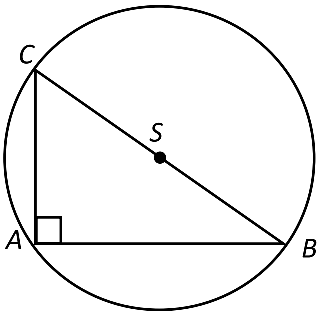
Seveda lahko kvadrat razdelimo tudi na različne pravokotne trikotnike. Takih razdelitev na poljubne načine je poljubno mnogo (slika 16).



Slika 16: delitev kvadrata na poljubne trikotnike

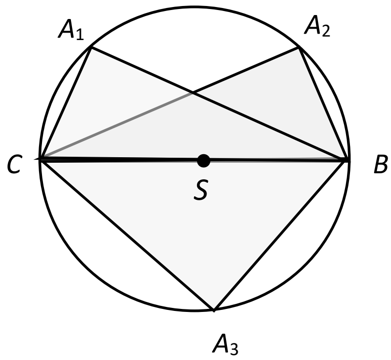
3.2 Pravokotni trikotniki v kvadratu

V nadaljevanju premislimo, kje lahko leži točka v kvadratu, da bi trikotnik, ki ima dve oglišči kvadrata za svoji oglišči, bil z izbrano točko za tretje oglišče pravokotni trikotnik. Za raziskavo tega problema se spomnimo, da je središče očrtane krožnice za vsak pravokotni trikotnik razpolovišče hipotenuze (slika 17).



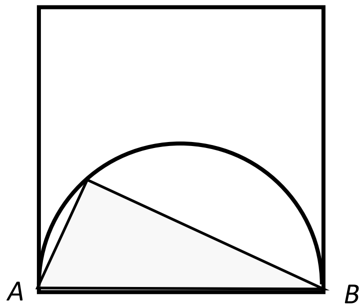
Slika 17: trikotniku očrtana krožnica

Oglišče pravokotnega trikotnika (točka *A*) bi lahko bilo kjerkoli na krožnici. Ugotovimo, da s tem ko načrtamo krožnico, ki poteka skozi krajišči daljice *BC*, lahko načrtamo poljubno mnogo pravokotnih trikotnikov. Tretje oglišče je na krožnici (slika 18).



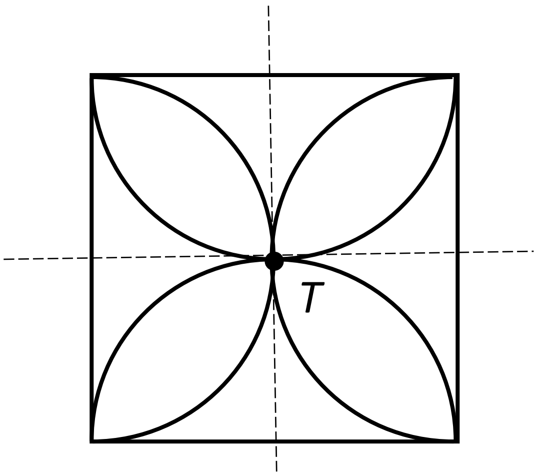
Slika 18: pravokotni trikotniki nad daljico

Narišimo nad stranico kvadrata polkrog (slika 19). Vsaka točka na polkrožnici je lahko vrh pravega kota pravokotnega trikotnika.



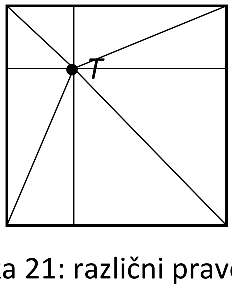
Slika 19: točka na polkrožnici

Tako polkrožnico lahko narišemo nad vsako stranico kvadrata. Točka *T* leži na presečišču štirih polkrožnic in je vrh pravega kota štirih skladnih pravokotnih trikotnikov (slika 20). To je edini način razdelitve kvadrata na pravokotne trikotnike z eno točko, pri kateri dobimo štiri skladne pravokotne trikotnike.



