»Mladi za napredek Maribora 2019«

36. srečanje

Število presečišč stranic pri mnogokotnikih

Matematika

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: TARJA ZUPANČIČ DANKO

Mentor: MOJCA GAZVODA
Šola: OŠ BRATOV POLANČIČEV MARIBOR

Število točk: 141/ 170
Mesto: 5
Priznanje: srebrno

Maribor, februar 2019

»Mladi za napredek Maribora 2019«

36. srečanje

Število presečišč stranic pri mnogokotnikih

Matematika

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Maribor, februar 2019

KAZALO

POVZETEK

Ko smo pri pouku matematike v osmem razredu obravnavali izbočene (konveksne) večkotnike, se nam je porodila zanimiva zamisel za raziskovalno nalogo, v kateri želimo ugotoviti število vseh možnih presečišč stranic teh večkotnikov. Zanima nas, koliko je največje število možnih presečišč stranic pri različnih konveksnih (izbočenih) večkotnikih. Naš cilj je to upodobiti v tabeli in, po možnosti, poiskati pravilo teh zaporedij (odnos med številom stranic in številom presečišč). Nalogo bomo razširili še na presečišča konkavnih večkotnikov. Tudi te podatke bomo zbirali v tabeli in prepričani smo, da se bo pojavilo nekakšno zaporedje (splošen zapis).

ZAHVALA

Za pomoč pri raziskovalni nalogi bi se radi zahvalili naši mentorici, učiteljici matematike, za vso pomoč, strokovne nasvete in spodbudo, in naši šolski koordinatorici, za nasvete ob pripravi naloge. Zahvaljujemo se tudi vse ostalim, ki so nas podprli ali kako drugače pomagali pri izdelavi raziskovalne naloge.

1 UVOD

1.1 Namen in cilj raziskovalne naloge

Ko smo v osmem razredu obravnavali geometrijo, še predvsem mnogokotnike (večkotnike), nas je ta zelo pritegnila. Kljub (obsežnemu) znanju, ki smo ga pridobili pri pouku matematike, smo želeli o mnogokotnikih izvedeti nekaj več. Zanimalo nas je, kaj se zgodi, če prekrijemo dva enaka mnogokotnika, natančneje na koliko mestih se sekajo stranice. Zanimalo nas je tudi, ali na število presečišč vpliva:

- število stranic in kotov (sodo, liho),
- ali je mnogokotnik izbočen ali vdrt,
- dolžina stranic,
- ali je (izbočen) mnogokotnik pravilen ali nepravilen,
- velikost kotov,
- kako razvejan je mnogokotnik.

Namen naloge je bil, da s pomočjo risanja prekrivajočih se mnogokotnikov ugotovimo, ali se pri številu presečišč in največjem številu presečišč pojavi določeno zaporedje oziroma pravilo.

1.2 Geometrija

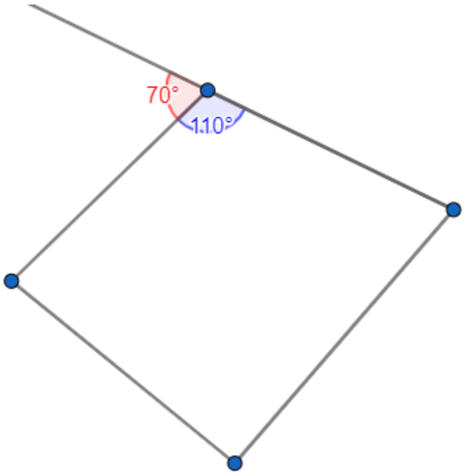
Geometrija je disciplina oziroma področje matematike, ki se ukvarja s telesi oziroma objekti v ravnini in prostoru ter proučuje njihove medsebojne odnose. Spada med najstarejše znanosti. (1)

Poznamo Evklidsko geometrijo, ki je ime dobila po Evklidu iz Aleksandrije. Ta je ustvaril prvi znan celoten pregled geometrijskega znanja v antiki. To delimo in razčlenimo glede na različne pristope. V njej razlikujemo planimetrijo (ravninska geometrija), stereometrijo (prostorska geometrija) in trigonometrijo (del računske geometrije, ki obravnava računanje dolžin stranic in velikosti kotov v trikotnikih). Poznamo še Neevklidsko in Analitično geometrijo (2). Našo nalogo uvrščamo v planimetrijo oz. ravninsko geometrijo. Ta obravnava like v ravnini, z njo pa so povezani pojmi, kot so kot, n-kotnik, premica, točka, daljica. (3)

1.2.1 Mnogokotniki

Mnogokotniki (ali večkotnik, s tujko poligon) je v geometriji eden najpogostejših izrazov. Je množica točk v ravnini, omejenih z enostavno in sklenjeno lomljenko. Imenujemo ga tudi ravninski lik. Točke, na stiku sosednjih daljic lomljenke, so oglišča, daljice lomljenke pa so njegove stranice.

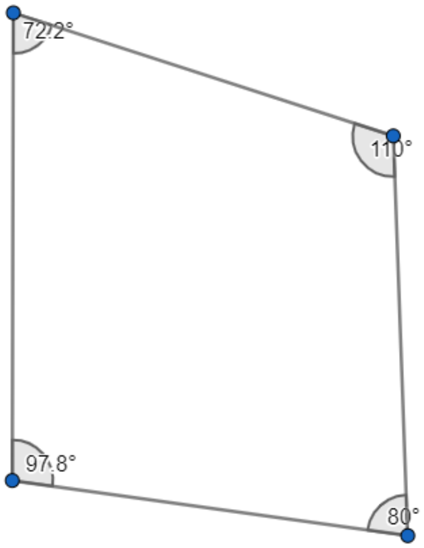
Kote v mnogokotnikih delimo na notranje in zunanje. Kot znotraj lika med dvema stranicama, ki imata skupno oglišče je mnogokotnikov notranji kot. Kot z vrhom, ki pa ga oklepata podaljšek stranice mnogokotnika z drugo stranico, se imenuje zunanji kot (nahaja se na zunanji strani notranjega kota). Glede na to ali so koti izbočeni ali vdrti, je odvisno, kam mnogokotnik uvrščamo (izbočen ali vdrt). Na spodnji sliki, ki prikazuje nepravilen izbočen štirikotnik, je zunanji kot označen z rdečo (70°), notranji pa z modro barvo (110°).

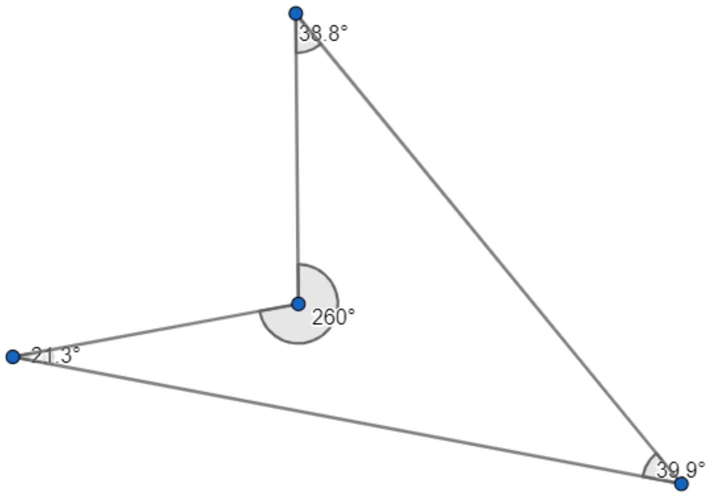


Slika 1: Notranji in zunanji kot nepravilnega izbočenega štirikotnika (Vir: avtor)

Mnogokotnike poimenujemo po številu oglišč, ki jih je toliko kot stranic, notranjih in zunanjih kotov. Ločimo trikotnike, štirikotnike, petkotnike, šestkotnike … Mnogokotnik z n oglišči, imenujemo n-kotnik (ima n število oglišč, stranic, notranjih in zunanjih kotov).

Mnogokotnike (natančneje) delimo na izbočene/konveksne in vdrte/konkavne. Ta je izbočen takrat, ko je notranji kot, ki ga oklepata sosednji stranici, manjši od iztegnjenega (slika 2), vdrt pa takrat, ko je vsaj en njegov notranji kot večji od 180° (slika 3).

