

»Mladi za napredek Maribora 2018«

35. srečanje

RACIONALNO VARNOSTNO ŠTEVILO

Raziskovalno področje: matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: GREGOR ŠRAJ

Mentor: IZTOK PETERIN, LILIJANA PETEK

Šola: PRVA GIMNAZIJA MARIBOR

Maribor, februar 2018

»Mladi za napredek Maribora 2018«

35. srečanje

RACIONALNO VARNOSTNO ŠTEVILO

Raziskovalno področje: matematika

Raziskovalna naloga

Maribor, februar 2018

KAZALO

1.	UVOD	7
1.1	Cilji raziskovalne naloge.....	7
1.2	Hipoteze.....	7
1.3	Metode dela.....	8
2.	TEORETIČNI DEL.....	9
2.1	Teorija grafov.....	9
2.2	Osnovne definicije Teorije grafov.....	9
2.3	Definicije nekaterih družin grafov.....	11
3.	RAZISKOVALNI DEL.....	16
3.1	Varnostno število grafa.....	16
3.2	Varnostno število nekaterih znanih družin grafov.....	17
3.2.1	Varnostno število poti.....	17
3.2.2	Varnostno število drevesa.....	18
3.2.3	Varnostno število cikla.....	19
3.2.4	Varnostno število polnega grafa.....	20
3.2.5	Varnostno število kolesa.....	22
3.2.6	Varnostno število Petersenovega grafa.....	26
4.1	Racionalno varnostno število grafa.....	35
4.2	Definicija racionalnega varnostnega števila drugače.....	36
4.3	Racionalno varnostno število nekaterih znanih družin grafov.....	39
4.3.1	Racionalno varnostno število poti.....	39
4.3.2	Racionalno varnostno število drevesa.....	40
4.3.3	Racionalno varnostno število cikla.....	41
4.3.4	Racionalno varnostno število polnega grafa.....	43
4.3.5	Racionalno varnostno število kolesa.....	45
4.3.6	Racionalno varnostno število Petersenovega grafa.....	47
5.	DRUŽBENA ODGOVORNOST.....	51
6.	ZAKLJUČEK.....	52
7.	VIRI IN LITERATURA.....	53

KAZALO SLIK

Slika 1: Pot $P5$	11
Slika 2: Drevo	11
Slika 3: Cikel $C5$	12
Slika 4: Polni graf $K5$	13
Slika 5: Kolo $W6$	14
Slika 6: Petersenov graf	15
Slika 7: Pot $P5$, ki predstavlja množici $D1 = \{v1\}$ in $A1 = \{v2\}$	17
Slika 8: Drevo, ki predstavlja $D1 = \{v1\}$ in $A1 = \{v2\}$	18
Slika 9: Cikel $C5$, ki predstavlja množici $D = \{v1, v2\}$ in $A1' = \{v3, v5\}$	19
Slika 10: Polni graf $K5$, ki predstavlja množici $D = \{v1, v2, v3\}$ in $A1' = \{v4, v5\}$	21
Slika 11: Kolo $W6$, ki predstavlja množici $D = \{v1, v2\}$ in $A1' = \{v3, v5, v6\}$	23
Slika 12: Kolo $W6$, ki predstavlja množici $D = \{v1, v2, v3\}$ in $A1' = \{v4, v5, v6\}$	25
Slika 13: Petersenov graf, ki predstavlja $S2' = \{v1, v6\}$ in $A = \{v2, v5, v8, v9\}$	27
Slika 14: Petersenov graf, ki predstavlja $S1''' = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$ in $A = \{v6, v7, v8, v9, v10\}$	34
Slika 15: Kolo $W6$, ki predstavlja množici $D = \{v1, v2, v3\}$ in $A1' = \{v4, v5, v6\}$	38
Slika 16: Pot $P5$, ki predstavlja množici $D = \{v1\}$ in $A = \{v2\}$	39
Slika 17: Cikel $C5$, ki predstavlja množici $D = \{v1\}$ in $A = \{v2, v5\}$	41
Slika 18: Polni graf $K5$, ki predstavlja množici $D = \{v1, v2\}$ in $A = \{v3, v4, v5\}$	43
Slika 19: Kolo $W6$, ki predstavlja množici $D = \{v1, v2\}$ in $A = \{v3, v5, v6\}$	46
Slika 20: Petersenov graf, ki predstavlja $D1 = \{v1, v2, v3, v4\}$ in $A = \{v5, v6, v7, v8, v9\}$	48

KAZALO TABEL

Tabela 1: Obravnavana množica $S1 = \{v1\}$	22
Tabela 2: Obravnavana množica $S2 = \{v6\}$	22
Tabela 3: Obravnavana množica $S1' = \{v1, v2\}$	23
Tabela 4: Obravnavana množica $S2' = \{v1, v6\}$	23
Tabela 5: Obravnavana množica $S1'' = \{v1, v2, v3\}$	24
Tabela 6: Obravnavana množica $S1 = \{v1\}$	26
Tabela 7: Obravnavana množica $S1' = \{v1, v2\}$	26
Tabela 8: Obravnavana množica $S2' = \{v1, v6\}$	27
Tabela 9: Obravnavana množica $S1'' = \{v1, v2, v3\}$	28
Tabela 10: Obravnavana množica $S2'' = \{v1, v2, v6\}$	28
Tabela 11: Obravnavana množica $S1''' = \{v1, v2, v3, v4\}$	29
Tabela 12: Obravnavana množica $S2''' = \{v1, v2, v3, v6\}$	29
Tabela 13: Obravnavana množica $S3''' = \{v1, v2, v3, v7\}$	30
Tabela 14: Obravnavana množica $S4''' = \{v1, v2, v6, v7\}$	31
Tabela 15: Obravnavana množica $S5''' = \{v1, v2, v6, v9\}$	31
Tabela 16: Obravnavana množica $S1'''' = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$	32

POVZETEK

V raziskovalni nalogi sem raziskoval varnostno število in racionalno varnostno število grafov. Srečal sem se s področjem matematike, imenovanim Teorija grafov. V teoretičnem delu naloge sem s pomočjo literature navedel definicije osnovnih pojmov Teorije grafov in predstavil določene družine grafov, kot so poti, drevesa, cikli, polni grafi, kolesa in Petersenov graf. V raziskovalnem delu naloge sem s pomočjo članka o varnostnem številu grafov proučeval varnostno število poti, dreves, ciklov, polnih grafov, koles in Petersenovega grafa. Oblikoval sem definicijo racionalnega varnostnega števila grafov in ga poiskal za zgoraj našete družine grafov. Kljub temu da sem želel najti primer grafa, ki bo imel racionalno varnostno število manjše od varnostnega števila, mi na teh družinah grafov to ni uspelo. Izkazalo se je namreč, da se varnostno število in racionalno varnostno število za te primere grafov ujemata.

Ključne besede: Teorija grafov, varnostno število grafa, racionalno varnostno število grafa.

ABSTRACT

In the research paper I was researching the security number and fractional security number of graphs. I came across a field of mathematics called the Graph theory. In the theoretical part of the research paper, with the help of literature, I stated some definitions about basic facts in the Graph theory. I also presented certain families of graphs paths, trees, cycles, complete graphs, wheels and the Petersen graph. In the research part of the research paper, with the help of the article about the security number of graphs, I researched the security number of paths, trees, cycles, complete graphs, wheels and the Petersen graph. I formed the definition of the fractional security number of graphs and found it for the graphs listed above. Even though I tried to find an example of a graph where the fractional security number would be lower than the security number, I did not have such luck. It turned out that the security number and fractional security number of the graphs listed above matched in all cases.

Key words: Graph theory, security number, fractional security number.

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorjema, ki sta mi bila v pomoč ob kakršnih koli matematičnih in drugih problemih ter zapisih. Vedno, ko mi kaj ni bilo jasno, sta mi razložila problem in ga tudi opisala na primerih za lažje razumevanje.

Zahvaljujem se tudi profesorici slovenščine, ki je mojo nalogo lektorirala.

Hvala tudi profesorici angleščine, ki je prevedla povzetek moje naloge.

1. UVOD

Raziskovalno nalogo na temo racionalno varnostno število grafa sem se odločil napisati zaradi spoznavanja novega področja matematike, ki ga imenujemo Teorija grafov. Motivacija za vpeljavo varnih množic in varnostnega števila so klasični vojni spopadi ali moderni kibernetični spopadi, ki jih najdemo v videoigrah. V Teoriji grafov se velikokrat uporabi model delitve celote na dele, od tod ideja za racionalno varnostno število.

1.1 Cilji raziskovalne naloge

- S pomočjo članka o varnostnem številu grafov ugotoviti varnostno število poti, dreves, ciklov, polnih grafov, koles in Petersenovega grafa.
- Vpeljati racionalno varnostno število grafov in ga raziskati na teh primerih grafov.
- Primerjati varnostno število in racionalno varnostno število posameznih grafov z željo, najti primer grafa, ki bo imel racionalno varnostno število manjše od varnostnega števila.

1.2 Hipoteze

- Določiti bo možno varnostno in racionalno varnostno število poti, dreves, ciklov, polnih grafov, koles in Petersenovega grafa.
- Varnostno število in racionalno varnostno število se bosta za določene družine grafov ujemali.
- Poiskati bo možno primer grafa, kjer je racionalno varnostno število manjše od varnostnega števila.

1.3 Metode dela

V raziskovalni nalogi sem se srečal z novim področjem matematike Teorija grafov, kjer sem vpeljal osnovne pojme s pomočjo literature. S preiskovanjem članka o varnostnem številu grafov sem proučeval primere grafov s pregledom vseh možnosti za varne množice. Ugotovitve sem posplošil s primera določene družine grafov na celotno družino grafov. Za lažjo preglednost sem konstruiral grafe v matematičnem programu Geogebra. Nato sem postopek ponovil z iskanjem racionalnega varnostnega števila in oboje primerjal.

2. TEORETIČNI DEL

2.1 Teorija grafov

Teorija grafov je mlada veja matematike, ki je razcvet doživela v zadnjih petdesetih letih z intenzivnim razvojem računalništva. Spada v področje kombinatorike ali bolj splošno diskretne matematike. Presenetljiva je njena široka uporabnost na drugih področjih matematike, kot tudi na drugih znanstvenih področjih: od že omenjenega računalništva do kemije in biologije ter družbenih ved, kot je na primer sociologija. Moč Teorije grafov je tudi v enostavni predstavitvi problemov, ki jih je možno razumeti že brez velikega predznanja matematike. Enostavni razumljivosti problemov navkljub je iskanje njihovih rešitev pogosto zelo zahtevno in jih znamo rešiti zgolj na zelo omejenih družinah in razredih grafov.

2.2 Osnovne definicije Teorije grafov

Definicija 1 Graf G sestavlja neprazna množica elementov, ki jo poimenujemo vozlišča grafa, in množica (neurejenih) parov teh elementov, ki jih imenujemo povezave grafa. Množico vozlišč grafa označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Naj bosta v in w vozlišči grafa G . Če obstaja povezava med v in w , jo označimo z vw ali wv . Vozlišči v in w sta krajišči povezave vw , medtem ko povezava vw povezuje vozlišči v in w . Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 19.

Definicija 2 Dve ali več povezav, ki povezujejo isti par vozlišč, poimenujemo večkratna povezava. Povezava, ki povezuje neko vozlišče s seboj, je povratna povezava ali zanka. Graf brez zank in večkratnih povezav poimenujemo enostaven graf. Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 19.

V naši raziskovalni nalogi se bomo omejili na enostavne grafe, saj večkratne povezave in zanke ne prinesejo sprememb pri varnostnem številu.