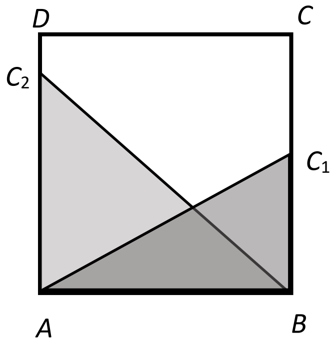
Slika 20: točka *T* je presečišče polkrožnic

Kjerkoli drugje v kvadratu (izven presečišča štirih polkrožnic) izberemo točko *T*, kvadrata ne moremo razdeliti na pravokotne trikotnike, ki bi imeli oglišča hkrati v ogliščih kvadrata. Vsaka druga izbira točke *T* v kvadratu sicer omogoča razdelitev kvadrata na pravokotne trikotnike, vendar je njihovo število večje od 4 (slika 21). V prikazanem primeru je teh trikotnikov osem.



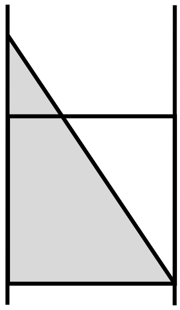
Slika 21: različni pravokotni trikotniki v kvadratu

Ugotovili smo, da je trikotnik pravokoten, če leži oglišče na polkrožnici, ki ima za premer stranico kvadrata. Trikotniki, ki imajo dve oglišči enaki ogliščema kvadrata, njihovo tretje oglišče pa leži na eni izmed sosednjih stranic, so prav tako pravokotni trikotniki (slika 22).



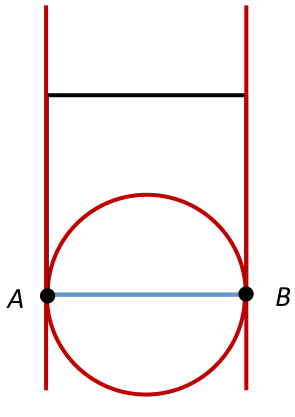
Slika 22: pravokotni trikotniki s tretjim ogliščem na stranici

Da je trikotnik *ABC* pravokoten, mora biti točka C_1 ali C_2 kjerkoli na stranici *DA* (vključno z ogliščem *D*) ali kjerkoli na stranici *BC* (vključno z ogliščem *C*). Če točki C_1 in C_2 sovpadata z ogliščema *C* in *D*, dobimo razdelitev kvadrata na štiri skladne enakokrake pravokotne trikotnike. Če oglišči C_1 in C_2 ležita na stranici (kot je na sliki 22) ali na nosilkah stranic *AD* in *BC*, kvadrat ni v celoti razdeljen na pravokotne trikotnike, oziroma trikotniki ne ležijo v celoti na kvadratu (slika 23).



Slika 23: delno pokritje kvadrata

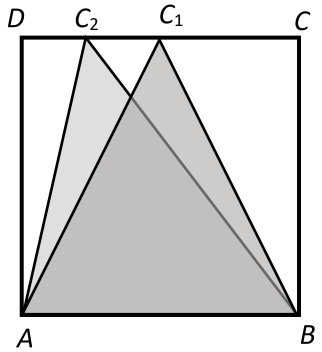
Trikotnik, ki ima za eno stranico stranico kvadrata, je pravokoten, če je tretje oglišče vrh na krožnici s središčem na razpolovišču hipotenuze trikotnika, ali na sosednji stranici kvadrata oziroma njeni nosilki (slika 24).



Slika 24: z rdečo označena možna lega oglišča *C* za pravokotni trikotnik

3.3 Ostrokotni trikotniki v kvadratu

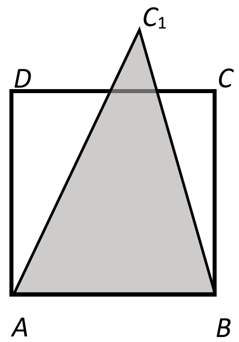
V nadaljevanju poiščimo kakšen ostrokotni trikotnik v kvadratu. Naj bo stranica kvadrata hkrati stranica trikotnika. Če tretje oglišče trikotnika leži na nasprotni stranici (slika 25), je trikotnik ostrokoten. Seveda tretje oglišče ne sme sovpadati z ogliščema *C* in *D* kvadrata.



Slika 25: Ostrokotni trikotniki v kvadratu

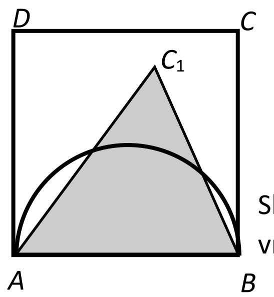
Da je trikotnik *ABC* (slika 25) ostrokoten, mora biti toča *C* kjerkoli na nasprotni stranici razen na ogliščih *C* ali *D*. Če kvadratu včrtamo tak trikotnik, razdelimo kvadrat na tri trikotnike, pri tem sta dva pravokotna.