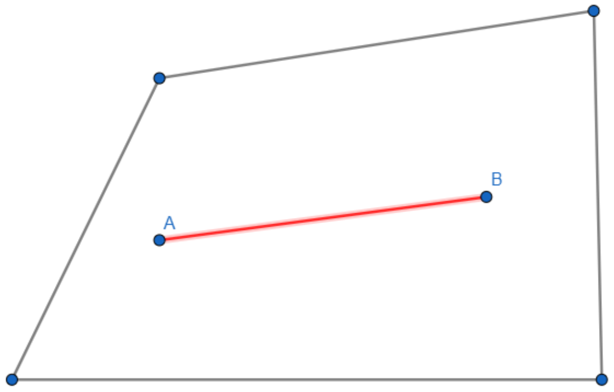




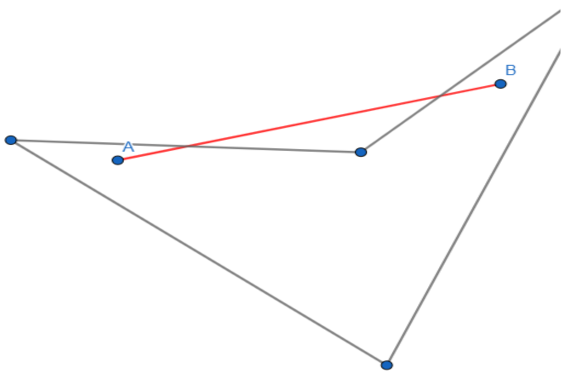
Slika 3: Vdrt štirikotnik (Vir: avtor)

Slika 2: Izbočen štirikotnik (Vir: avtor)

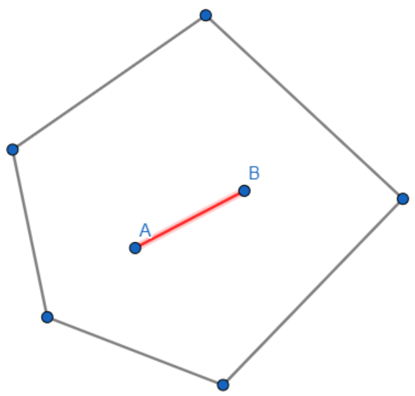
Vsaka daljica, ki povezuje poljubni dve točki v liku in ki v celoti leži v njem, leži v izbočenem mnogokotniku (sliki 4, 6). Mnogokotnik je vdrt, če obstaja vsaj ena daljica, ki v celoti ne leži v notranjosti lika (sliki 5, 7). (4)



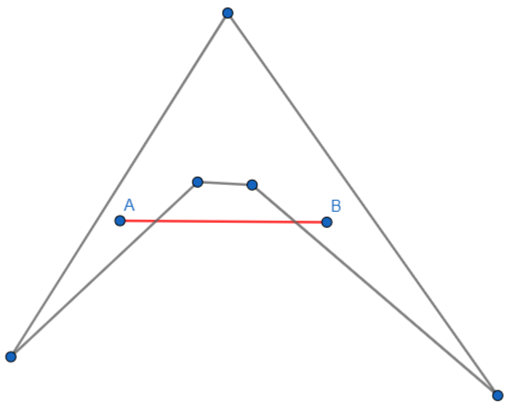
Slika 4: Izbočen štirikotnik (Vir: avtor)



Slika 5: Vdrt štirikotni (Vir: avtor)

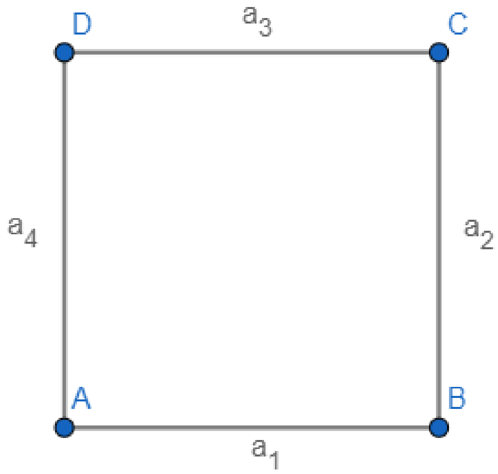


Slika 6: Izbočen petkotnik (Vir: avtor)



Slika 7: Vdrt petkotnik (Vir: avtor)

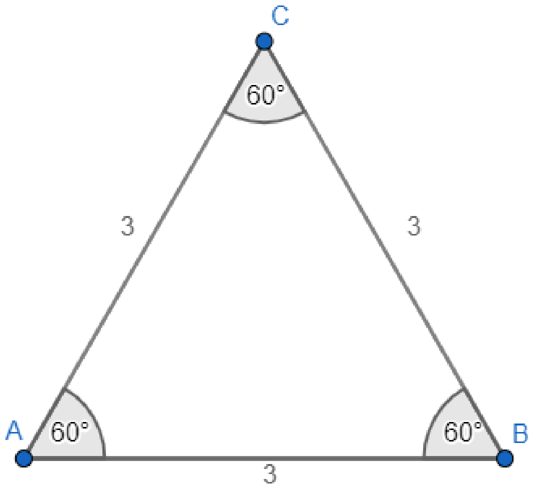
Mnogokotnik sestavlja več elementov, kot so stranice, oglišča, notranji in zunanji koti. Stranice so daljice, ki v celoti omejujejo mnogokotnik. Točke, v katerih se stranici stikata, imenujemo oglišča. Na sliki 8 so stranice označene z malimi sivimi tiskanimi črkami (a_1, a_2, a_3, a_4), oglišča pa z veliki modrimi tiskanimi črkami (A, B, C, D).



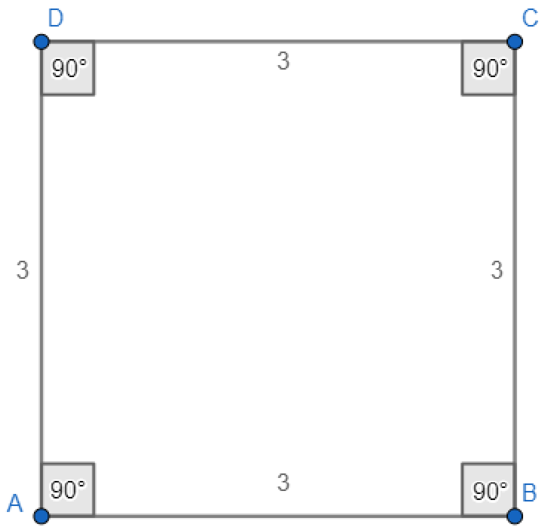
Slika 8: Stranice in oglišča kvadrata (Vir: avtor)

Notranje in zunanje kote lahko vidimo na sliki 1.

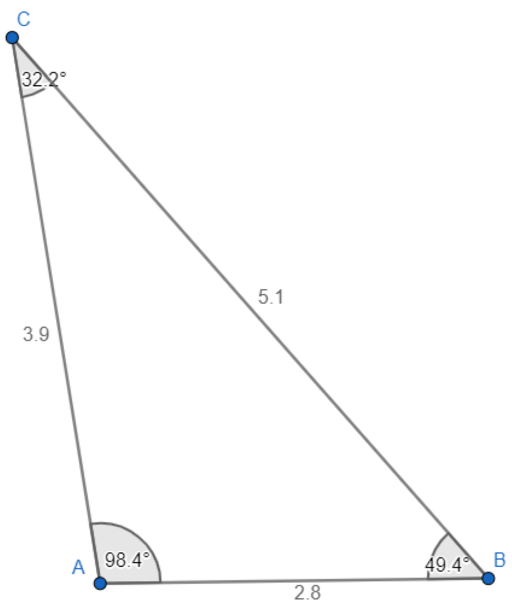
Mnogokotnike ločimo tudi na pravilne in nepravilne. Za pravilne je značilno, da imajo vse stranice enako dolge in vse notranje kote skladne in zunanje kote skladne. Najbolj poznana pravilna mnogokotnika sta pravilni trikotnik, ki ga imenujemo enakostranični trikotnik (vse njegove stranice so enako dolge, vsak notranji kot meri 60°), in pravilni štirikotnik oziroma kvadrat (vse stranice so enako dolge, vsi notranji koti merijo 90°). Vsi pravilni mnogokotniki so izbočeni, čeprav vsi izbočeni mnogokotniki niso pravilni. Na slikah 9 in 10 sta prikazana pravilni izbočen trikotnik in štirikotnik. Vse njune stranice so enako dolge, vsi koti pa so skladni. Na slikah 11 in 12 lahko vidimo trikotnik in štirikotnik, ki sta prav tako izbočena, le da nimata skladnih stranic ter kotov, to pomeni, da sta mnogokotnika nepravilna. Stranice mnogokotnikov na spodnjih slikah so označene v centimetrih (cm). (5)