Definicija 3 Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$ in G' graf z množico vozlišč $V(G')$ in množico povezav $E(G')$. Če je $V(G')$ podmnožica množice $V(G)$ in

če je vsaka povezava iz množice $E(G')$ tudi v množici $E(G)$, potem je G' podgraf grafa G . Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 20.

Podgraf G' grafa G je induciran, če iz $uv \in E(G)$ sledi, da je tudi $uv \in E(G')$ za vsaki vozlišči $u, v \in V(G')$.

Definicija 4 Naj bo G graf brez zank, v pa vozlišče grafa G . Stopnja vozlišča v je število povezav, ki imajo v za eno vozlišče. Stopnjo vozlišča označimo z $d(v)$. Minimalna stopnja grafa $\delta(G)$ je definirana kot $\delta(G) = \min\{d_G(u), u \in V(G)\}$. Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 21.

Definicija 5 Naj bosta v in w vozlišči grafa. Če sta v in w povezani s povezavo, potem rečemo, da sta sosednji. Povezava $e = vw$ je incidentna z vozliščema v in w . Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 41.

Množico vozlišč $\{u \in W : uv \in E(G)\}$, ki so sosednja z v , označimo z $N_W(v)$, kjer je $W \subseteq V(G)$. Vpeljimo še oznako $N_W[v]$ za množico $N_W(v) \cup \{v\}$.

Komplement množice vozlišč S , kjer je $S \subseteq V(G)$, je množica vozlišč grafa G , ki niso vsebovana v množici S . Komplement množice S označimo s \bar{S} .

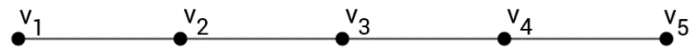
Definicija 6 Graf, ki je v enem kosu, je povezan. Graf, ki ima več delov, je nepovezan. Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 19.

2.3 Definicije nekaterih družin grafov

Definicija 7 Sprehod dolžine n v grafu G je zaporedje n povezav grafa G oblike $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Vozlišča ali povezave niso nujno različne. Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 44.

Definicija 8 Če so vse povezave sprehoda različne, potem sprehod imenujemo enostavni sprehod. Če so v enostavnem sprehodu vsa vozlišča različna, potem sprehod imenujemo pot. Pot na n vozliščih označimo s P_n . Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 45.

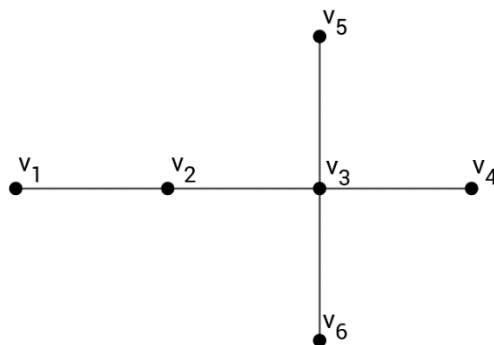
Glej sliko 1, na kateri je predstavljena pot P_5 .



Slika 1: Pot P_5

Definicija 9 Povezani graf brez ciklov imenujemo drevo. Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 51.

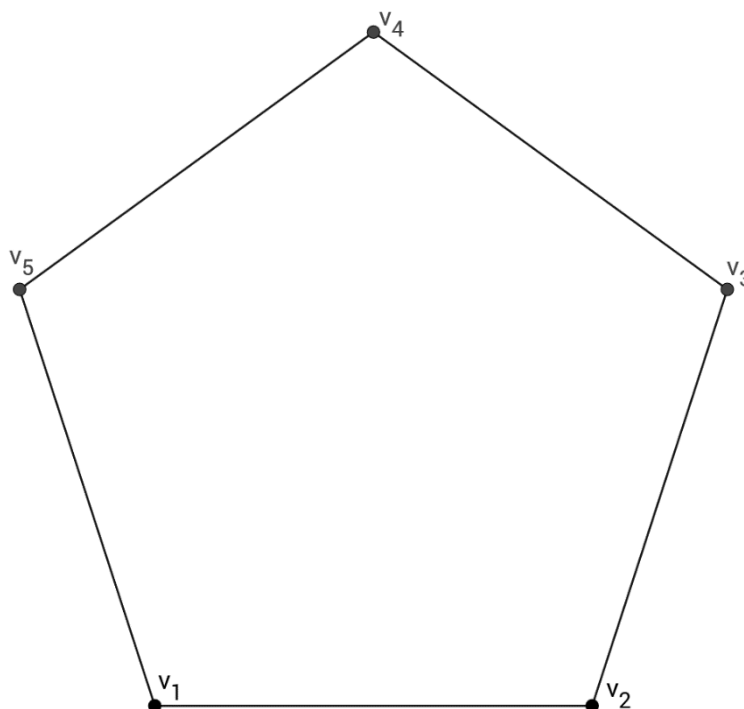
Glej sliko 2 za primer drevesa na šestih vozliščih.



Slika 2: Drevo

Definicija 10 Sklenjeni sprehod ali obhod v grafu G je zaporedje povezav grafa G oblike $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_nv_1$. Če so vse povezave obhoda različne, potem ga imenujemo enostavni obhod. Če so v obhodu vse povezave in vsa vozlišča različna, potem ga imenujemo cikel. Cikel na n vozliščih označimo s C_n . Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 46.

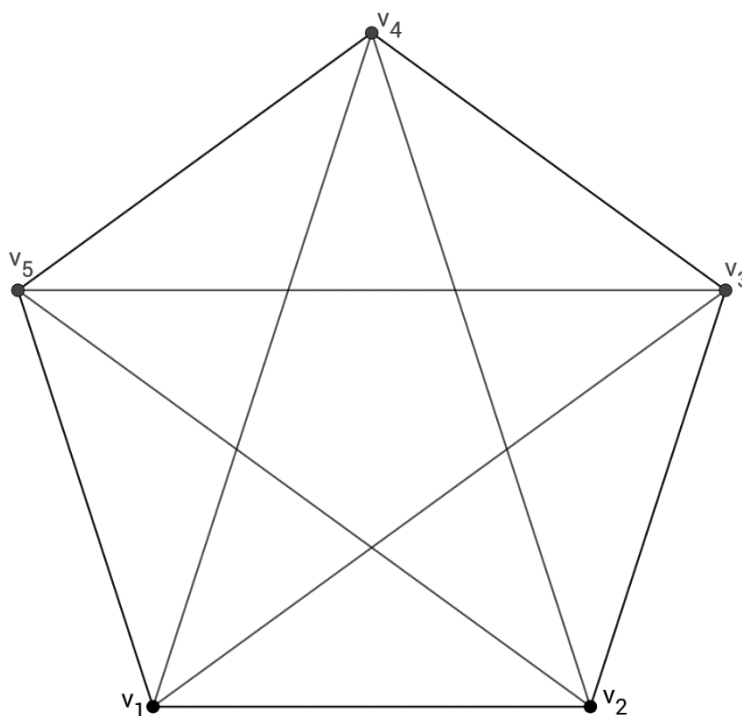
Glej sliko 3, na kateri je predstavljen cikel C_5 .



Slika 3: Cikel C_5

Definicija 11 Polni graf je graf, v katerem je vsak par različnih vozlišč povezan z natanko eno povezavo. Polni graf na n vozliščih označimo s K_n . Polne grafe običajno rišemo v obliki pravilnega mnogokotnika. Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 47.

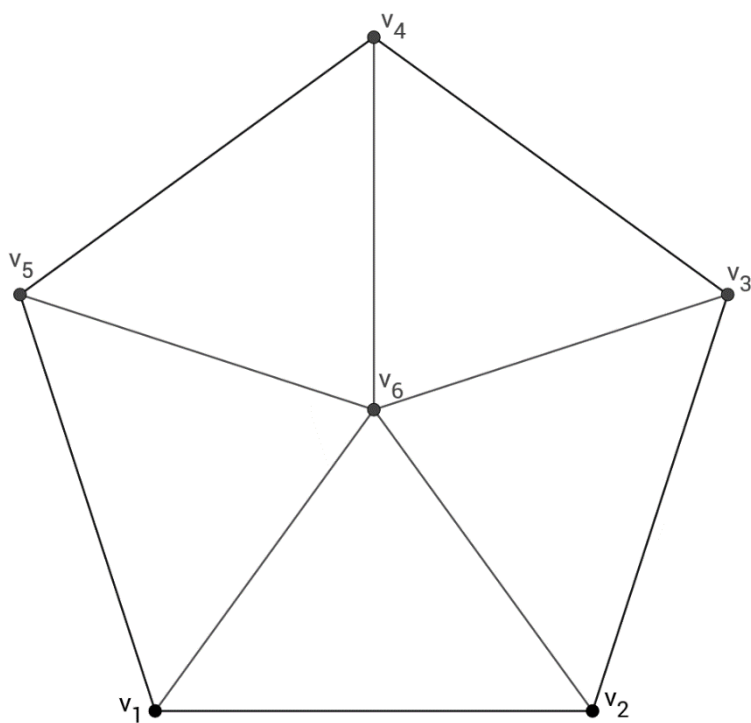
Glej sliko 4, na kateri je predstavljen polni graf K_5 .



Slika 4: Polni graf K_5

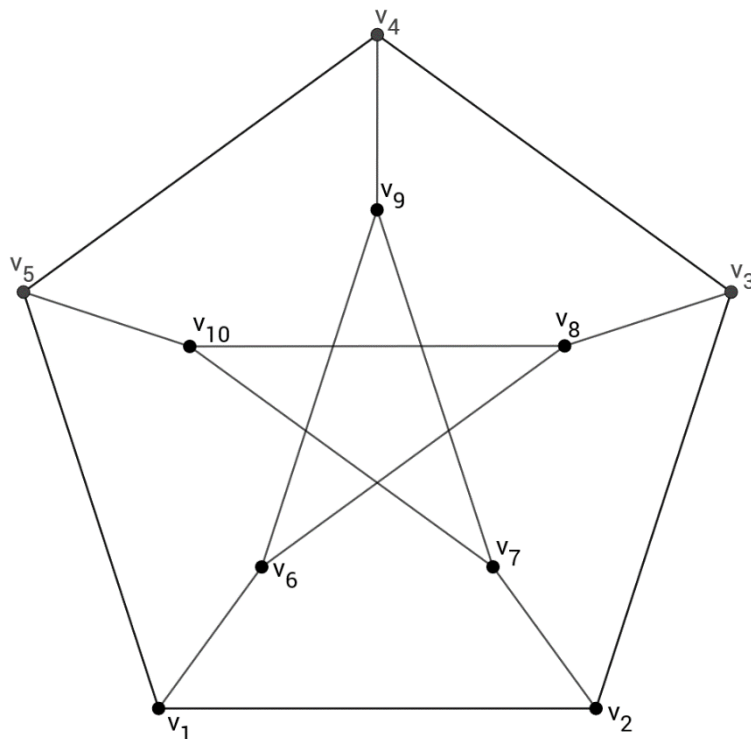
Definicija 12 Kolo na n vozliščih, kjer je $n \geq 4$, označimo z W_n , kar dobimo iz cikla C_{n-1} , ki mu dodamo eno vozlišče, ki ga povežemo z vsemi preostalimi vozlišči cikla C_{n-1} . Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 47.

Glej sliko 5, na kateri je predstavljeno kolo W_6 .



Slika 5: Kolo W_6

Naslednji primer je slavni graf, ki je znan kot Petersenov graf in ga vidimo na sliki 6. Ta graf je predstavil danski matematik Julius Petersen (1839–1910) v članku leta 1898. Povzeto po Wilson in Watkins, 1997, str. 51.



Slika 6: Petersenov graf

3. RAZISKOVALNI DEL

3.1 Varnostno število grafa

Definicija varne množice Naj bo $S \subseteq V(G)$. Vozlišče $y \in \bar{S}$ lahko napade zgolj eno vozlišče iz S , tudi če je y sosedn z več vozlišči iz S . Prav tako lahko vozlišče $x \in S$ brani le eno vozlišče iz $N_{V(G)}[x] \cap S$.