Če za tretje oglišče izberemo točko nad stranico *DC*, torej izven kvadrata, je trikotnik ostrokoten, kvadrat pa je razdeljen na dva pravokotna trikotnika in štirikotnik (slika 26). Tretje postavljeno oglišče ne sme ležati na nosilkah stranic *AD* ali *BC.*



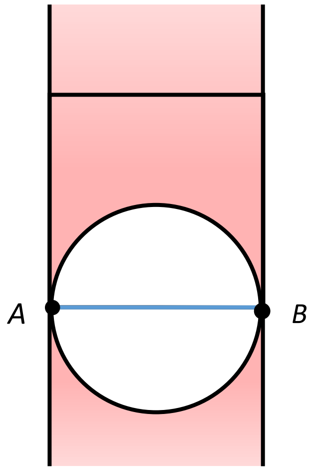
Slika 26: ostrokoten trikotnik z vrhom izven kvadrata

Tretjo točko lahko izberemo tudi v notranjosti trikotnika. Kje pa jo lahko izberemo? Zagotovo ne na krožnici, ki ima za premer stranico kvadrata. Vemo, da izbira točke na krožnici pomeni pravokotni trikotnik. Zato izberemo tretjo točko nad krožnico, vendar v kvadratu (slika 27).



Slika 27: ostrokoten trikotnik z vrhom v kvadratu

Tretje oglišče trikotnika, če je ena stranica hkrati stranica kvadrata in je trikotnik ostrokoten, je med nosilkama stranic kvadrata, izven kroga, ki ima za premer stranico kvadrata (slika 28).

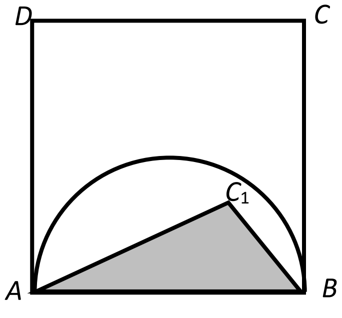


Slika 28: lega oglišča *C* za ostrokotni trikotnik

Preostane še možnost, da je trikotnik v kvadratu topokoten. Iz prejšnjih ugotovitev lahko razberemo, da je v kvadratu med stranico kvadrata in pol krožnico nad njo ostalo še eno nezapolnjeno območje. Poglejmo kakšen je trikotnik s stranico *AB* in točko *C* v tem območju.

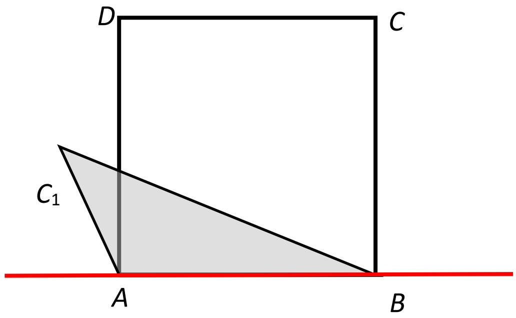
3.4 Topokotni trikotniki v kvadratu

Spoznali smo že, kako izbrati točko v kvadratu, da včrtamo pravokotni ali ostrokotni trikotnik. Poglejmo še lego izbrane točke za včrtanje topokotnega trikotnika. Da bo trikotnik v celoti v kvadratu, mora biti ta točka pod krožnico s središčem na razpolovišču stranice kvadrata (slika 29).



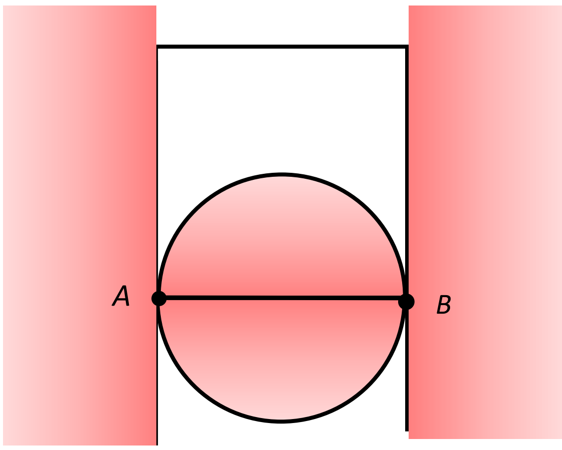
Slika 29: topokoten trikotnik v kvadratu

Trikotnik bo topokoten tudi, če postavimo tretjo točko trikotnika (oglišče) na zunanjo stran premic nosilk stranic kvadrata, ki so pravokotne na izbrano stranico kvadrata. Ta točka na sme ležati na nosilki te daljice (slika 30).