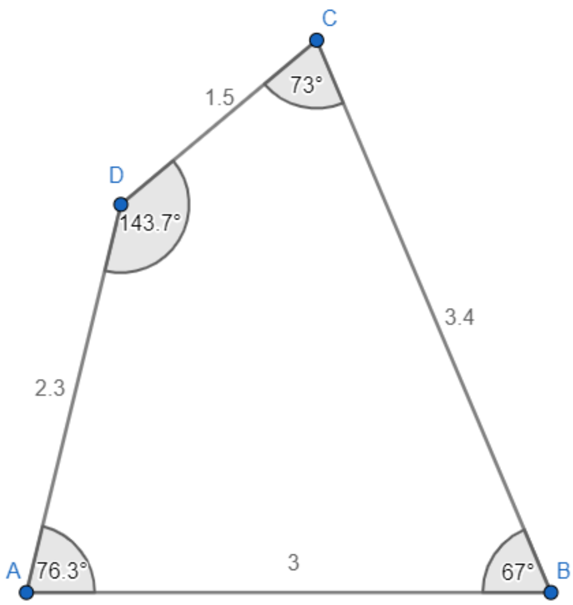
Slika 9: Pravilni izbočen trikotnik/enakostranični trikotnik (Vir: avtor)



Slika 10: Pravilni izbočen štirikotnik/kvadrat (Vir: avtor)



Slika 11: Nepravilni izbočen trikotnik (Vir: avtor)



Slika 12: Nepravilni izbočen štirikotnik (Vir: avtor)

V naši nalogi smo za izbočene mnogokotnike uporabili tako pravilne kot nepravilne.

2 METODOLOGIJA DELA

2.1 Pripomočki

Nalogo smo izdelali s pomočjo različnih pripomočkov, kot so:

- karirasti zvezki (uporabili smo jih za skice in risbe prekrivajočih mnogokotnikov),
- svinčnik, barvna pisala,
- geometrijsko orodje (geotrikotnik, ravnilo),
- računalniški program Geogebra.

2.2 Opis dela

Naloge smo se lotili postopoma. V zvezke smo narisali mnogokotnike, ki jih bomo uporabili v raziskovalni nalogi. Razdelili smo jih na izbočene in vdrte, te pa v skupine odvisno po številu kotov ter stranic. Nato smo narisali grobe skice prekrivajočih mnogokotnikov, rezultate pa si skrbno zapisovali v tabelo. Risali smo skice, na katerih je presečišč najmanj, nato pa vse do največjega števila. Največje presečišče stranic določenih likov smo še enkrat natančneje prerisali. Skice smo nato izrisali na računalnik s pomočjo programa Geogebra. Na tem smo še enkrat preverili dobljena števila presečišč. Dobljene skice največjih mnogokotnikov smo dodali tabeli z že vpisanimi rezultati.

Metode dela, ki smo jih uporabili:

- kvantitativna metoda dela,
- metoda risanja,
- primerjanje podatkov,
- metoda grafičnega prikazovanje (sem štejemo skice, narisane s programom Geogebra).

3 REZULTATI

Rezultati na naslednjih tabelah so izpisani iz priloge 1, 2 in 3. Tam se nahajajo tudi slike vseh mnogokotnikov, ki smo jih v raziskavi uporabili.

Naš glavni cilj je bil poiskati ponavljajoče se pravilo za največje število presečišč pravilnih izbočenih, nepravilnih izbočenih in vdrtih mnogokotnikov, naš namen pa je bil opazovati tudi vse števila presečišč mnogokotnikov. Za prve in druge smo si skoraj upali reči, da so bo pravilo pojavilo, za tretje pa nismo bili tako prepričani, čeprav smo pravilo vseeno pričakovali.

Na tabeli 1 vidimo pravilo, ki smo ga odkrili pri prekrivanju enakih pravilnih izbočenih mnogokotnikov. Za primer smo vzeli mnogokotnike od pravilnega trikotnika pa do pravilnega desetkotnika (spodaj našteti). Po dobljenih podatkih, vpisanih v prilogi 1, smo videli, da se ponavlja pravilo največjega števila presečišč – $2n$. N v naši nalogi predstavlja število kotov mnogokotnika, torej kakor se ta imenuje (n-kotnik). Tako smo prišli do sklepa, da je največje število presečišč pravilnih izbočenih mnogokotnikov vedno dvakratnik števila, po katerem je ta imenovan.

Tabela 1: Pravilo največjega števila presečišč pri pravilnih izbočenih mnogokotnikih (Vir: avtor)

Ime mnogokotnika (pravilen izbočen)	Pravilo največjega števila presečišč
Trikotnik	2n
Štirikotnik	2n
Petkotnik	2n
Šestkotnik	2n
Sedemkotnik	2n
Osemkotnik	2n
Devetkotnik	2n
Desetkotnik	2n

V tabeli 2 je zapisano pravilo, ki smo ga odkrili, tokrat pri prekrivanju enakih nepravilnih izbočenih mnogokotnikov. Tukaj smo za primer vzeli dva mnogokotnika od trikotnika, nato pa vse do desetkotnika (našteti v tabeli 2). Dobili smo enako pravilo kot pri pravilnih izbočenih mnogokotnikih, torej $2n$.

Tabela 2: Pravilo največjega števila presečišč pri nepravilnih izbočenih mnogokotnikih (Vir: avtor)

Ime mnogokotnika (nepravilen izbočen)	Pravilo največjega števila presečišč
Trikotnik	2n
Trikotnik	2n
Štirikotnik	2n
Štirikotnik	2n
Petkotnik	2n
Petkotnik	2n
Šestkotnik	2n
Šestkotnik	2n
Sedemkotnik	2n
Sedemkotnik	2n
Osemkotnik	2n
Osemkotnik	2n
Devetkotnik	2n
Devetkotnik	2n
Desetkotnik	2n
Desetkotnik	2n

V tabeli 3 in 4 vidimo rezultate, do katerih smo prišli s prekrivanjem dveh enakih vdrtih mnogokotnikov. Žal pravila nismo odkrili, smo pa vseeno prišli do zanimivih rezultatov. Pravila oziroma dobljene rezultate smo razdelili v dve skupini. Pri prvem, ki ga prikazuje tabela 3, smo iskali, kako bi najlažje zapisali največje število presečišč določenega mnogokotnika. Pri tem smo najprej pogledali, kolikokrat se v tem številu ponovi število *n,* ali vsaj kolikokrat *n* je najbližje dobljenemu številu. Nato smo po potrebi prišteli toliko, koliko je manjkalo do iskanega števila.

Tabela 3: Prvo pravilo/rezultati največjega števila presečišč pri vdrtih mnogokotnikih (Vir: avtor)

Ime mnogokotnika (vdrt)	Pravilo/rezultati največjega števila presečišč
Štirikotnik	2n
	2n + 2
	3n
	4n ali n^2
Petkotnik	n + 3
	2n
	2n
	3n + 3
Šestkotnik	2n
	3n + 2
	4n
	6n ali n^2
Sedemkotnik	n + 3
	2n + 6
	3n + 3
	5n + 3

V naši raziskavi smo nekaj časa posvetili le iskanju pravila dobljenih rezultatov, ki so zapisani v tabeli 3. Ker tega nismo odkrili, smo se posvetili največjemu številu največjih presečišč pri posameznih mnogokotnikih. Ta smo v preglednici pobarvali z rumeno. Ugotovili smo, da je največje število največjega števila presečišč pri parnih vdrtih mnogokotnikih nastalo po pravilu n^2. Tako je z rumeno obarvano število pri vdrtem štirikotniku (kjer je n 4) 4^2 oziroma 16. Pri šestkotniku, ki je drugi obravnavan parni vdrti mnogokotnik, pa je bilo z rumeno obarvano število torej 6^2 oziroma 36. Pri z rumeno obarvanem številu neparnih vdrtih mnogokotnikih smo ugotovili enačbo $(n - 1)^2 + 2$. Ko smo nato namesto črke n vstavili število 5 in 7 (neparni oziroma lihi obravnavani števili), smo dobili števili presečišč 18 in 38. Zanimivo je tudi, da so z rumeno obarvana števila presečišč neparnih vdrtih mnogokotnikov (petkotnik, sedemkotnik) le za dve večja od z rumeno obarvanega število presečišč njihovih predhodnikov (štirikotnik, šestkotnik).