Za vsako množico $S = \{v_1, \dots, v_r\}$, ki je podmnožica množice $V(G)$, nam napad na S predstavlja družina A , ki vsebuje r med seboj paroma disjunktnih množic $A = \{A_1, \dots, A_r\}$, za katere je $A_i \subseteq N_{\bar{S}}(v_i)$, $1 \leq i \leq r$.

Obramba množice S predstavlja družino D , ki vsebuje r med seboj paroma disjunktnih množic $D = \{D_1, \dots, D_r\}$, za katere je $D_i \subseteq N_S[v_i]$, $1 \leq i \leq r$.

Napad A je ubranljiv, če obstaja obramba D , da je $|D_i| \geq |A_i|$, za vsak $1 \leq i \leq r$.

Množica S je varna, če je vsak napad na S ubranljiv.

Definicija Varnostno število $s(G)$ grafa G je kardinalnost najmanjše varne množice v grafu G .

Izrek 1 Množica S je varna v grafu G natanko tedaj, ko za vsak $X \subseteq S$ velja $|N[X] \cap S| \geq |N[X] - S|$. Celotna definicija v tem poglavju je povzeta in prevedena po Brigham, Dutton in Stephen, 2007, str. 1709.

V istem članku je tudi spodnja lastnost minimalnih varnih množic, ki nam olajša delo.

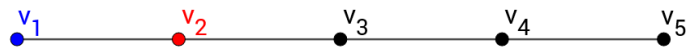
Trditev Naj bo S minimalna varna množica grafa G . Potem je induciran podgraf na množici S povezan.

3.2 Varnostno število nekaterih znanih družin grafov

3.2.1 Varnostno število poti

Na poti P_5 lahko izberemo množico $D_1 = \{v_1\}$, kjer njenega edinega soseda izberemo za množico $A_1 = \{v_2\}$. Množica D_1 se lahko obrani tega napada, iz tega sledi, da je najmanjše varnostno število poti P_5 enako 1, $s(P_5) = 1$.

Barva vozlišč Za celotno raziskovalno nalogo bo veljalo, da bo barva braniteljev modra in barva napadalcev rdeča.



Slika 7: Pot P_5 , ki predstavlja množici $D_1 = \{v_1\}$ in $A_1 = \{v_2\}$

Kar smo videli zgoraj, lahko posplošimo na vse grafe G , kjer je najmanjša stopnja vozlišča enaka 1, $\delta(P_5) = 1$. V takšnih grafih vedno velja, da je $s(G) = 1$, saj ima to vozlišče le enega soseda, kar pomeni, da ga lahko napade le ta, s čimer je že dokazana naslednja trditev.

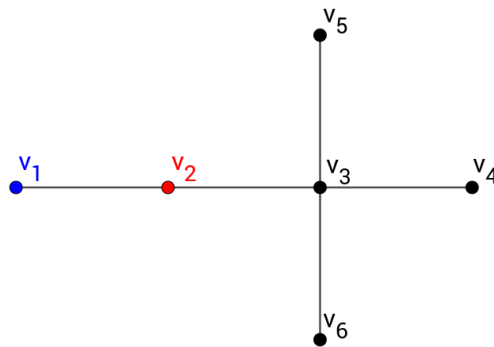
Trditev Če je $\delta(G) = 1$, potem je $s(G) = 1$.

Ker je za pot P_n $\delta(P_n) = 1$, dobimo naslednjo posledico.

Posledica Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $s(P_n) = 1$.

3.2.2 Varnostno število drevesa

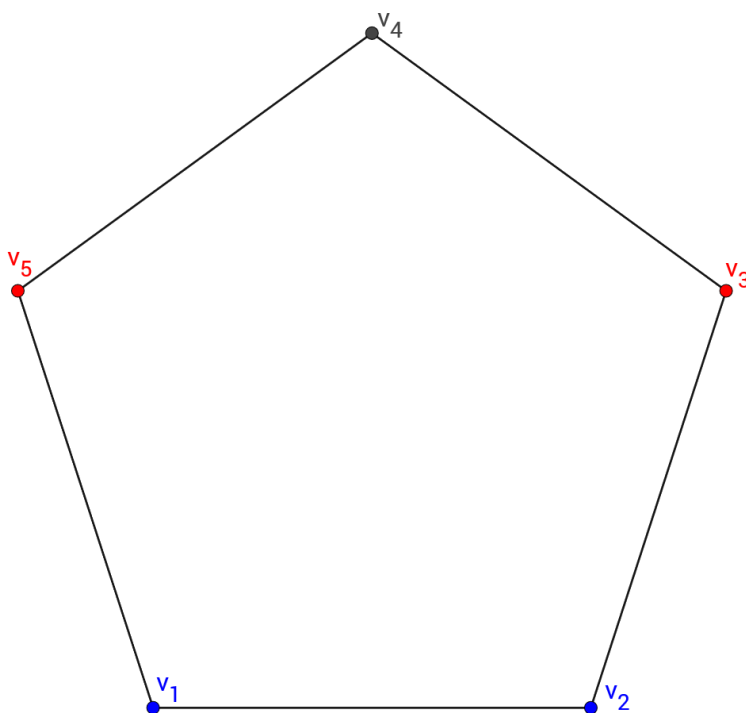
Naj bo G drevo na vsaj dveh vozliščih. Ena od značilnosti dreves je, da vsako drevo, z vsaj eno povezavo, vsebuje vozlišče stopnje 1 in velja $\delta(G) = 1$. Iz trditve v prejšnjem poglavju ugotovimo, da je $s(G) = 1$. To lahko vidimo tudi na drevesu na sliki 8, kjer se lahko $D_1 = \{v_1\}$ obrani pred napadom $A_1 = \{v_2\}$, saj je vozlišče v_1 stopnje 1.



Slika 8: Drevo, ki predstavlja $D_1 = \{v_1\}$ in $A_1 = \{v_2\}$

3.2.3 Varnostno število cikla

Na primeru cikla C_5 vidimo, če izberemo množico $D = \{v_1\}$, da lahko za množico A izberemo obe sosednji vozlišči v_1 , torej je $A = \{v_2, v_5\}$. V prvem primeru se množica $D = \{v_1\}$ ne more obraniti. Torej je $s(C_5) > 1$. Zato izberemo za obrambo $D = \{v_1, v_2\}$, kjer za napad lahko izberemo $A_1 = \{v_3\}$ in $A_2 = \{v_5\}$, ki sta edina možna napada, saj napad $A'_1 = \{v_3, v_5\}$ ni možen, ker $A'_1 \not\subseteq N(v_i)$ za $i \in \{1, 2\}$. V prvem primeru lahko $A_1 = \{v_3\}$ napade le v_2 , kjer se ta lahko obrani sam. V drugem primeru $A_2 = \{v_5\}$ lahko napade le v_1 , kjer se ta lahko obrani sam. Torej je D varna množica in velja $s(C_5) = 2$.



Slika 9: Cikel C_5 , ki predstavlja množici $D = \{v_1, v_2\}$ in $A'_1 = \{v_3, v_5\}$

Trditev Naj bo $\delta(G) \geq 2$. Če ima graf G dve sosednji vozlišči x in y stopnje 2, potem velja $s(G) = 2$.

Dokaz Z u označimo preostalega soseda od x in z v preostalega soseda od y . Če izberemo množico $D = \{w\}$, $w \in V(G)$, lahko za množico A izberemo vse njene sosede, torej je $A =$

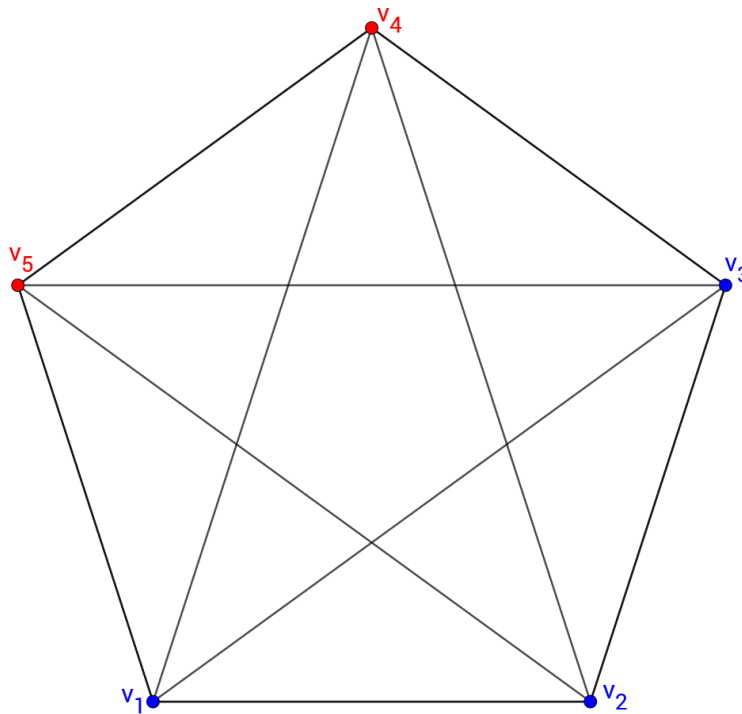
$N_G(w)$. V tem primeru se množica D ne more obraniti, saj je $|N_G(w)| > 1$. Torej je $s(G) > 1$. Zato izberemo za obrambo $D = \{x, y\}$, kjer za napad lahko izberemo $A_1 = \{u\}$ in $A_2 = \{v\}$. V prvem primeru, ko je $A_1 = \{u\}$, lahko u napade x , le-ta pa se brani sam. V drugem primeru $A_2 = \{v\}$ imamo zaradi simetrije enak primer kot pri $A_1 = \{u\}$. Zato se množica D lahko obrani. Zaradi tega je množica $D = \{x, y\}$ najmanjša varna množica v grafu G in velja $S(G) = 2$.

Posledica Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $s(C_n) = 2$.

Dokaz Vsak cikel C_n za $n \in \mathbb{N}$, ima 2 sosednji vozlišči stopnje 2 in po trditvi posledica velja.

3.2.4 Varnostno število polnega grafa

Na primeru polnega grafa K_5 na sliki 10 vidimo, če izberemo množico $D = \{v_1\}$, lahko za množico A izberemo vsa preostala vozlišča v grafu K_5 , torej je $A = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ in se množica D ne more obraniti, kar pomeni, da je $s(K_5) > 1$. Tako poskusimo z množico $D = \{v_1, v_2\}$, kjer so vsi njeni sosedi v množici A , to so $A = \{v_3, v_4, v_5\}$, ponovno je število vozlišč v množici A večje od števila vozlišč v množici D , kar pomeni, da je $s(K_5) > 2$. Ponovno poskusimo in izberemo za $D = \{v_1, v_2, v_3\}$, kjer ostanejo v grafu napadalci $A_1 = \{v_4\}$ in $A_2 = \{v_5\}$ ali $A_1' = \{v_4, v_5\}$. V prvem primeru, kjer je $A_1 = \{v_4\}$, lahko napade eno od vozlišč v_1, v_2 ali v_3 , kjer se lahko to vozlišče brani samo ali s pomočjo svojega soseda. V drugem primeru, kjer je $A_2 = \{v_5\}$, lahko ta napade eno od vozlišč v_1, v_2 ali v_3 , kjer se lahko to vozlišče brani samo ali s pomočjo svojega soseda. V primeru A_1' lahko napade eno vozlišče od v_1, v_2 ali v_3 , ki se lahko ponovno brani s pomočjo svojih sosedov. Tako ugotovimo, da je $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ varna množica. Iz tega sledi, da je $s(K_5) = 3$.