Slika 30: topokoten trikotnik delno v kvadratu

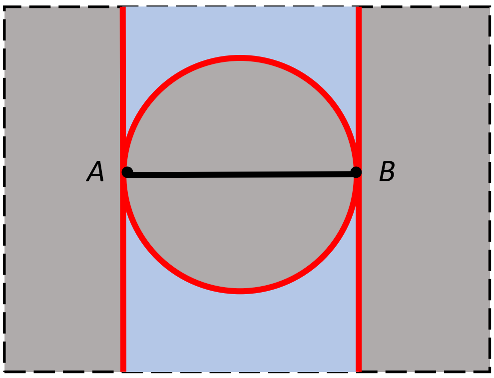
Trikotnik s stranico kvadrata je topokoten, če tretje oglišče leži v notranjosti kroga, ki ima stranico kvadrata za premer ali zunaj pasu, ki ga določata nosilki stranic kvadrata, pravokotni na stranico trikotnika (slika 31).



Slika 31: lega oglišča *C* za topokotni trikotnik

3.5 Trikotnik nad dano daljico

Strnimo naše ugotovitve in razmisleke. Kako nad dano daljico *AB* leži točka *C* (tretje oglišče trikotnika), da nastane trikotnik, ki je pravokoten, ostrokoten ali topokoten. Da natančno določimo lego točke *C*, načrtamo nad daljico krog, ki ima daljico za premer. V krajiščih daljice načrtamo pravokotnici (slika 32).



Slika 32: lege oglišča trikotnika

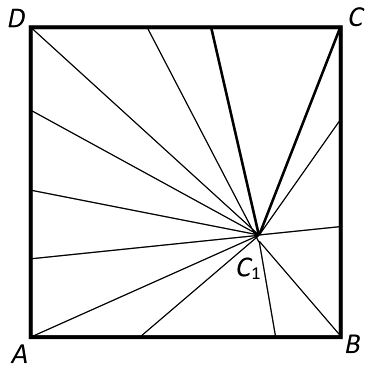
Če leži toča *C* na krožnici ali pravokotnicah skozi krajišči daljice *AB (nosilkah)*, bo trikotnik *ABC* pravokoten.

Če leži toča *C* v notranjosti kroga ali izven pasu, ki ga določata pravokotnici skozi krajišči daljice *AB* (nosilki), bo trikotnik *ABC* topokoten.

Če leži točka *C* zunaj kroga, vendar v notranjosti pasu, ki ga določata pravokotnici skozi krajišči daljice *AB* (nosilki), bo trikotnik *ABC* ostrokoten.

4. Razdelitev kvadrata na ostrokotne trikotnike

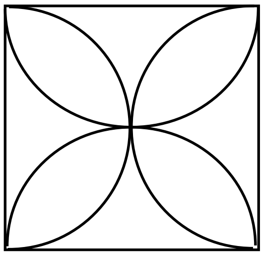
Vemo že, da lahko kvadrat razdelimo (razrežemo) na same pravokotne trikotnike. Najmanjše število pravokotnih trikotnikov sta dva enakokraka pravokotna trikotnika. Ali lahko kvadrat razdelimo na same ostrokotne trikotnike? V notranjosti trikotnika izberimo poljubno točko, ki naj bo tretje oglišče trikotnika. Ostali dve oglišči vsakega trikotnika naj ležita v ogliščih kvadrata ali na stranicah kvadrata (slika 33). S poskušanjem ugotovimo, da ne glede na število načrtanih trikotnikov vedno nastane še kakšen tak, ki ni ostrokoten.