Tako kot pri tabeli 3 tudi pri tabeli 4 nismo odkrili zaporedja. Pri drugih rezultatih, zapisanih v tabeli 4, smo vzeli za osnovo pravilo *2n*, ki smo ga dobili pri tabeli 1. Zanimalo nas je, kako različni bodo rezultati. Osnovi smo nato po potrebi odšteli ali prišteli toliko, da smo prišli do iskanega števila. Ta števila so bila zelo različna, saj smo v nekaterih primerih morali odšteti 2, spet pri drugih pa prišteti kar 24.

Tabela 4: Drugo pravilo/rezultati največjega števila presečišč pri vdrtih mnogokotnikih (Vir: avtor)

Ime mnogokotnika (vdrt)	Pravilo/rezultati največjega števila presečišč
Štirikotnik	2n
	2n + 2
	2n + 4
	2n + 8
Petkotnik	2n - 2
	2n
	2n
	2n + 8
Šestkotnik	2n
	2n + 8
	2n + 12
	2n + 24
Sedemkotnik	2n - 4
	2n + 6
	2n + 10
	2n + 24

Če smo prej opazovali največje število presečišč, smo se zdaj posvetili vsem številom presečišč mnogokotnikov. Tako lahko na spodnji tabeli vidimo vsa možna števila presečišč pravilnih izbočenih mnogokotnikov (od pravilnega trikotnika do pravilnega desetkotnika). Največje število presečišč je napisano z rdečo barvo. Za njim sledi znak za neskončnost (∞), ki je prisoten pri vseh mnogokotniki, saj če en mnogokotnik natančno prekrijemo z njim enakim, se bosta ta sekala v neskončnem številu točk. Že pred skiciranjem mnogokotnikov smo z logičnim sklepanjem ugotovili, da bo vsako število presečišč katerega koli mnogokotnika parno število.

To lahko pojasnimo s tem, da ga oklepa sklenjena lomljenka, to pomeni, da če na kateri koli strani (stranici) vstopi stranica prvega mnogokotnika v drug mnogokotnik, v mnogokotniku ne more ostati, tako da izstopi pri drugi stranici. Videli smo tudi, da sta najmanjši števili presečišč pri katerem koli mnogokotniku števili 2 in 4. Vse to velja za vse naslednje tabele.

Na tabeli 5 vidimo števila presečišč pri pravilnem izbočenem mnogokotniku. Ta so nas zelo presenetila. Če pogledamo prva dva obravnavana mnogokotnika (trikotnik in štirikotnik), ugotovimo, da so števila presečišč stranic trikotnika 2, 4, in 6, torej zaporedje, ki bi ga pričakovali od vseh naslednjih pravilnih izbočenih mnogokotnikov (najmanjši dve stalni števili v zaporedju – 2, 4, nato pa vsa parna števila do največjega števila presečišč – $2n$). Ampak že pri štirikotniku se je izkazalo drugače. Namesto željenih presečišč 2, 4, 6, 8 smo dobili zaporedje 2, 4, 8. Ko smo pogledali še ostale mnogokotnike, smo videli, da imajo števila presečišč pri neparnih mnogokotnikih zaporedje trikotnika (2, 4, 6) že v osnovi, vsako naslednje število pa je za 4 večje od predhodnega, dokler ne pridemo do največjega števila presečišč. Prav tako je pri parnih mnogokotnikih, ki pa imajo za osnovo zaporedje štirikotnika (2, 4, 8). Tudi pri teh je vsako naslednje število večje od predhodnega za 4, dokler ne pridemo do največjega. Vzemimo za primer devetkotnik. Ker spada med neparne mnogokotnike, bo imel za osnovo zaporedje trikotnika – 2, 4, 6. Ker bo vsako naslednje število za 4 večje od predhodnega, temu zaporedju sledijo števila 10 ($6 + 4 = 10$), 14 ($10 + 4 = 14$) in 18 ($14 + 4 = 18$). Tukaj se zaporedje konča, saj za zadnje število presečišč velja pravilo[1] $2n$ ($2 \cdot 9 = 18$).

Tabela 5: Število presečišč pri pravilnih izbočenih mnogokotnikih (Vir: avtor)

Ime mnogokotnika (pravilen izbočen)	Število presečišč mnogokotnika
Trikotnik	2, 4, 6, ∞
Štirikotnik	2, 4, 8, ∞
Petkotnik	2, 4, 6, 10, ∞
Šestkotnik	2, 4, 8, 12, ∞
Sedemkotnik	2, 4, 6, 10, 14, ∞
Osemkotnik	2, 4, 8, 12, 16, ∞
Devetkotnik	2, 4, 6, 10, 14, 18, ∞
Desetkotnik	2, 4, 8, 12, 16, 20, ∞

[1] Glej tabelo 1.

Na tabeli 6 vidimo rezultate števil presečišč pri prekrivanju enakih nepravilnih izbočenih mnogokotnikih. Za razliko od pravilih, so se vsi raziskani nepravilni mnogokotniki sekali v vseh možnih presečiščih do največjega.

Tabela 6: Število presečišč pri nepravilnih izbočenih mnogokotnikih (Vir: avtor)

Ime mnogokotnika (nepravilen izbočen)	Število presečišč mnogokotnika
Trikotnik	2, 4, 6, ∞
Trikotnik	2, 4, 6, ∞
Štirikotnik	2, 4, 6, 8, ∞
Štirikotnik	2, 4, 6, 8, ∞
Petkotnik	2, 4, 6, 8, 10, ∞
Petkotnik	2, 4, 6, 8, 10, ∞
Šestkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, ∞
Šestkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, ∞
Sedemkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ∞
Sedemkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ∞
Osemkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ∞
Osemkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ∞
Devetkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ∞
Devetkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ∞
Desetkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ∞
Desetkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ∞

Tabela 7 nam prikaže števila presečišč vdrtih mnogokotnikov. Ugotovili smo, da je pri teh mnogokotnikih zaporedje enako kot pri nepravilnih izbočenih mnogokotnikih, torej se pojavijo vsa možna parna števila presečišč stranic do največjega.

Tabela 7: Število presečišč pri vdrtih mnogokotnikih (Vir: avtor)

Ime mnogokotnika (vdrt)	Število presečišč mnogokotnika
Štirikotnik	2, 4, 6, 8, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, 12, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ∞
Petkotnik	2, 4, 6, 8, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ∞
Šestkotnik	2, 4, 6, 8, 10, 12, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, ∞
Sedemkotnik	2, 4, 6, 8, 10, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ∞
	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ∞2,
	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, ∞

Ker pri vdrtih mnogokotnikih nismo odkrili pravila, ampak čisto različne podatke, smo začeli razmišljati, kaj lahko vpliva na število različnih presečišč in na velikost največjega števila le-teh.

Ugotovili smo, da na večje število presečišč in največjih presečišč vpliva:

- razvejanost mnogokotnika,
- dolžina in širina krakov (daljši ter tanjši so, več bo presečišč med mnogokotnikoma),
- oblika (bolj kot je mnogokotnik nenavaden, večja je možnost, da bo število presečišč kar visoko),
- koliko stranic ima mnogokotnik (kolikšno je *n*-število).

4 RAZPRAVA

Svoj cilj smo v raziskovalni nalogi dosegli. Kjer je bilo možno, smo poiskali pravilo oz. rezultate največjega števila presečišč pri enakih mnogokotniki (izbočeni – pravilni in nepravilnih mnogokotniki in vdrti mnogokotniki) in analizirali števila presečišč le-teh.