Slika 10: Polni graf K_5 , ki predstavlja množici $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ in $A_1' = \{v_4, v_5\}$

V tem primeru bomo za posplošitev varnostnega števila na vse polne grafe K_n uporabili izrek o varnih množicah.

Ker je $N[x] = V(K_n)$ za vsako vozlišče $x \in V(K_n)$, velja $|S| = |N[x] \cap S| \geq |N[x] - S| = |V(G) - S| = n - |S|$.

Iz zgornjega sledi $2|S| \geq n$, kar pomeni, da je $|S| \geq \frac{n}{2}$. Torej za sodo število $n = 2l$ velja $|S| \geq l$. V varni množici torej potrebujemo polovico vseh vozlišč in je $s(K_{2l}) = l$.

Če je n liho število, $n = 2l - 1$, potem imamo $|S| \geq l - \frac{1}{2}$ in potrebujemo l vozlišč za varno množico. Tako je $s(K_{2l-1}) = l$.

Oba rezultata lahko združimo v enoten zapis $s(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, kjer je $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ do najmanjšega celega števila navzgor zaokroženo število n . Dokazali smo naslednjo trditev.

Trditev Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $s(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

3.2.5 Varnostno število kolesa

Zaradi lažjega zapisa in razumevanja pri varnostnem številu kolesa in nekaterih nadaljnjih družin grafov bomo uporabili izrek, ki smo ga zapisali v poglavju 3.1. S tem izrekom bomo pogledali vse možnosti obrambe na grafu. To bomo predstavili s tabelami za lažjo preglednost. Za lažje razumevanje tabel si lahko pomagamo s sliko 11, ki predstavlja zadnjo vrstico tabele 3. Posebej je predstavljen še primer iz zadnje vrstice tabele 5 na sliki 12, saj je na njem predstavljena najmanjša varna množica.

V prvem primeru pogledamo, ali je možno, da je $s(W_6) = 1$. Tukaj lahko izberemo množici $S_1 = \{v_1\}$ in $S_2 = \{v_6\}$. Vse druge množice z močjo ena so simetrične tem, torej jih ne bomo posebej obravnavali.

Tabela 1: Obravnavana množica $S_1 = \{v_1\}$

X	$N[X] \cap S_1$	$N[X] - S_1$
v_1	v_1	v_2, v_5, v_6

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_1$ velja $|N[X] \cap S_1| < |N[X] - S_1|$, torej S_1 ni varna množica.

Tabela 2: Obravnavana množica $S_2 = \{v_6\}$

X	$N[X] \cap S_2$	$N[X] - S_2$
v_6	v_6	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_2$ velja $|N[X] \cap S_2| < |N[X] - S_2|$, torej S_2 ni varna množica.

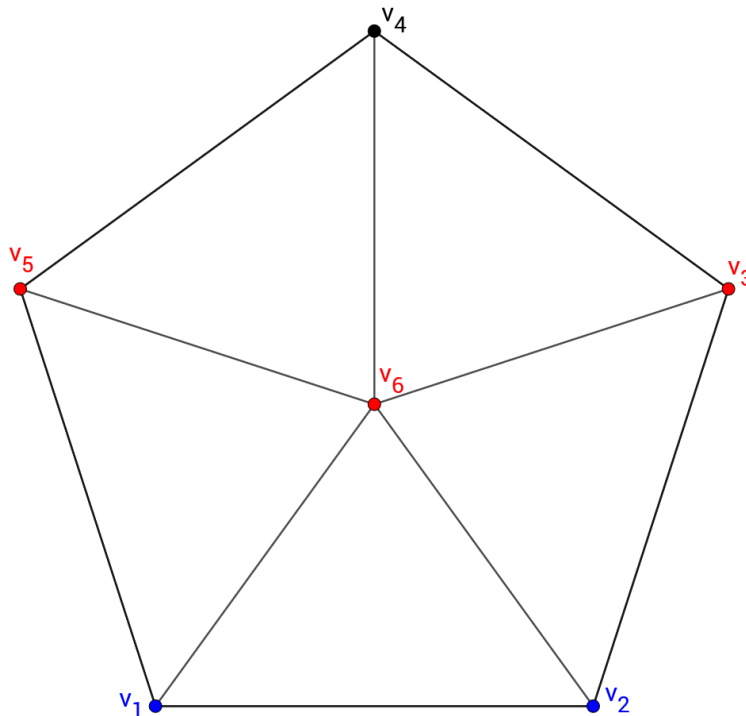
V množicah z močjo 1 nismo našli varne množice. Iz tega ugotovimo, da je $s(W_6) > 1$.

V drugem primeru pogledamo, ali je možno, da je $s(W_6) = 2$. Tukaj lahko izberemo množici $S_1' = \{v_1, v_2\}$, in $S_2' = \{v_1, v_6\}$. Vse druge množice z močjo dva so simetrične tem, torej jih ne bomo posebej obravnavali.

Tabela 3: Obravnavana množica $S_1' = \{v_1, v_2\}$

X	$N[X] \cap S_1'$	$N[X] - S_1'$
v_1	v_1, v_2	v_5, v_6
v_2	v_1, v_2	v_3, v_6
v_1, v_2	v_1, v_2	v_3, v_5, v_6

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_1'$ velja $|N[X] \cap S_1'| < |N[X] - S_1'|$, torej S_1' ni varna množica.



Slika 11: Kolo W_6 , ki predstavlja množici $D = \{v_1, v_2\}$ in $A_1' = \{v_3, v_5, v_6\}$

Tabela 4: Obravnavana množica $S_2' = \{v_1, v_6\}$

X	$N[X] \cap S_2'$	$N[X] - S_2'$
v_1	v_1, v_6	v_2, v_5
v_6	v_1, v_6	v_2, v_3, v_4, v_5
v_1, v_6	v_1, v_6	v_2, v_3, v_4, v_5

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_2'$ velja $|N[X] \cap S_2'| < |N[X] - S_2'|$, torej S_2' ni varna množica.

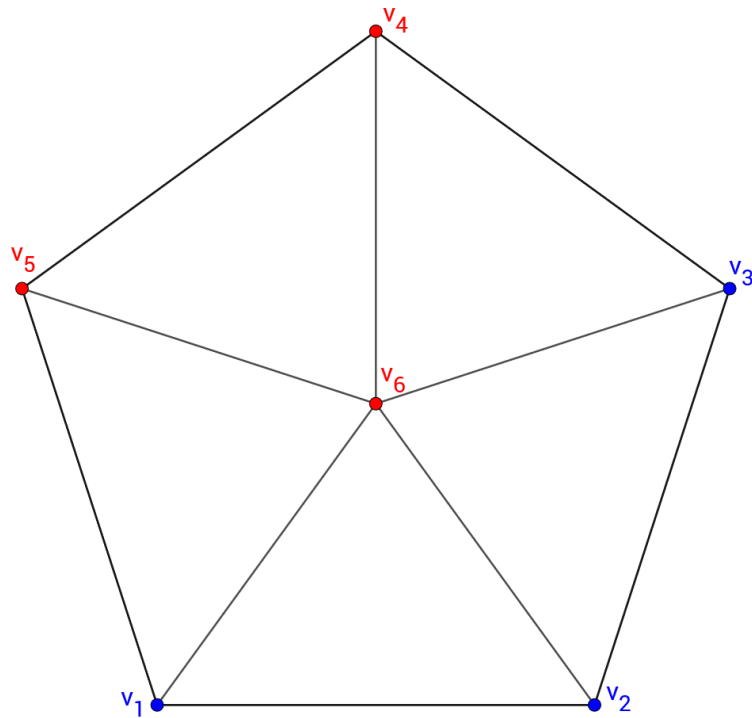
V množicah z močjo 2 nismo našli varne množice. Iz tega ugotovimo, da je $s(W_6) > 2$.

V tretjem primeru pogledamo, ali je možno, da je $s(W_6) = 3$. Tukaj lahko izberemo množice $S_1'' = \{v_1, v_2, v_3\}$, $S_2'' = \{v_1, v_2, v_6\}$ in $S_3'' = \{v_1, v_3, v_6\}$. Vse druge množice z močjo tri so simetrične tem, torej jih ne bomo posebej obravnavali.

Tabela 5: Obravnavana množica $S_1'' = \{v_1, v_2, v_3\}$

X	$N[X] \cap S_1''$	$N[X] - S_1''$
v_1	v_1, v_2	v_5, v_6
v_2	v_1, v_2, v_3	v_6
v_3	v_2, v_3	v_4, v_6
v_1, v_2	v_1, v_2, v_3	v_5, v_6
v_1, v_3	v_1, v_2, v_3	v_4, v_5, v_6
v_2, v_3	v_1, v_2, v_3	v_4, v_6
v_1, v_2, v_3	v_1, v_2, v_3	v_4, v_5, v_6

Ko imamo množico $S_1'' = \{v_1, v_2, v_3\}$, vidimo, da se lahko obrani ob vseh napadih, ki lahko nastopijo v kolesu W_6 . Iz tega sledi, da je $s(W_6) = 3$. Ker smo našli primer, za katerega to velja, preostalih možnosti, ki smo jih zapisali, ni potrebno pregledati.



Slika 12: Kolo W_6 , ki predstavlja množici $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ in $A_1' = \{v_4, v_5, v_6\}$

Pri posplošitvi na vsa kolesa ugotovimo, da je $W_4 = K_4$, torej za kolo W_4 velja enako pravilo kot za polne grafe, ki smo ga zapisali v poglavju 3.2.4 in je $s(K_n) = 2$.

Pri vseh preostalih kolesih $W_n, n \geq 5$ velja enako kot v kolesu W_6 , saj bodo vozlišča v_1, v_2 in v_3 imela v vseh polnih grafih enako število sosedov izven varne množice D . Zaradi tega velja $s(W_n) = 3, n \geq 5$.

3.2.6 Varnostno število Petersenovega grafa

Pri varnostnem številu Petersenovega grafa bomo ponovno uporabili izrek o varnostnem številu, kjer bomo pregledali vse možnosti. To bomo predstavili s tabelami za lažjo preglednost. Za lažje razumevanje tabel si lahko pomagamo s sliko 13, ki predstavlja zadnjo vrstico tabele 8. Posebej je še predstavljen primer iz zadnje vrstice tabele 16 na sliki 14, saj je na njem predstavljena najmanjša varna množica.

Naj bo G Petersenov graf. V prvem primeru pogledamo, ali je možno, da je $s(G) = 1$. Tukaj lahko izberemo množici $S_1 = \{v_1\}$. Vse druge množice z močjo ena so simetrične tem, ker tudi zvezda v notranjosti predstavlja podobno sliko kot zunanji cikel, ker je zvezda le cikel, zapisan nekoliko drugače. Torej jih ne bomo posebej obravnavali.

Tabela 6: Obravnavana množica $S_1 = \{v_1\}$

X	$N[X] \cap S_1$	$N[X] - S_1$
v_1	v_1	v_2, v_5, v_6

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_1$ velja $|N[X] \cap S_1| < |N[X] - S_1|$, torej S_1 ni varna množica.

V množici z močjo 1 nismo našli varne množice. Iz tega ugotovimo, da je $s(G) > 1$.

V drugem primeru pogledamo, ali je možno, da je $s(G) = 2$. Tukaj lahko izberemo množice $S_1' = \{v_1, v_2\}$ in $S_2' = \{v_1, v_6\}$. Vse druge množice z močjo dva so simetrične tem, torej jih ne bomo posebej obravnavali.