Slika 33: razrez kvadrata na trikotnike

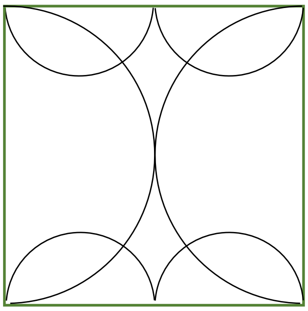
Z načrtanjem prvega ostrokotnega trikotnika je sokot notranjega ostrega kota topi kot. Ta topi kot je hkrati notranji kot naslednjega trikotnika. Zato je ta trikotnik topokotni. Z izbiro ene točke v kvadratu ne moremo razdeliti kvadrata na same ostrokotne trikotnike.

V nadaljevanju uporabimo lastnosti nastanka ostrokotnega trikotnika in nad danimi daljicami, v našem primeru stranicami kvadrata načrtamo polkrog. Tretja točka vseh štirih stranic kvadrata bi morala ležati nad polkrogi, da bi bili vsi štirje trikotniki ostrokotni. Toda te točke ni možno narisati, saj nam nad štirimi polkrogi ne ostane nič prostora (slika 34).



Slika 34: loki nad stranicami kvadrata I

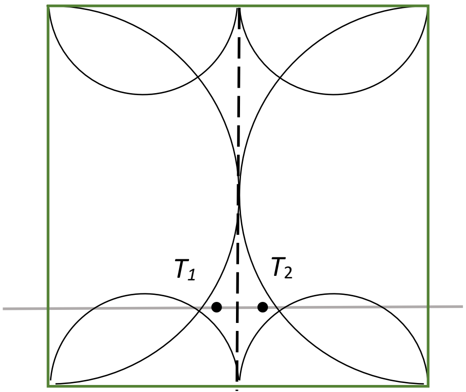
Ugotovili smo, da z eno točko v kvadratu tega ne moremo razdeliti na ostrokotne trikotnike, saj nam nad polkrožnicami ne ostane nič prostora. Ta prostor si lahko zagotovimo z risanjem manjših polkrožnic. To naredimo tako, da nasprotni stranici kvadrata razpolovimo in nad vsako polovico kvadrata načrtamo polkrog. Vsak polkrog ima za premer polovično dolžino stranice kvadrata. Nad preostali stranici prav tako načrtamo polkroga, ki pa imata za premer celotno stranico kvadrata (slika 35). Na ta način nad krožnicami ostane prostor, kamor lahko postavimo oglišča ostrokotnih trikotnikov.



Slika 35: loki nad stranicami kvadrata II

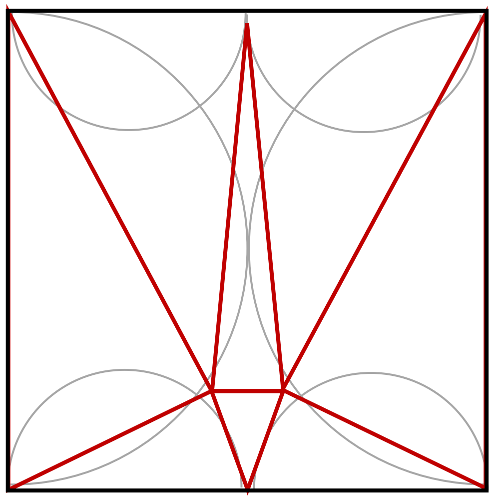
Ker vemo da delitve ni mogoče opraviti z eno točko, v enega izmed polj nad krožnicami poljubno vstavimo dve točki (slika 36). Oglišči ostrokotnih trikotnikov izberemo tako:

- da sta v enem od dveh polj nad krožnimi loki,
- da je premica, ki poteka skozi njiju, pravokotna na srednjico kvadrata,
- da sta enako oddaljeni od srednjic.



Slika 36: Možna razporeditev točk

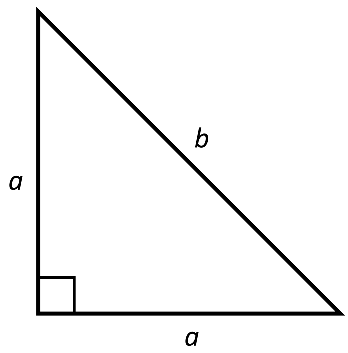
Krajišča krožnih lokov ustrezno povežemo z izbranima točkama (Slika 37). Dobimo 8 ostrokotnih trikotnikov. Kvadrata ni mogoče razdeliti na manj ostrokotnih trikotnikov.