Pri izbočenih mnogokotnikih (v tem primeru pravilnih) smo odkrili ponavljajoče se zaporedje največjega števila presečišč – *2n,* kjer *n* predstavlja število kotov mnogokotnika, torej kako je mnogokotnik poimenovan, enaki pravilo se nam je pojavilo pri nepravilnih izbočenih mnogokotnikih, česar pa ne moremo reči tudi za vdrte.

Tabela 8 predstavlja osnovne ugotovitve naše naloge.

Tabela 8: Osnovne ugotovitve največjega števila presečišč (Vir: avtor)

Vrsta mnogokotnikov	Pravilo največjega števila presečišč (Da ali Ne)
Izbočeni mnogokotniki (pravilni)	Da ($2n$)
Izbočeni mnogokotniki (nepravilni)	Da ($2n$)
Vdrti mnogokotniki	Ne (delno, odkrili smo, katero je največje možno število pri največjem številu presečišč)

Tudi če smo pri številu vdrtih mnogokotnikov vzeli pravilo, ki smo ga dobili pri izbočenih mnogokotnikih, nismo pri enakih n-kotnikih ali pri vdrtih mnogokotnikih na splošno zaznali nobenega ponavljajočega se pravila oz. vzorca. Tako pridemo do sklepa, da obravnavani vdrti mnogokotniki po pravilu ne sledijo izbočenim.

Smo pa zato pri vdrtih ugotovili druge zanimive zakonitosti, kot so, da se za največje možno število največjega možnega števila presečišč pri parnih mnogokotnikih pojavi zapis n^2, za neparne mnogokotnike pa enačba $(n - 1)^2 + 2$.

Tako pridemo do sklepa, da obravnavani vdrti mnogokotniki po pravilu ne sledijo izbočenim.

V uvodu smo se spraševali, ali na število presečišč mnogokotnika vplivajo različne lastnosti mnogokotnika[2]. Med raziskovanjem smo odkrili naslednje:

[2] Glej Uvod – Namen in cilj raziskovalne naloge.

- da večje kot je število kotov, večje je možnost, da bo število presečišč večje (seveda pa na to vpliva še oblika oz. kraki mnogokotnika),
- da se v večini primerov večje število presečišč pojavi pri vdrtih mnogokotnikih,
- da imajo vdrti mnogokotniki z daljšimi stranica po navadi večje število presečišč (na to vpliva tudi položaj stranice),
- da imajo pravilni izbočeni mnogokotniki z večjimi notranjimi koti večje največje število presečišč, ne pa nujno tudi več števil presečišč (devetkotnik in desetkotnik imata enako število števil presečišč),
- da imajo vdrti mnogokotniki, ki imajo velike notranje kote in krake precej blizu, večje število presečišč,
- da imajo večje število presečišč tisti mnogokotnik, ki so bolj razvejani (na to vpliva tudi položaj krakov).

5 ZAKLJUČEK

Na začetku iz preprostega vprašanja in ideje se je čez čas razvila poglobljena raziskava. S svojo raziskovalno nalogo smo izvedeli nekaj novega. Uresničili smo zastavljen cilj. Ugotovili smo zaporedje največjega števila presečišč pravilnih in nepravilnih izbočenih in še veliko drugih zakonitosti, povezanih s to temo. Pridobljeno znanje nam bo koristilo tudi v prihodnje, upamo pa, da bo v pomoč tudi drugim.

Za nas je najpomembnejša ugotovitev naloge ta, da je pri vseh pravilnih in nepravilnih izbočenih *n*-kotnikih njihovo največje število presečišč *2n*. Odkrili pa smo tudi zanimive, presenetljive in hkrati nepričakovane rezultate pri številu presečišč vdrtih mnogokotnikov. Presenečeni smo bili nad tem, koliko različnih dejavnikov vpliva na število presečišč različnih mnogokotnikov.

Že med samo raziskavo so se nam sproti zbirale zamisli, kaj bi lahko še raziskali. V nadaljnjih raziskavah bi se lahko natančneje poglobili v določen mnogokotnik, natančneje raziskali, kaj vpliva na različna števila presečišč pri izbočenih mnogokotniki (velikost kotov, debelina in dolžina krakov pri mnogokotniku). Pri vdrtih mnogokotnikih bi se lahko osredotočili na le en *n*-kotnik in ga podrobneje raziskali. Lahko bi prekrivali tudi pravilne z nepravilnimi izbočenimi mnogokotniki.

6 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Pred začetkom izdelave naše naloge smo se pozanimali, ali so bile na to temo že narejene podobne raziskave. Ko smo ugotovili, da jih ni in da se to vprašanje nikjer ne pojavlja, nam je to dalo še dodaten zagon za raziskovanje. Upamo, da bomo z ugotovitvami lahko pomagali pri nadaljnjih raziskavah in pri šolskem delu tistih, ki jim bodo naši podatki koristili, saj bodo ti javno objavljeni na spletni strani. Naučili smo se uporabljati računalniški program Geogebra, analizirati dobljene rezultate in iskati pravila v danih podatkih. Naše ugotovitve nam bodo v prihodnosti pomagale tako pri šolskem delu kot pri zunajšolskem raziskovanju.

7 VIRI IN LITERATURA

1. (prevedel), Gorazd Lešnjak. *Matematika, zbirka tematskih leksikonov.* Tržič : Učila International, 2002.

2. priedil), Alojzij Vanjdal (prevedel in. *Leksikoni Cankarjeve založbe, Matematika.* Ljubljana : Cankarjeva založba, 1980.

3. Geometrija. *Wikipedija, prosta enciklopedija.* [Elektronski] 8. april 2017. [Navedeno: 29. december 2018.] https://sl.wikipedia.org/wiki/Geometrija.

4. Končan, Tanja, Moderc, Vilma in Strojan, Rozalija. *Skrivnosti števil in oblik 8.* Ljubljana : Založba Rokus Klett, d. o. o., 2017. ISBN 978-961-271-639-4.

5. Pravilni mnogokotnik. *Wikipedija, prosta enciklopedija.* [Elektronski] 5. julij 2015. [Navedeno: 27. januar 2019.] https://sl.wikipedia.org/wiki/Pravilni_mnogokotnik.

6. Plextor, Vektor. istip. *nastav*.... [Elektronski] 30. januar 2009. [Navedeno: 24. oktober 2018.] https://nacrtna-geometrija.blogspot.com/2009/01/ispitni-zadaci-za-masinsku-struku.html.

7. Mnogokotnik. *Wikipedija, prosta enciklopedija.* [Elektronski] 3. november 2017. [Navedeno: 29. december 2018.] https://sl.wikipedia.org/wiki/Mnogokotnik.

8 KAZALO SLIK IN TABEL

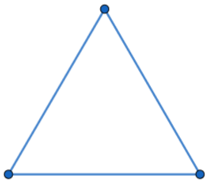
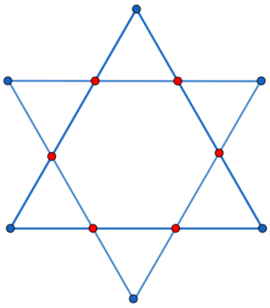
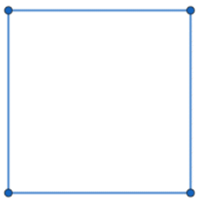
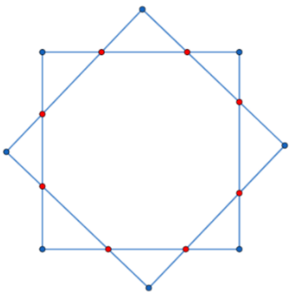
Kazalo slik