Tabela 7: Obravnavana množica $S_1' = \{v_1, v_2\}$

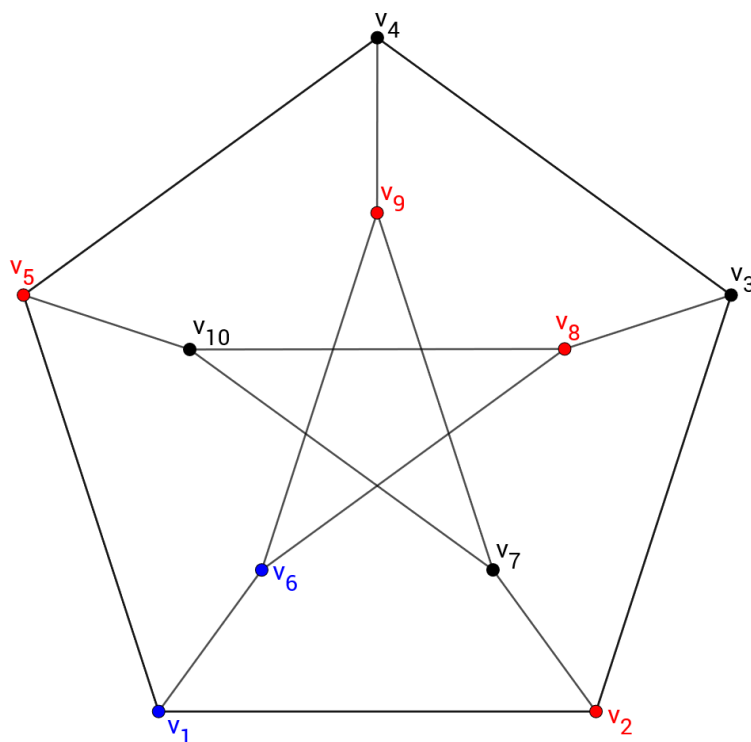
X	$N[X] \cap S_1'$	$N[X] - S_1'$
v_1	v_1, v_2	v_5, v_6
v_2	v_1, v_2	v_3, v_7
v_1, v_2	v_1, v_2	v_3, v_5, v_6, v_7

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_1'$ velja $|N[X] \cap S_1'| < |N[X] - S_1'|$, torej S_1' ni varna množica.

Tabela 8: Obravnavana množica $S_2' = \{v_1, v_6\}$

X	$N[X] \cap S_2'$	$N[X] - S_2'$
v_1	v_1, v_6	v_2, v_5
v_6	v_1, v_6	v_8, v_9
v_1, v_6	v_1, v_6	v_2, v_5, v_8, v_9

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_2'$ velja $|N[X] \cap S_2'| < |N[X] - S_2'|$, torej S_2' ni varna množica.



Slika 13: Petersenov graf, ki predstavlja $S_2' = \{v_1, v_6\}$ in $A = \{v_2, v_5, v_8, v_9\}$

V množicah z močjo 2 nismo našli varne množice. Iz tega ugotovimo, da je $s(G) > 2$.

V tretjem primeru pogledamo, ali je možno, da je $s(G) = 3$. Tukaj lahko izberemo množice $S_1'' = \{v_1, v_2, v_3\}$ in $S_2'' = \{v_1, v_2, v_6\}$. Vse druge množice z močjo tri so simetrične tem, torej jih ne bomo posebej obravnavali.

Tabela 9: Obravnavana množica $S_1'' = \{v_1, v_2, v_3\}$

X	$N[X] \cap S_1''$	$N[X] - S_1''$
v_1	v_1, v_2	v_5, v_6
v_2	v_1, v_2, v_3	v_7
v_3	v_2, v_3	v_4, v_8
v_1, v_2	v_1, v_2, v_3	v_5, v_6, v_7
v_1, v_3	v_1, v_2, v_3	v_4, v_5, v_6, v_8
v_2, v_3	v_1, v_2, v_3	v_4, v_7, v_8
v_1, v_2, v_3	v_1, v_2, v_3	v_4, v_5, v_6, v_7, v_8

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_1''$ velja $|N[X] \cap S_1''| < |N[X] - S_1''|$, torej S_1'' ni varna množica.

Tabela 10: Obravnavana množica $S_2'' = \{v_1, v_2, v_6\}$

X	$N[X] \cap S_2''$	$N[X] - S_2''$
v_1	v_1, v_2, v_6	v_5
v_2	v_1, v_2	v_3, v_7
v_6	v_1, v_6	v_8, v_9
v_1, v_2	v_1, v_2, v_6	v_3, v_5, v_7
v_1, v_6	v_1, v_2, v_6	v_5, v_8, v_9
v_2, v_6	v_1, v_2, v_6	v_3, v_7, v_8, v_9
v_1, v_2, v_6	v_1, v_2, v_6	v_3, v_5, v_7, v_8, v_9

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_2''$ velja $|N[X] \cap S_2''| < |N[X] - S_2''|$, torej S_2'' ni varna množica.

V množicah z močjo 3 nismo našli varne množice. Iz tega ugotovimo, da je $s(G) > 3$.

V četrtem primeru pogledamo, ali je možno, da je $s(G) = 4$. Tukaj lahko izberemo množice $S_1''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $S_2''' = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$, $S_3''' = \{v_1, v_2, v_3, v_7\}$, $S_4''' = \{v_1, v_2, v_6, v_7\}$ in $S_5''' = \{v_1, v_2, v_6, v_9\}$. Vse druge množice z močjo štiri so simetrične tem, torej jih ne bomo posebej obravnavali.

Tabela 11: Obravnavana množica $S_1''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

X	$N[X] \cap S_1''$	$N[X] - S_1''$
v_1	v_1, v_2	v_5, v_6
v_2	v_1, v_2, v_3	v_7
v_3	v_2, v_3, v_4	v_8
v_4	v_3, v_4	v_5, v_9
v_1, v_2	v_1, v_2, v_3	v_5, v_6, v_7
v_1, v_3	v_1, v_2, v_3, v_4	v_5, v_6, v_8
v_1, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4	v_5, v_6, v_9
v_2, v_3	v_1, v_2, v_3, v_4	v_7, v_8
v_2, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4	v_5, v_7, v_9
v_3, v_4	v_2, v_3, v_4	v_5, v_8, v_9
v_1, v_2, v_3	v_1, v_2, v_3, v_4	v_5, v_6, v_7, v_8
v_1, v_2, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4	v_5, v_6, v_7, v_9
v_1, v_3, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4	v_5, v_6, v_8, v_9
v_2, v_3, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4	v_5, v_7, v_8, v_9
v_1, v_2, v_3, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4	v_5, v_6, v_7, v_8, v_9

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_1'''$ velja $|N[X] \cap S_1'''| < |N[X] - S_1'''|$, torej S_1''' ni varna množica.

Tabela 12: Obravnavana množica $S_2''' = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$

X	$N[X] \cap S_2''$	$N[X] - S_2''$
v_1	v_1, v_2, v_6	v_5
v_2	v_1, v_2, v_3	v_7
v_3	v_2, v_3	v_4, v_8

v_6	v_1, v_6	v_8, v_9
v_1, v_2	v_1, v_2, v_3, v_6	v_5, v_7
v_1, v_3	v_1, v_2, v_3, v_6	v_4, v_5, v_8
v_1, v_6	v_1, v_2, v_6	v_5, v_8, v_9
v_2, v_3	v_1, v_2, v_3	v_4, v_7, v_8
v_2, v_6	v_1, v_2, v_3, v_6	v_7, v_8, v_9
v_3, v_6	v_1, v_2, v_3, v_6	v_4, v_8, v_9
v_1, v_2, v_3	v_1, v_2, v_3, v_6	v_4, v_5, v_7, v_8
v_1, v_2, v_6	v_1, v_2, v_3, v_6	v_5, v_7, v_8, v_9
v_1, v_3, v_6	v_1, v_2, v_3, v_6	v_4, v_5, v_8, v_9
v_2, v_3, v_6	v_1, v_2, v_3, v_6	v_4, v_7, v_8, v_9
v_1, v_2, v_3, v_6	v_1, v_2, v_3, v_6	v_4, v_5, v_7, v_8, v_9

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_2'''$ velja $|N[X] \cap S_2'''| < |N[X] - S_2'''|$, torej S_2''' ni varna množica.

Tabela 13: Obravnavana množica $S_3''' = \{v_1, v_2, v_3, v_7\}$

X	$N[X] \cap S_3'''$	$N[X] - S_3'''$
v_1	v_1, v_2	v_5, v_6
v_2	v_1, v_2, v_3, v_7	
v_3	v_2, v_3	v_4, v_8
v_7	v_2, v_7	v_9, v_{10}
v_1, v_2	v_1, v_2, v_3, v_7	v_5, v_6
v_1, v_3	v_1, v_2, v_3	v_4, v_5, v_6, v_8
v_1, v_7	v_1, v_2, v_7	v_5, v_6, v_9, v_{10}
v_2, v_3	v_1, v_2, v_3, v_7	v_4, v_8
v_2, v_7	v_1, v_2, v_3, v_7	v_9, v_{10}
v_3, v_7	v_2, v_3, v_7	v_4, v_8, v_9, v_{10}
v_1, v_2, v_3	v_1, v_2, v_3, v_7	v_4, v_5, v_6, v_8
v_1, v_2, v_7	v_1, v_2, v_3, v_7	v_5, v_6, v_9, v_{10}
v_1, v_3, v_7	v_1, v_2, v_3, v_7	$v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}$

v_2, v_3, v_7	v_1, v_2, v_3, v_7	v_4, v_8, v_9, v_{10}
v_1, v_2, v_3, v_7	v_1, v_2, v_3, v_7	$v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}$

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_3'''$ velja $|N[X] \cap S_3'''| < |N[X] - S_3'''|$, torej S_3''' ni varna množica.

Tabela 14: Obravnavana množica $S_4''' = \{v_1, v_2, v_6, v_7\}$

X	$N[X] \cap S_4'''$	$N[X] - S_4'''$
v_1	v_1, v_2, v_6	v_5
v_2	v_1, v_2, v_7	v_3
v_6	v_1, v_6	v_8, v_9
v_7	v_2, v_7	v_9, v_{10}
v_1, v_2	v_1, v_2, v_6, v_7	v_3, v_5
v_1, v_6	v_1, v_2, v_6	v_5, v_8, v_9
v_1, v_7	v_1, v_2, v_6, v_7	v_5, v_9, v_{10}
v_2, v_6	v_1, v_2, v_6, v_7	v_3, v_8, v_9
v_2, v_7	v_1, v_2, v_7	v_3, v_9, v_{10}
v_6, v_7	v_1, v_2, v_6, v_7	v_8, v_9, v_{10}
v_1, v_2, v_6	v_1, v_2, v_6, v_7	v_3, v_5, v_8, v_9
v_1, v_2, v_7	v_1, v_2, v_6, v_7	v_3, v_5, v_9, v_{10}
v_1, v_6, v_7	v_1, v_2, v_6, v_7	v_5, v_8, v_9, v_{10}
v_2, v_6, v_7	v_1, v_2, v_6, v_7	v_3, v_8, v_9, v_{10}
v_1, v_2, v_6, v_7	v_1, v_2, v_6, v_7	$v_3, v_5, v_8, v_9, v_{10}$

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_4'''$ velja $|N[X] \cap S_4'''| < |N[X] - S_4'''|$, torej S_4''' ni varna množica.