Slika 37: Kvadrat, razdeljen na najmanjše možno število ostrokotnih trikotnikov

5. Razdelitev enakokrakega pravokotnega trikotnika na ostrokotne trikotnike

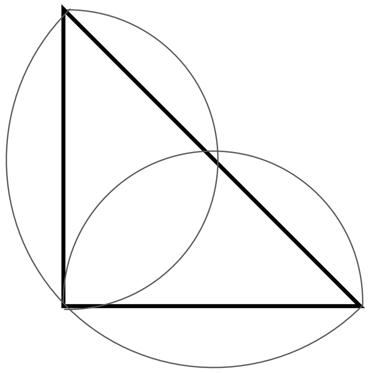
Pri tem problemu hočemo razdeliti enakokraki pravokotni trikotnik na čim manjše število ostrokotnih trikotnikov. Za začetek na kratko poglejmo enakokraki pravokotni trikotnik.



Slika 38: enakokraki pravokotni trikotnik

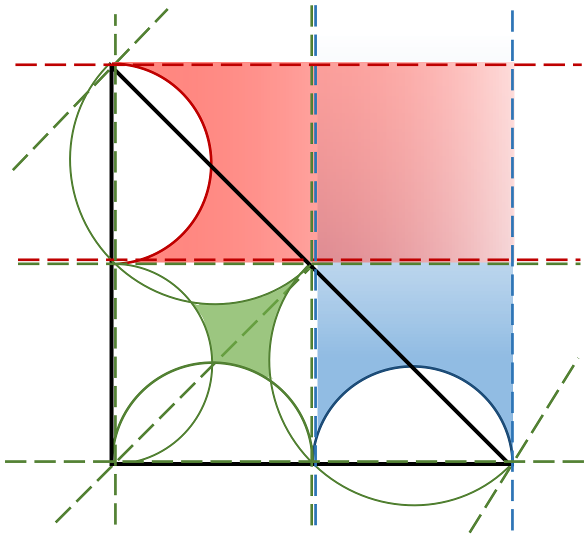
Enakokraki pravokotni trikotnik ima dve pravokotni skladni stranici, ki sta kraka trikotnika, tretja stranica pa je hipotenuza (Slika 38).

Najprej se lotimo deljenja enakokrakega pravokotnega trikotnika s pomočjo polkrožnih lokov, s katerimi smo si pomagali že v prejšnjih nalogah. Tako nad vsako stranico enakokrakega pravokotnega trikotnika načrtamo polkrožni lok (Slika 39). Če želimo narisati ostrokotni trikotnik s pomočjo krožnega loka, mora biti tretji kot ostrokotnega trikotnika nad lokom in med nosilkama, ki potekata skozi že določeni oglišči. Toda v našem primeru nam v samem enakokrakem pravokotnem trikotniku nad polkrožnimi loki in med nosilkami ne ostane več prostora za tretje oglišče ostrokotnih trikotnikov (Slika 39).



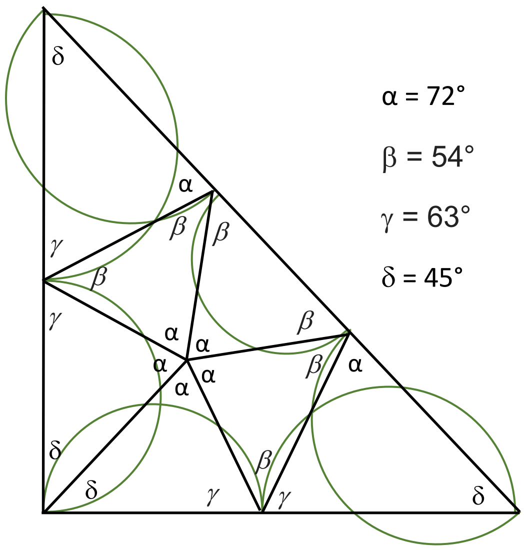
Slika 39: enakokraki pravokotni trikotnik s polkrožnimi loki

Nato si z namenom, da bi nam nad polkrožnimi loki ostal skupen prostor, nad stranicami narišemo manjše krožne loke. Da bi vse konce polkrožnih lokov lahko povezali z eno točko (ogliščem vseh ostrokotnih trikotnikov), bi ta točka morala ležati nad vsemi krožnimi loki in med vsemi nosilkami njihovih stranic. Ker pa se rdeče modro in zeleno polje (polja, ki označujejo možnost postavitve tretje točke ostrokotnega trikotnika glede na njihov polkrožni lok) ne pokrivajo v enakokrakem pravokotnem trikotniku, v njem ne bo možno določiti ene točke, ki bi bila tretja točka vsem ostrokotnim trikotnikom (slika 40).