Kazalo tabel

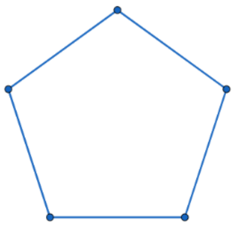
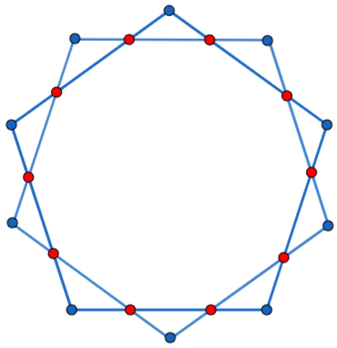
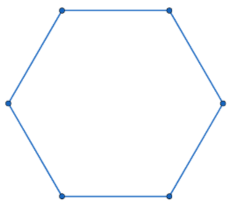
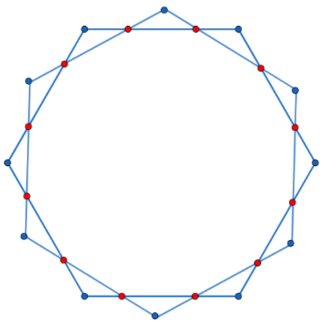
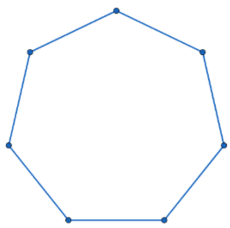
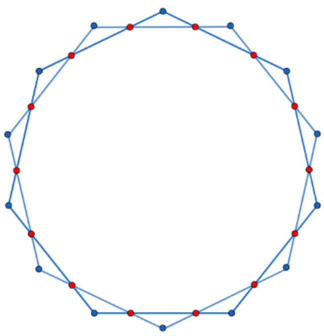
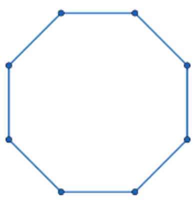
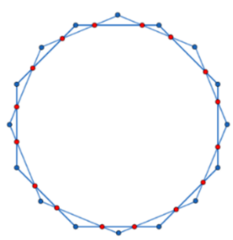
9 PRILOGE

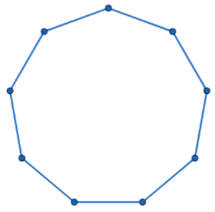
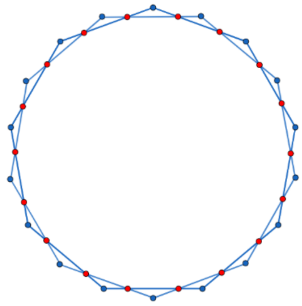
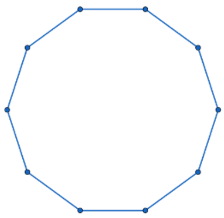
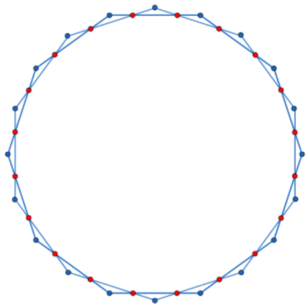
Priloga 1

Tabela 9: Število presečišč stranic pravilnih izbočenih mnogokotnikov (Vir: avtor)

TABELA IZBOČENIH PRAVILNIH MNOGOKOTNIKOV				
Ime mnogokotnika	Slika mnogokotnika (Vir: avtor)	Število presečišč stranic[3]	Slika največjega števila presečišč (Vir: avtor)	Pravilo največjega števila presečišč
Trikotnik		2, 4, 6, ∞		2n
Štirikotnik		2, 4, 8, ∞		2n

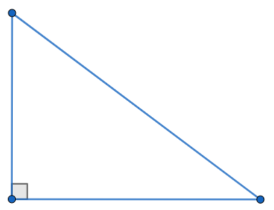
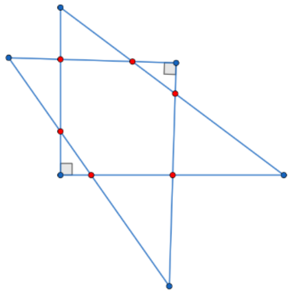
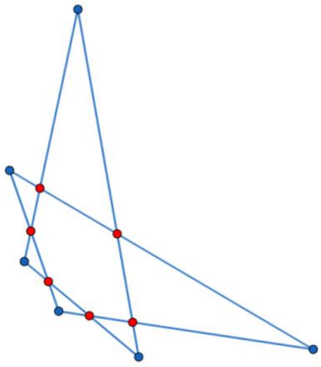
[3] Z rdečo barvo je obarvano največje število presečišč pri določenem mnogokotniku (znaka za neskončnost ne upoštevamo).

Petkotnik		2, 4, 6, 10, ∞		2n
Šestkotnik		2, 4, 8, 12, ∞		2n
Sedemkotnik		2, 4, 6, 10, 14, ∞		2n
Osemkotnik		2, 4, 8, 12, 16, ∞		2n

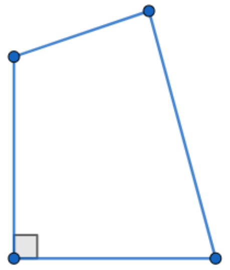
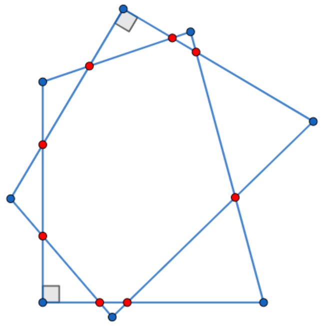
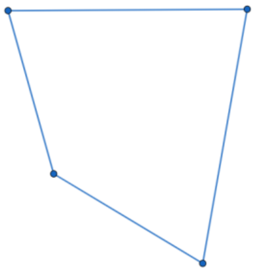
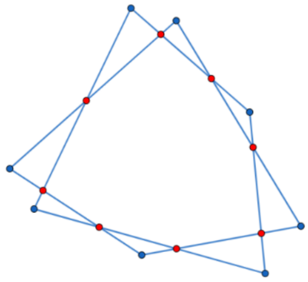
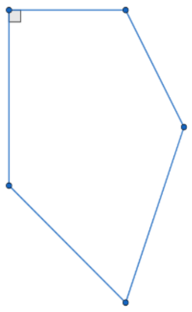
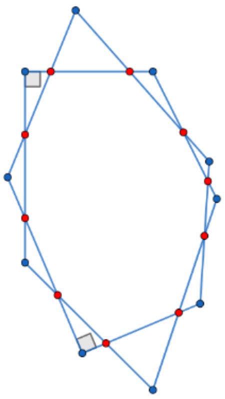
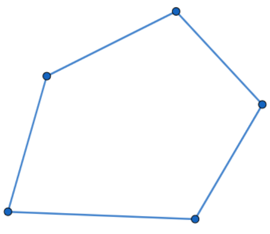
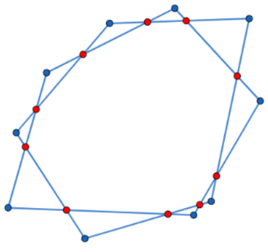
Devetkotnik		2, 4, 6, 10, 14, 18, ∞		2n
Desetkotnik		2, 4, 8, 12, 16, 20, ∞		2n

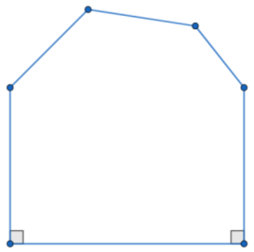
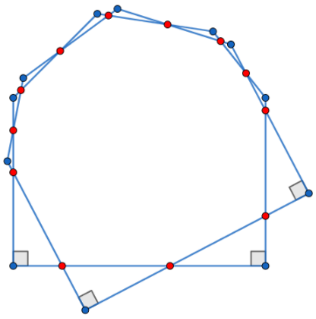
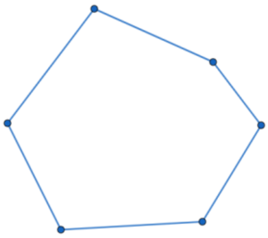
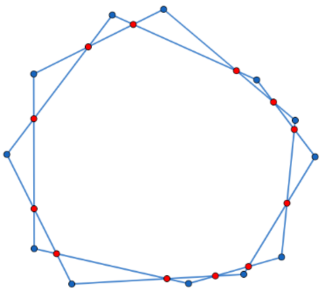
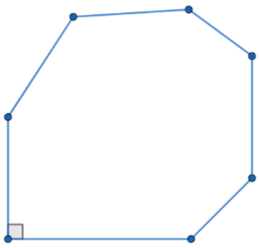
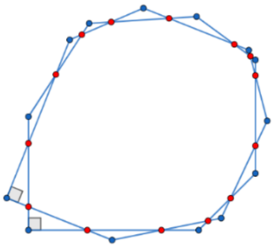
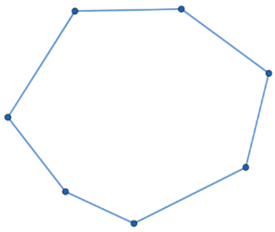
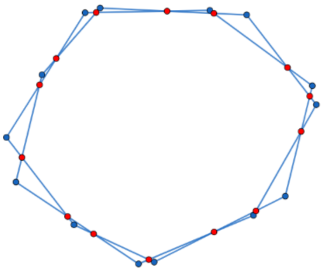
Priloga 2