Tabela 15: Obravnavana množica $S_5''' = \{v_1, v_2, v_6, v_9\}$

X	$N[X] \cap S_5'''$	$N[X] - S_5'''$
-----	--------------------	-----------------

v_1	v_1, v_2, v_6	v_5
v_2	v_1, v_2	v_3, v_7
v_6	v_1, v_6, v_9	v_8
v_9	v_6, v_9	v_4, v_7
v_1, v_2	v_1, v_2, v_6	v_3, v_5, v_7
v_1, v_6	v_1, v_2, v_6, v_9	v_5, v_8
v_1, v_9	v_1, v_2, v_6, v_9	v_4, v_5, v_7
v_2, v_6	v_1, v_2, v_6, v_9	v_3, v_7, v_8
v_2, v_9	v_1, v_2, v_6, v_9	v_3, v_4, v_7
v_6, v_9	v_1, v_6, v_9	v_4, v_7, v_8
v_1, v_2, v_6	v_1, v_2, v_6, v_9	v_3, v_5, v_7, v_8
v_1, v_2, v_9	v_1, v_2, v_6, v_9	v_3, v_4, v_5, v_7
v_1, v_6, v_9	v_1, v_2, v_6, v_9	v_4, v_5, v_7, v_8
v_2, v_6, v_9	v_1, v_2, v_6, v_9	v_3, v_4, v_7, v_8
v_1, v_2, v_6, v_9	v_1, v_2, v_6, v_9	v_3, v_4, v_5, v_7, v_8

V tem primeru izrek ne velja, saj za nekatere podmnožice $X \subseteq S_5'''$ velja $|N[X] \cap S_5'''| < |N[X] - S_5'''|$, torej S_5''' ni varna množica.

V množicah z močjo 4 nismo našli varne množice. Iz tega ugotovimo, da je $s(G) > 4$.

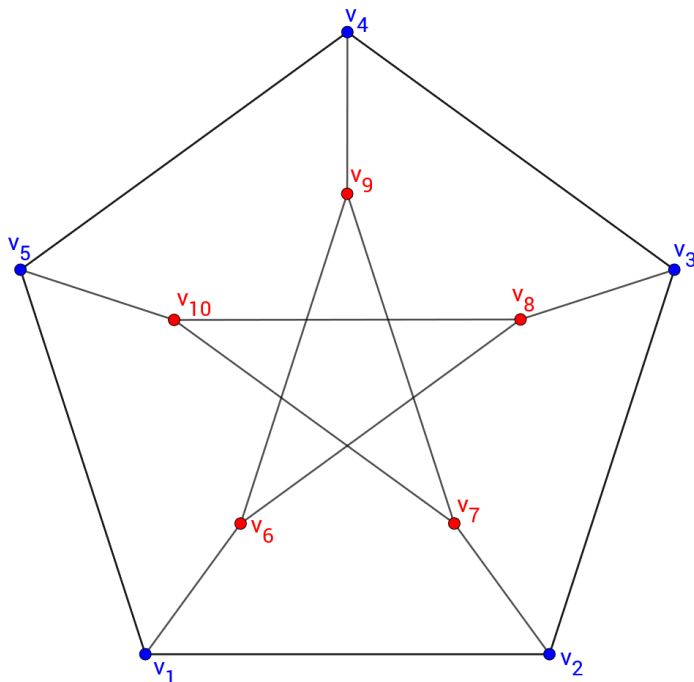
V petem primeru pogledamo, ali je možno, da je $s(G) = 5$. Tukaj lahko izberemo množice $S_1'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $S_2'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$, $S_3'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$, $S_4'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7\}$, $S_5'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_8\}$, $S_6'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_9\}$, $S_7'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_7, v_9\}$ in $S_8'''' = \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_9\}$. Vse druge množice z močjo pet so simetrične tem, torej jih ne bomo posebej obravnavali.

Tabela 16: Obravnavana množica $S_1'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

X	$N[X] \cap S_1''''$	$N[X] - S_1''''$
-----	---------------------	------------------

v_1	v_1, v_2, v_5	v_6
v_2	v_1, v_2, v_3	v_7
v_3	v_2, v_3, v_4	v_8
v_4	v_3, v_4, v_5	v_9
v_5	v_1, v_4, v_5	v_{10}
v_1, v_2	v_1, v_2, v_3, v_5	v_6, v_7
v_1, v_3	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_8
v_1, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_9
v_1, v_5	v_1, v_2, v_4, v_5	v_6, v_{10}
v_2, v_3	v_1, v_2, v_3, v_4	v_7, v_8
v_2, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_7, v_9
v_2, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_7, v_{10}
v_3, v_4	v_2, v_3, v_4, v_5	v_8, v_9
v_3, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_8, v_{10}
v_4, v_5	v_1, v_3, v_4, v_5	v_9, v_{10}
v_1, v_2, v_3	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_7, v_8
v_1, v_2, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_7, v_9
v_1, v_2, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_7, v_{10}
v_1, v_3, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_8, v_9
v_1, v_3, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_8, v_{10}
v_2, v_3, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_7, v_8, v_9
v_2, v_3, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_7, v_8, v_{10}
v_2, v_4, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_7, v_9, v_{10}
v_3, v_4, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_8, v_9, v_{10}
v_1, v_2, v_3, v_4	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_7, v_8, v_9
v_1, v_2, v_3, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_7, v_8, v_{10}
v_1, v_2, v_4, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_7, v_9, v_{10}
v_1, v_3, v_4, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_6, v_8, v_9, v_{10}
v_2, v_3, v_4, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_7, v_8, v_9, v_{10}
v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	$v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$

Pri množici $S_1'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ lahko vidimo, da izrek velja za vse podmnožice $X \subseteq S_1''''$, kar pomeni, da je množica $S_1'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ varna množica, saj se lahko le ta obrani vseh napadov. Iz tega sledi, da je $s(G) = 5$. Ker smo našli primer, kjer je $s(G) = 5$, ni potrebno pregledati preostalih možnosti, ki smo jih zapisali zgoraj.



Slika 14: Petersenov graf, ki predstavlja $S_1'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ in $A = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$

Kot smo ugotovili že na teh relativno majhnih grafih, je iskanje varnostnega števila zelo zahtevno in zamudno. Že pri grafu z desetimi vozlišči smo morali pregledati kar nekaj možnosti, kljub uporabi izreka, ki olajša delo.

4.1 Racionalno varnostno število grafa

Poskusimo zaobiti dejstvo o napadanju in branjenju le enega vozlišča tako, da vozlišča delimo na dele oziroma racionalna števila. Tako bi eno vozlišče lahko svojo moč napada ali obrambe razdelilo na več delov, ki bi jih nato lahko poslalo na različne lokacije. V definiciji racionalne varne množice ne zahtevamo disjunktnosti množic A_i in ne disjunktnosti množic D_i , kar je bistvena razlika v primerjavi z varno množico.

Definicija za napad Naj bo G graf in $D = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V(G)$. Napad na množico D nam predstavljajo množice $A = \{A_1, \dots, A_r\}$, za katere je $A_i \subseteq N_{\bar{S}}(v_i)$ za vsak $1 \leq i \leq r$.

Definicija za obrambo Naj bo $A = \{A_1, \dots, A_r\}$ napad na množico $D = \{v_1, \dots, v_r\}$. Obramba množice D pred napadom množice A je družina množic D_1, \dots, D_r , kjer je $D_i \subseteq N_D[v_i]$ za vsak $1 \leq i \leq r$.

Definicija ubranljivosti Naj bo $A = \{A_1, \dots, A_r\}$ napad na množico $D = \{v_1, \dots, v_r\}$ in $\{D_1, \dots, D_r\}$ naj bo obramba množice D pred množico A . Vsako vozlišče $u \in A_i$ delimo na racionalna števila $f_{A_i}(u)$, kjer velja $\sum_{i=1}^{k_u} f_{A_i}(u) \leq 1$ in je k_u število, na koliko racionalnih števil razdelimo u . Prav tako vozlišče $u \in D_i$ delimo na racionalna števila $f_{D_i}(u)$, kjer velja $\sum_{i=1}^{l_u} f_{D_i}(u) \leq 1$ in je l_u število, na koliko racionalnih števil razdelimo u . Velikost napada na vozlišče v_i je število $a_i = \sum_{u \in A_i} f_{A_i}(u)$. Velikost obrambe vozlišča v_i je število $d_i = \sum_{u \in D_i} f_{D_i}(u)$. Napad A je ubranljiv, če obstaja obramba D , da je $a_i \leq d_i$ za vsak $1 \leq i \leq r$. Množica D je racionalno varna, če je vsak napad ubranljiv.

Definicija Kardinalnost najmanjše racionalno varne množice imenujemo racionalno varnostno število grafa G , kar označimo s $s_f(G)$.

4.2 Definicija racionalnega varnostnega števila drugače

Drugačen opis napada

Naj bo $A = \{A_1, \dots, A_r\}$ napad na množico $D = \{v_1, \dots, v_r\}$ in $\{D_1, \dots, D_r\}$ je obramba množice D . Naj bo $A' = A_1 \cup \dots \cup A_r$. Vsoti $\sum_{u \in A_i} f_{A_i}(u)$ lahko dodamo nekaj ničel, ki predstavljajo $f_{A_i}(v)$, kjer je $v \in A' - A_i$. Tako lahko pišemo $a_i = \sum_{u \in A_i} f_{A_i}(u) = \sum_{u \in A'} f_{A_i}(u)$. Podobno lahko vsoti $\sum_{u \in D_i} f_{D_i}(u)$ dodamo ničle, ki predstavljajo $f_{D_i}(v)$ za $v \in D - D_i$, kar je velikost enot, ki priskočijo na pomoč v_i pri napadu nanj. Tako velja $d_i = \sum_{u \in D_i} f_{D_i}(u) = \sum_{u \in D} f_{D_i}(u)$.

Zaradi lažjega zapisa lahko za vsak $u \in A'$ zamenjamo zapis $f_{A_i}(u) = u_i$ za vsak $1 \leq i \leq r$.

Tako imamo ulomke u_1, \dots, u_r , za katere velja:

- če u ni sosed od v_i , potem je $u_i = 0$;
- če je u sosed od v_i , potem je $0 \leq u_i \leq 1$;
- $u_1 + \dots + u_r \leq 1$.

Drugačen opis obrambe

Ponovno zaradi lažjega zapisa lahko za vsak $v_i \in D$ zamenjamo zapis $f_{D_i}(v_j) = v_j^i$ za vsak $1 \leq i \leq r$. Tako imamo ulomke $v_1^i, v_2^i, \dots, v_r^i$, za katere velja:

- če v_j ni sosed od v_i , potem je $v_j^i = 0$;
- če $v_j \in N_D[v_i]$, potem je $0 \leq v_j^i \leq 1$;
- $v_1^i + v_2^i + \dots + v_r^i \leq 1$.

Zaradi poenostavljenega zapisa je $a_i = \sum_{u \in A'} u_i$ in $d_i = \sum_{v_j \in D} v_j^i$.

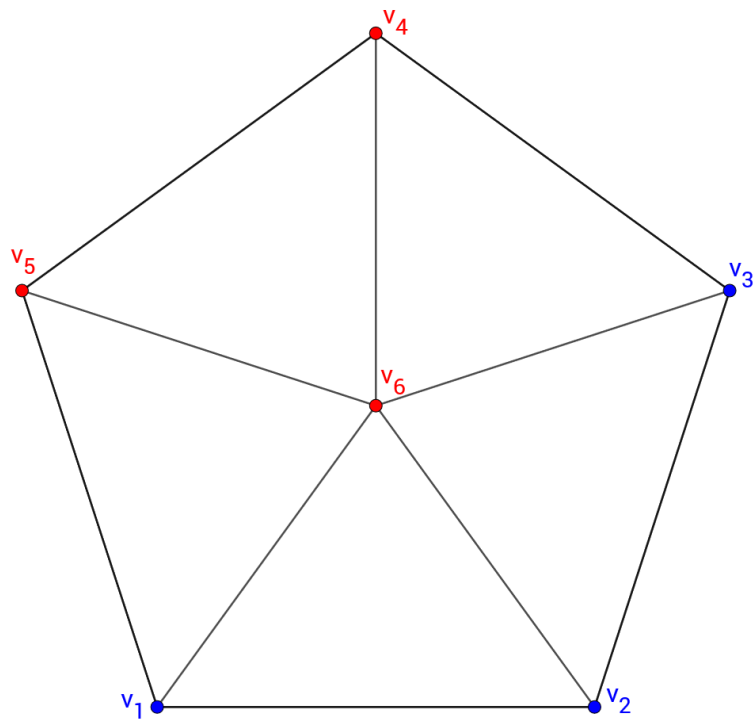
Obramba D obrani napad A , če za vsak $1 \leq i \leq r$ velja $a_i \leq d_i$.