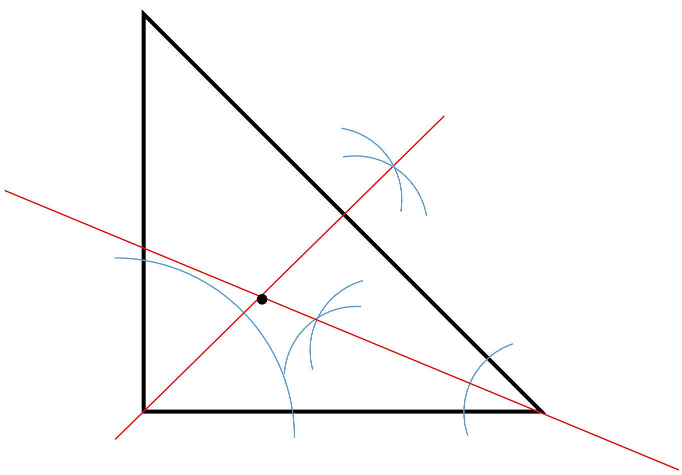
Slika 40: ne moremo določiti ene točke za oglišče vseh ostrokotnih trikotnikov v enakokrakem pravokotnem trikotniku

Po tej ugotovitvi, da ne moremo določiti ene točke kot oglišče vseh ostrokotnih trikotnikov v enakokrakem pravokotnem trikotniku, začnemo spreminjati velikosti lokov nad stranicami, tako da s čim manj loki pridobimo nad njimi čim več skupnih polj, kjer bo lahko ležalo njihovo tretje oglišče. Točke na tistih poljih, ki se ne pokrivajo z nobenim drugim poljem, moramo povezati z eno izmed stranic enakokrakega pravokotnega trikotnika. Na sliki 41 je prikazana razdelitev enakokrakega pravokotnega trikotnika na sedem ostrokotnih trikotnikov. To je najmanjše možno število ostrokotnih trikotnikov v enakokrakem pravokotnem trikotniku. Kot je prikazano, imajo vsi trikotniki notranje kote manjše od 90°, zato so ostrokotni.



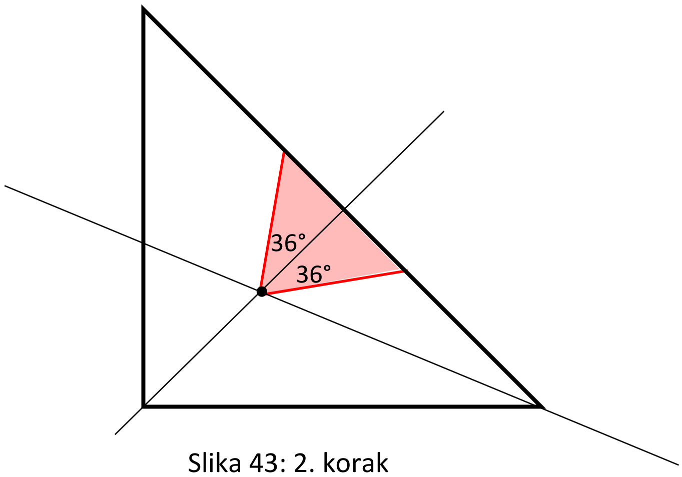
Slika 41: razdelitev enakokrakega pravokotnega trikotnika na sedem ostrokotnih trikotnikov

Kako pa sploh načrtati sliko 41? Najprej v enakokrakem pravokotnem trikotniku razpolovimo pravi kot in kot ob hipotenuzi (slika 42).