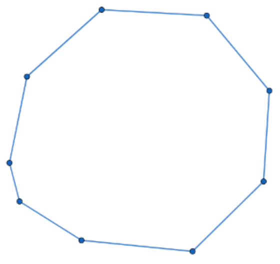
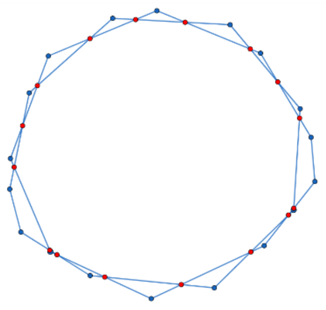
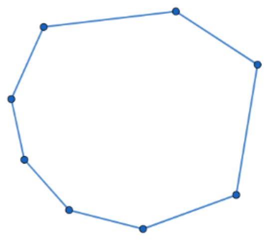
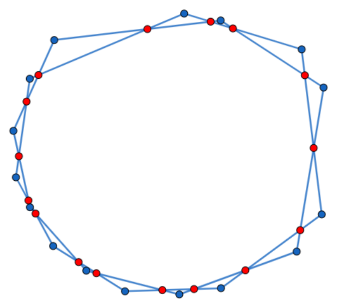
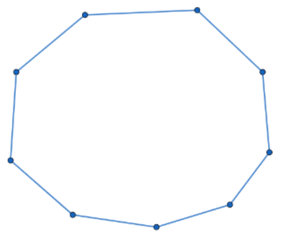
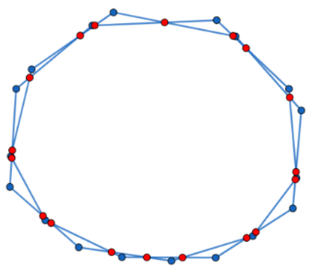
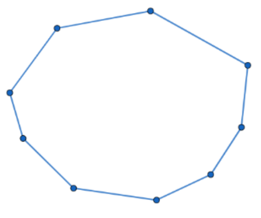
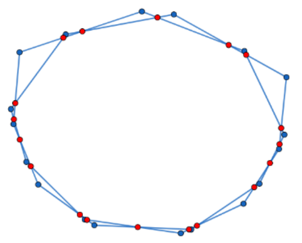
Tabela 10: Število presečišč pri nepravilnih izbočenih mnogokotnikih (Vir: avtor)

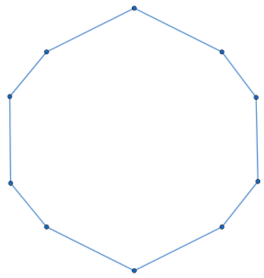
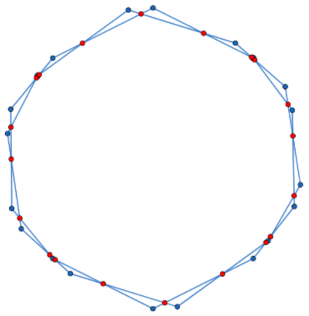
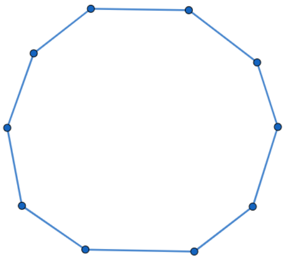
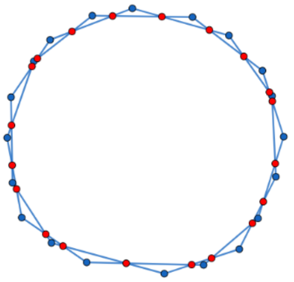
TABELA IZBOČENIH NEPRAVILNIH MNOGOKOTNIKOV				
Ime mnogokotnika	Slika mnogokotnika (Vir: avtor)	Število presečišč stranic[4]	Slika največjega števila presečišč (Vir: avtor)	Pravilo največjega števila presečišč
Trikotnik		2, 4, 6, ∞		2n
Trikotnik		2, 4, 6, ∞		2n

[4] Z rdečo barvo je obarvano največje število presečišč pri določenem mnogokotniku (znaka za neskončnost ne upoštevamo).

Štirikotnik		2, 4, 6, 8, ∞		2n
Štirikotnik		2, 4, 6, 8, ∞		2n
Petkotnik		2, 4, 6, 8, 10, ∞		2n
Petkotnik		2, 4, 6, 8, 10, ∞		2n

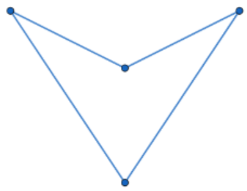
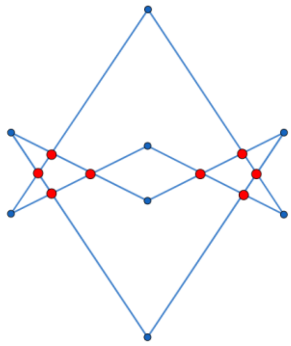
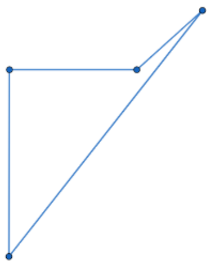
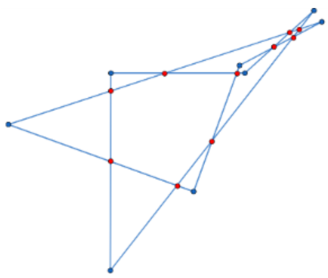
Šestkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, ∞		2n
Šestkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, ∞		2n
Sedemkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ∞		2n
Sedemkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ∞		2n

Osemkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ∞		2n
Osemkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ∞		2n
Devetkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ∞		2n
Devetkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ∞		2n

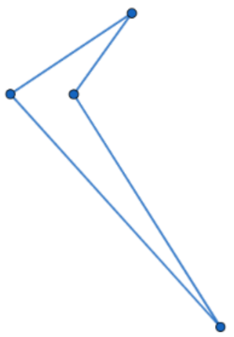
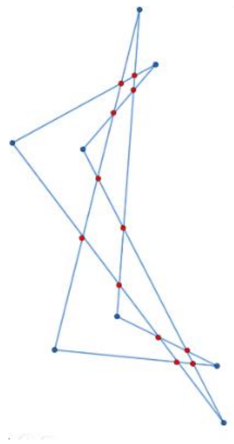
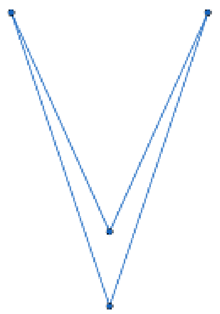
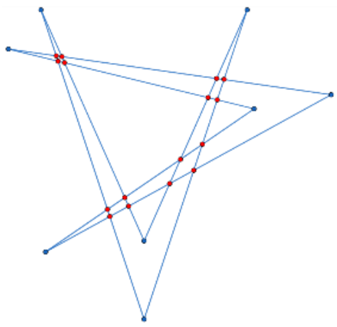
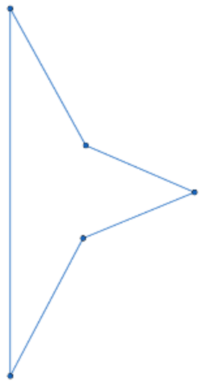
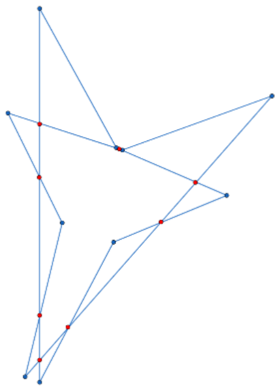
Desetkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ∞		2n
Desetkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ∞		2n