Za lažje razumevanje uvedenih zapisov bomo tukaj naredili primer na kolesu W_6 . Na njem bo opisan način delitve in pojasnjeni bodo zapisi, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju raziskovalne naloge.

Nad koordinato, kjer bo zapisana moč, s katero vozlišče napada ali pa se brani, bo zapisano vozlišče, na katerega je izveden ta napad ali pred katerim je izvedena obramba.

Na kolesu spodaj bomo naredili primer delitve vozlišč na isto varnostno število kot v prejšnjem poglavju, kasneje bomo še poskusili poiskati racionalno varnostno število, ki bo manjše od tega, ki ga bomo predstavili tukaj.

V tem primeru je $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ in $A = \{v_4, v_5, v_6\}$. Tukaj lahko vozlišči v_4 in v_5 napadata le njuni sosednji vozlišči, torej bosta koordinati, ki bosta napadali vozlišči, katerima nista sosednji, enaki 0, kot smo zapisali v dokazu. Tako ti dve vozlišči zapišemo kot $v_4(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{1})$ in $v_5(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0})$. Lahko bi bil seštevek moči napada tega vozlišča manj kot 1, vendar je zaželeno, da napada z vso močjo pri določanju varnostnega števila, saj če se to ne zgodi, ne moremo govoriti o najmanjšem varnostnem številu v grafu. Vozlišču v_6 , ki ima več sosed, pa lahko delimo poljubno, kakor želimo, pomembno je le, da je seštevek teh napadov manjši ali enak 1. Temu vozlišču tako lahko dodelimo vrednosti $v_6(\frac{v_1}{\frac{1}{3}}, \frac{v_2}{\frac{1}{3}}, \frac{v_3}{\frac{1}{3}})$, na tak način pošlje k vsakemu sosedu $\frac{1}{3}$ svoje skupne moči, ki je enaka 1. Obramba tako želi ta napad obraniti in se vozlišči v_1 in v_3 obranita sami s svojo polno močjo, kar zapišemo kot $v_1(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0})$ in $v_3(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{1})$. Ob tem še vedno napada vozlišče v_6 vsa vozlišča z močjo $\frac{1}{3}$, kar pa obrani vozlišče v_2 , ki se razdeli na podoben način, torej $v_2(\frac{v_1}{\frac{1}{3}}, \frac{v_2}{\frac{1}{3}}, \frac{v_3}{\frac{1}{3}})$. Kot smo pokazali tukaj, je $a_1 = \frac{4}{3}$, kar je seštevek vseh napadov na v_1 , in tudi $d_1 = \frac{4}{3}$, kar je seštevek vseh obramb od v_1 , torej je $a_1 \leq d_1$ in se lahko v_1 obrani napada. Tako je tudi $a_2 = \frac{1}{3}$, kjer je $d_2 = \frac{1}{3}$, to pomeni, da je $a_2 \leq d_2$. Kot zadnje je $a_3 = \frac{4}{3}$ in tudi $d_3 = \frac{4}{3}$, to pomeni, da je $a_3 \leq d_3$. Iz tega sledi, da je D varna množica na kolesu W_6 .



Slika 15: Kolo W_6 , ki predstavlja množici $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ in $A_1' = \{v_4, v_5, v_6\}$

4.3 Racionalno varnostno število nekaterih znanih družin grafov

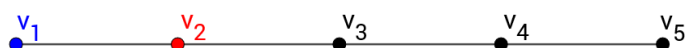
Pri delitvi vozlišč na ulomke bomo ponovno pogledali vse znane družine grafov, ki smo jih že obravnavali v tej raziskovalni nalogi. S to delitvijo bomo poskušali poiskati manjšo varnostno število grafa, kot je možno brez delitve. To varnostno število smo poimenovali racionalno varnostno število.

4.3.1 Racionalno varnostno število poti

Varnostno število poti P_n je $s(P_n) = 1$, kot smo ugotovili v poglavju 3.2.1. Tukaj bomo poskusili poiskati manjše racionalno varnostno število grafa, torej $s_f(P_n) < 1$. Varnostno število tako kot racionalno varnostno število mora biti celo število, zato bi morale biti $s_f(P_n) = 0$, kar pa ni mogoče, saj varnostno število tako kot racionalno varnostno število ne more biti enako 0. Tako smo ugotovili, da z deljenjem vozlišč ne dobimo manjšega varnostnega števila pri poti.

Sedaj pa je še potrebno pogledati, ali je racionalno varnostno število enako varnostnemu številu ali pa se s tem poveča varnostno število poti.

Če želimo pokazati, da sta varnostno in racionalno varnostno število enaki, izberemo $D = \{v_1\}$ in $A = \{v_2\}$, enako kot v poglavju 3.2.1. V tem primeru lahko vozlišče v_2 napade zgolj vozlišče v_1 , tako je smiselno, da v_2 napade z vso močjo, torej $v_2(v_1)$. Če se želi v_1 obraniti, mora uporabiti vso moč proti v_2 , torej $v_1(v_2)$. Kot smo tukaj pokazali, je $a_1 = 1$ in tudi $d_1 = 1$. To pomeni, da je $a_1 \leq d_1$. S tem smo ugotovili, da se lahko D obrani na enak način kot brez delitve vozlišč.



Slika 16: Pot P_5 , ki predstavlja množici $D = \{v_1\}$ in $A = \{v_2\}$

Enak razmislek velja v vsakem grafu z vozliščem stopnje 1. Zato velja:

Trditev Če je minimalna stopnja grafa $\delta(G) = 1$, potem velja $s(G) = s_f(G) = 1$.

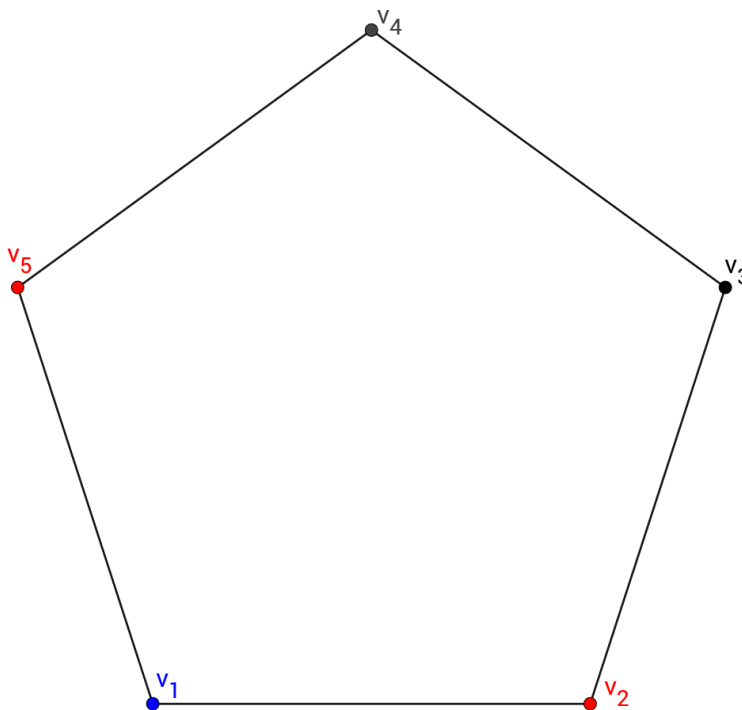
Posledica Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $s_f(P_n) = 1$.

4.3.2 Racionalno varnostno število drevesa

Naj bo G drevo na vsaj dveh vozliščih. Podobno kot pri iskanju varnostnega števila tudi pri racionalnem varnostnem številu dreves uporabimo eno od značilnosti dreves, da vsako drevo, z vsaj eno povezavo, vsebuje vozlišče stopnje 1 in velja $\delta(G) = 1$. Tako lahko iz trditve v prejšnjem poglavju ugotovimo, da je $s_f(G) = s(G) = 1$.

4.3.3 Racionalno varnostno število cikla

Varnostno število cikla C_n je $s(C_n) = 2$, kot smo ugotovili v poglavju 3.2.3. Tukaj bomo poskusili poiskati manjše varnostno število grafa, torej $s_f(C_n) < 2$. To pomeni, da je $s_f(C_n) = 1$, kar je ponazorjeno na sliki 17. V tem primeru bi bila $D = \{v_1\}$ in $A = \{v_2, v_5\}$. Pri teh množicah, če poiščemo primer, ko to ni res, dokažemo, da $s(C_n) \neq 1$. Tako lahko vozlišče v_2 napade le v_1 , v katerem primeru je smiselno, da napade z vso močjo, torej $v_2(v_1^1)$. Drugo vozlišče, torej v_5 , je simetrično v_2 in lahko napade zgolj v_1 . Napade ga z vso močjo, torej zapišemo $v_5(v_1^1)$. Kot smo tukaj pokazali, je $a_1 = 2$. Medtem ko je $d_1 = 1$. To pomeni, da je $a_1 > d_1$ in D ni varna množica.



Slika 17: Cikel C_5 , ki predstavlja množici $D = \{v_1\}$ in $A = \{v_2, v_5\}$

Ugotovili smo, da racionalno varnostno število ni manjše od varnostnega števila. Sedaj še moramo pogledati, ali sta enako veliki.

Če želimo pokazati, da sta varnostno in racionalno varnostno število enaki, izberemo $D = \{v_1, v_2\}$ in $A = \{v_3, v_5\}$, enako kot v poglavju 3.2.3. V tem primeru lahko vozlišče v_5 napade zgolj vozlišče v_1 . Tako je smiselno, da v_5 napade z vso močjo, torej $v_5(\begin{smallmatrix} v_1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix})$. Podobno mora vozlišče v_3 napasti v_2 , in to z vso močjo, torej $v_3(\begin{smallmatrix} v_1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix})$. Če se želi v_1 obraniti, mora uporabiti vso moč proti v_5 , torej $v_1(\begin{smallmatrix} v_1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix})$. Če se želi v_2 obraniti, mora uporabiti vso moč proti v_3 , torej $v_2(\begin{smallmatrix} v_1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix})$. Kot smo tukaj pokazali, je $a_1 = 1$ in tudi $d_1 = 1$. To pomeni, da je $a_1 \leq d_1$. Tudi $a_2 = 1$ in $d_2 = 1$, s tem je $a_2 \leq d_2$. Tako ugotovimo, da se lahko D obrani na enak način kot brez delitve vozlišč.

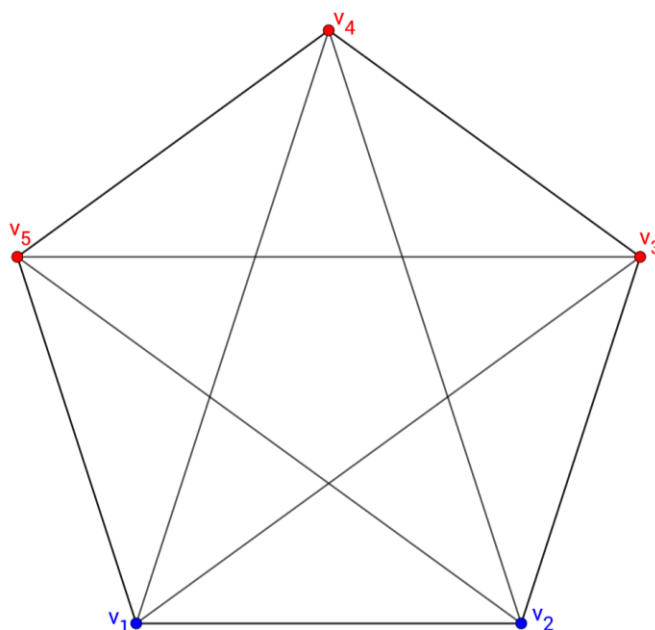
Trditev Naj bo $\delta(G) \geq 2$. Če ima graf G dve sosednji vozlišči x in y stopnje 2, potem velja $s_f(G) = s(G) = 2$.