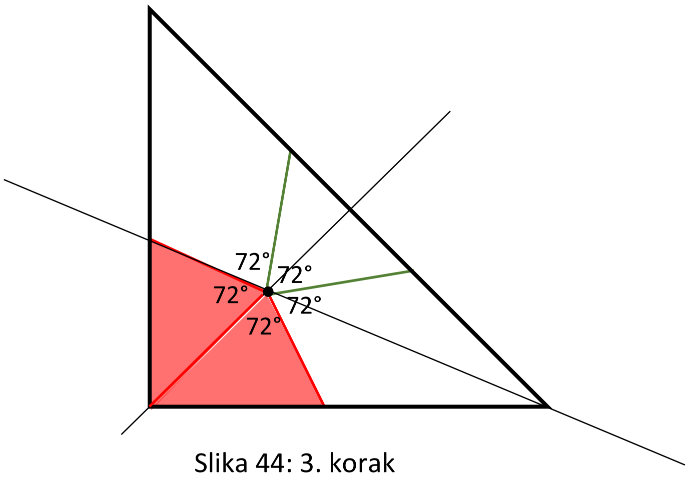
Slika 42: 1. korak

Nato iz srednjice pravega kota in presečišča srednjic na vsako stran narišemo dve daljici. Med posamezno daljico in srednico naj bo kot 36°. S tem dobimo prvi ostrokotni trikotnik, ki je hkrati tudi enakokrak (slika 43).



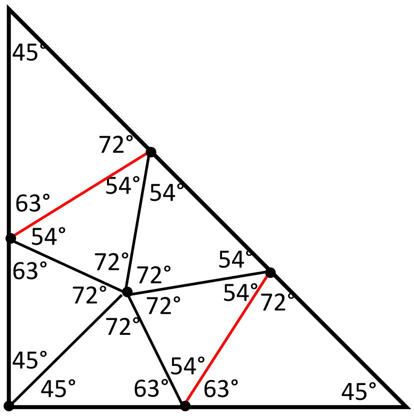
Slika 43: 2. korak

Ko smo vrisali prvi ostrokotni enakokraki trikotnik ob njegova kraka z izhodiščem v njegovem vrhu na obe strani vrišemo dve daljici. Med daljico in krakom mora biti kot 72°. Označimo del srednjice, ki poteka od vrha pravega kota pravokotnega enakokrakega trikotnika, pa do presečišča dveh srednjic. Tako dobimo naslednja dva skladna ostrokotna trikotnika (slika 44).



Slika 44: 3. korak

Na koncu stičišča daljic trikotnikov in enakokrakega pravokotnega trikotnika, med seboj povežemo kot je prikazano na sliki 45. Dobili smo 7 ostrokotnih trikotnikov. Od teh so štirje trikotniki s koti 63°, 72°, 45° in trije z notranjimi koti 54°, 54°, 72° .



Slika 45: 4. korak

6. Zaključek

Na kratko strnimo, kaj smo ugotovili v raziskovalni nalogi.

- Predstavili smo lego največjega možnega enakostraničnega trikotnika v kvadratu.
- Pokazali smo, da lahko kvadrat razdelimo na najmanj dva pravokotna trikotnika.
- Zapisali smo formulo za izračun skupnega števila skladnih pravokotnih trikotnikov v kvadratu.
- Pokazali smo kje postaviti točko *C*, glede na dano daljico *AB,* da bo nastali trikotnik *ABC* pravokotni, ostrokotni ali topokotni.
- Pokazali smo, da z izbiro ene točke v kvadratu ne moremo razdeliti kvadrata na same ostrokotne ali topokotne trikotnike, lahko pa na vsaj štiri pravokotne trikotnike.
- Ugotovili smo, kako razdelimo kvadrat na najmanjše število samih ostrokotnih trikotnikov.
- Ugotovili smo, kako enakokraki pravokotni trikotnik razdelimo na najmanjše število samih ostrokotnih trikotnikov.

Nadaljnje raziskovanje ponuja vprašanja, kako razdeliti druge like (npr. pravokotnik, romb, trapez …) na same ostrokotne, topokotne in pravokotne trikotnike.

7. Družbena odgovornost

Raziskovalna naloga nama je omogočila pridobivanje novih izkušenj, tako matematičnih vsebin kot zapisovanja matematičnih besedil. S poglabljanjem osnovnošolske matematike na novem problemu sva spoznala postopek nastajanja raziskovalne naloge. Utrdila sva medsebojno sodelovanje, se posvetovala in dogovarjala. Pridobljene izkušnje in znanja bova lahko uporabila v srednji šoli.

8. Viri

1. Vidav, I. (1976/1977). *Presek*. Kako razrežemo kvadrat na same ostrokotne trikotnike.
Pridobljeno: http://www.presek.si/4/4-2-Vidav.pdf

2. http://www.zlatnadjeca.com/2010/10/napravimo-tangram.html

Pridobljeno: 27.12 .2018, ura: 18:10

3. https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/acute-square/

Pridobljeno: 10.2.2018, ura: 16:20