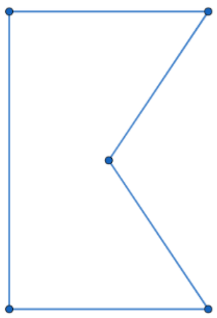
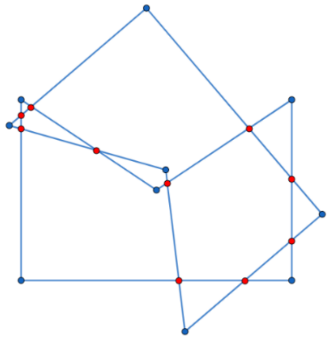
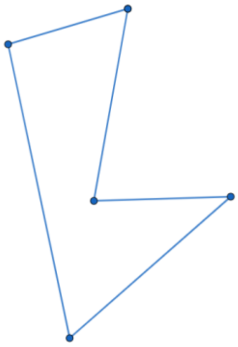
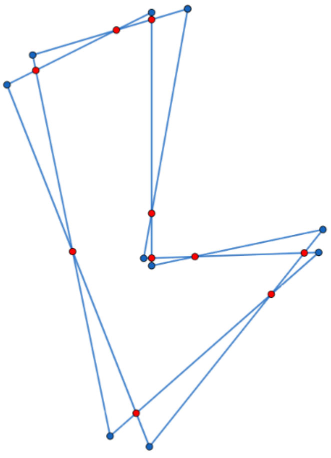
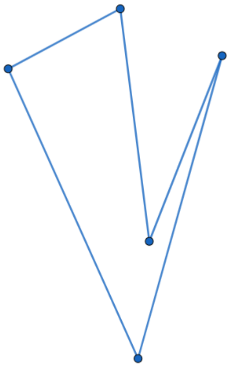
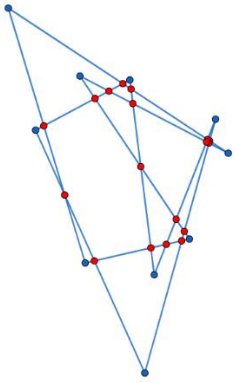
Priloga 3

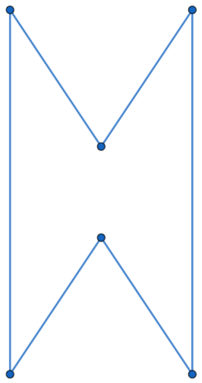
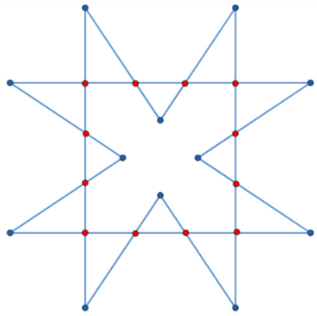
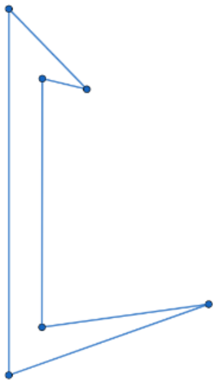
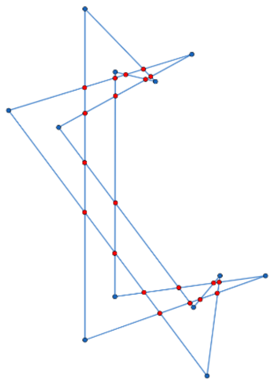
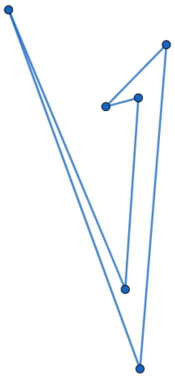
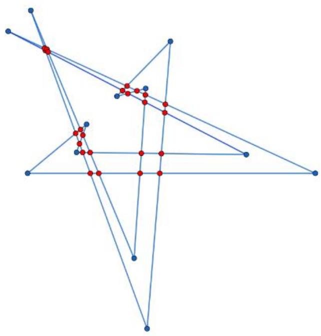
Tabela 11: Število presečišč vdrtih mnogokotnikov (Vir: avtor)

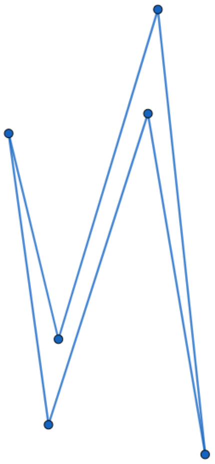
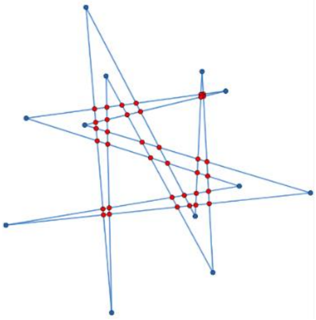
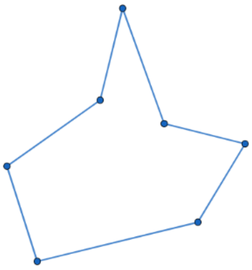
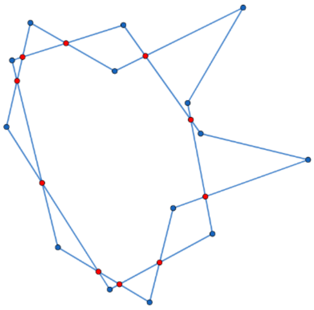
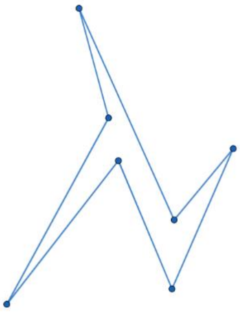
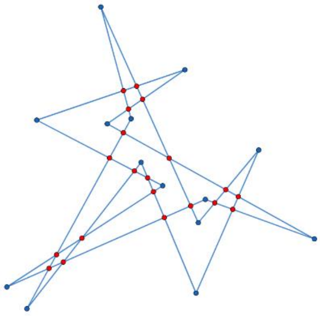
TABELA VDRTIH MNOGOKOTNIKOV				
Ime mnogokotnika	Slika mnogokotnika (Vir: avtor)	Število presečišč stranic[5]	Slika največjega števila presečišč (Vir: avtor)	Pravilo največjega števila presečišč
Štirikotnik		2, 4, 6, 8, ∞		2n
Štirikotnik		2, 4, 6, 8, 10, ∞		2n + 2

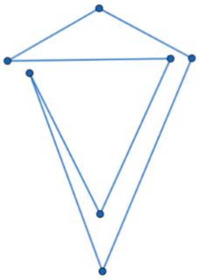
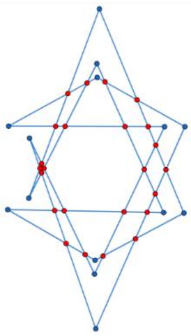
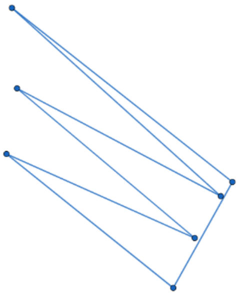
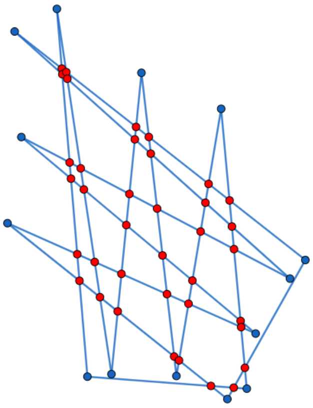
[5] Z rdečo barvo je obarvano največje število presečišč pri določenem mnogokotniku (znaka za neskončnost ne upoštevamo).

Štirikotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12,∞		3n ali 2n + 4
Štirikotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ∞		4n oziroma n^2 ali 2n + 8
Petkotnik		2, 4, 6, 8, ∞		n + 3 ali 2n - 2

Petkotnik		2, 4, 6, 8, 10, ∞		2n
Petkotnik		2, 4, 6, 8, 10, ∞		2n
Petkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ∞		3n + 3 ali 2n + 8

Šestkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, ∞		2n
Šestkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ∞		3n + 2 ali 2n + 8
Šestkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ∞		4n ali 2n + 12

Šestkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, ∞		6n oziroma n^2 ali 2n + 24
Sedemkotnik		2, 4, 6, 8, 10, ∞		n + 3 ali 2n - 4
Sedemkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ∞		2n + 6

Sedemkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ∞		3n + 3 ali 2n + 10
Sedemkotnik		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 30, 32, 34, 36, 38, ∞		5n + 3 ali 2n + 24