Dokaz je identičen kot razmislek zgoraj, če sosednji vozlišči stopnje 2 označimo z v_1 in v_2 , njuna preostala soseda pa z v_5 oziroma v_3 .

Posledica Kljub delitvi za vse cikle C_n velja $s(C_n) = s_f(C_n) = 2$.

4.3.4 Racionalno varnostno število polnega grafa

Varnostno število polnega grafa K_n je $s(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, kot smo ugotovili v poglavju 3.2.4. Tukaj bomo poskusili poiskati manjše varnostno število grafa, torej $s_f(K_n) < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Tukaj bomo pogledali delitev na primeru polnega grafa K_5 , ki je ponazorjen na sliki 18. Pogledali bomo, ali je možno, da je racionalno varnostno število manjše od varnostnega števila, ki je $s(K_5) = 3$. Tako bomo poskusili, ali je lahko $s_f(K_5) = 2$. V tem primeru sta lahko $D = \{v_1, v_2\}$ in $A = \{v_3, v_4, v_5\}$. Pri teh množicah, če poiščemo primer, ko to ni res, dokažemo, da $s(K_5) \neq 2$. Torej lahko določimo, da napade v_3 obe vozlišči z enako močjo, torej $v_3(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2})$. Podobno lahko napadeta tudi $v_4(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2})$ in $v_5(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2})$. Ob teh napadih se želita obraniti vozlišči v_1 in v_2 , ki imata skupno moč 2. Torej poskusita tako, da se obrani v_1 , ki vso moč porabi zase, torej $v_1(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0})$. Še vedno ga napadajo napadalci z močjo $\frac{1}{2}$, pri čemer mu pomaga v_2 , preostanek pa porabi zase, torej $v_2(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2})$. Kot smo pokazali, je $a_1 = \frac{3}{2}$ in $d_1 = \frac{3}{2}$, torej tukaj velja $a_1 \leq d_1$. Medtem ko $a_2 = \frac{3}{2}$ in $d_2 = \frac{1}{2}$, kar pomeni, da je $a_2 > d_2$. Zaradi tega se D ne more obraniti in $s_f(K_5) \neq 2$.



Slika 18: Polni graf K_5 , ki predstavlja množici $D = \{v_1, v_2\}$ in $A = \{v_3, v_4, v_5\}$

Ugotovili smo, da racionalno varnostno število ni manjše od varnostnega števila. Sedaj še moramo pogledati, ali sta enako veliki.

Če želimo pokazati, da sta varnostno in racionalno varnostno število enaki, lahko izberemo $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ in $A = \{v_4, v_5\}$. Tukaj lahko rečemo, da v_4 porazdeli svoje enote po shemi $v_4(v_1^4, v_2^4, v_3^4)$ in v_5 svoje enote po shemi $v_5(v_1^5, v_2^5, v_3^5)$. Potem je v_i napadena z $v_i^4 + v_i^5$ za $1 \leq i \leq 3$ in je skupna moč napada $v_1^4 + v_1^5 + v_2^4 + v_2^5 + v_3^4 + v_3^5 = (v_1^4 + v_2^4 + v_3^4) + (v_1^5 + v_2^5 + v_3^5) \leq 1 + 1 = 2$.

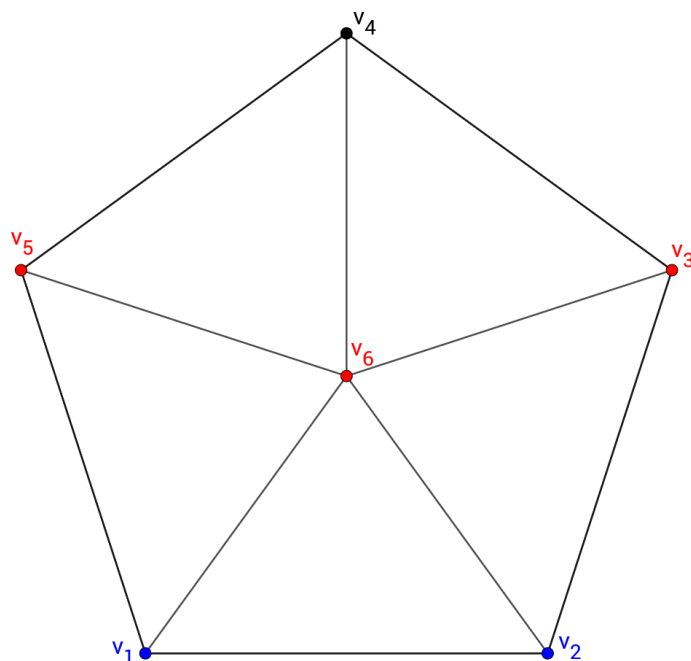
Vozlišča v_1, v_2 in v_3 pa razpolagajo s skupno močjo 3, ki jo lahko poljubno razporedijo, saj so med seboj vsa sosednja. Zato se lahko množica D obrani in je $s_f(K_5) = s(K_5) = 3$.

Podobno velja tudi za vse polne grafe, saj so vsa vozlišča povezana z vsemi. Tako delitev vozlišč ne prispeva k manjšemu varnostnemu številu, saj lahko zapišemo seštevek vseh delov napadalcev in seštevek vseh delov branilcev, kjer mora biti seštevek vseh napadalcev manjši od seštevka vseh branilcev. Tako lahko zapišemo $s_f(K_n) = s(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

4.3.5 Racionalno varnostno število kolesa

O delitvi vozlišč pri kolesih smo govorili že v poglavju 4.2, vendar smo tam zgolj pokazali model delitve vozlišč na več delov. Tukaj bomo še dodatno pogledali, kaj pomeni delitev vozlišč za varnostno število grafa, torej če lahko najdemo manjše oziroma enako racionalno varnostno število kolesa.

Najprej pogledamo, ali je možno, da je racionalno varnostno število manjše od varnostnega. Kot smo že ugotovili v poglavju 3.2.5, je $s(W_n) = 3, n \geq 5$. Za $W_4 = K_4$ velja enako pravilo, kot smo ga zapisali v prejšnjem poglavju za polne grafe in je $s_f(W_4) = 2$. Če želimo, da je racionalno varnostno število manjše od varnostnega, to pomeni, da je $s_f(W_n) < 3, n \geq 5$. Tako je $s_f(W_n) = 2, n \geq 5$. V tem primeru sta lahko $D = \{v_1, v_2\}$ in $A = \{v_3, v_5, v_6\}$. Tukaj lahko vozlišče v_3 napade zgolj v_2 in je smiselno, da napade z vso močjo, torej zapišemo $v_3 \binom{v_1}{0} \binom{v_2}{1}$. Podobno je pri v_5 , ki lahko napade le v_1 in je smiselno, da napade z vso močjo, torej zapišemo $v_5 \binom{v_1}{1} \binom{v_2}{0}$. Ti dve vozlišči se lahko obranita sami pred zgornjima napadoma, kar zapišemo kot $v_1 \binom{v_1}{1} \binom{v_2}{0}$ in $v_2 \binom{v_1}{0} \binom{v_2}{1}$. Vendar v_6 še svoje moči ni porabila, medtem ko sta branilca že porabila vso svojo moč. Tako lahko pokažemo, da se v_6 deli $v_6 \binom{v_1}{\frac{1}{2}} \binom{v_2}{\frac{1}{2}}$. Kot smo tukaj pokazali, je $a_1 = \frac{3}{2}$ in $d_1 = 1$, kar pomeni, da je $a_1 > d_1$, torej se v_1 ne more obraniti. Podobno vidimo pri v_2 , kjer je $a_2 = \frac{3}{2}$ in $d_2 = 1$ in je ponovno $a_2 > d_2$. Tukaj vidimo, da se kar oba ne moreta obraniti, kar pomeni, da bi rekli, da množica ni varna. Iz tega sledi, da $s_f(W_n) \neq 2, n \geq 5$. To velja za vsa kolesa, saj je lahko vozlišč v zunanem ciklu neskončno mnogo, vendar bodo vozlišča, ki so v varni množici, imela vedno enako število sosedov.



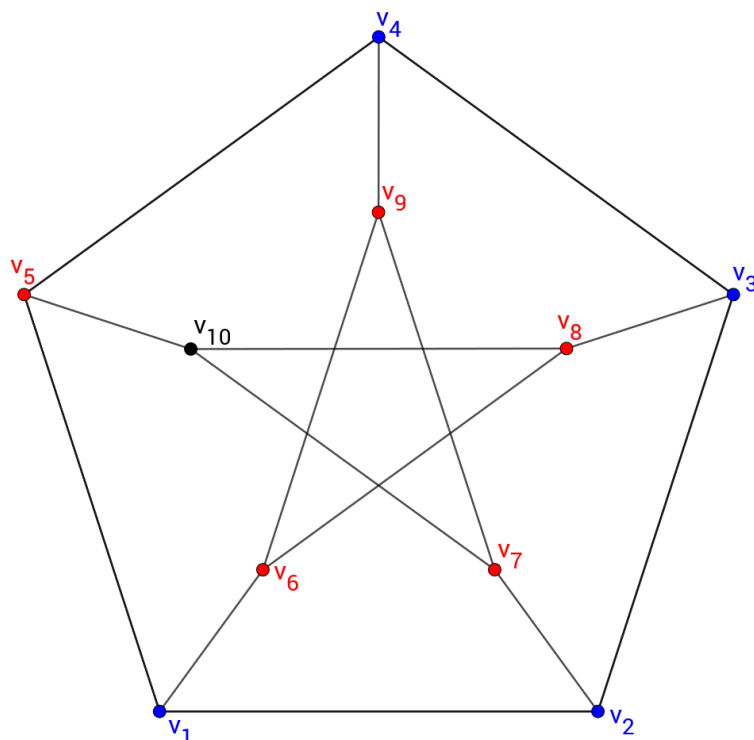
Slika 19: Kolo W_6 , ki predstavlja množici $D = \{v_1, v_2\}$ in $A = \{v_3, v_5, v_6\}$

Sedaj še moramo pogledati, ali je racionalno varnostno število enako varnostnemu številu. To pomeni, da je $s_f(W_n) = 3, n \geq 5$. V tem primeru sta lahko $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ in $A = \{v_4, v_5, v_6\}$. Tukaj lahko v_4 napade le v_3 , kjer je smiselno, da to stori z vso močjo, torej $v_4 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Podobno lahko napade v_5 le v_1 , kjer je smiselno, da to stori z vso močjo, torej $v_5 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pri teh napadih se lahko v_1 in v_3 obranita sami, kar zapišemo kot $v_1 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $v_3 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Medtem ko pa v_6 napade vse branitelje, torej v_1, v_2 in v_3 , med katere lahko poljubno razdeli svojo moč. Tako lahko pogledamo primer, ko napade $v_6 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Ob takem napadu se lahko v_2 , ki še ima vso svojo moč, deli enako kot v_6 , torej $v_2 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Kot smo pokazali, je $a_1 = \frac{3}{2}$ in $d_1 = \frac{3}{2}$, kar pomeni, da je $a_1 \leq d_1$, torej se v_1 obrani napada. Pri v_2 je $a_2 = \frac{1}{2}$ in $d_2 = \frac{1}{2}$ in je $a_2 \leq d_2$. Podobno se zgodi pri v_3 , kjer je $a_3 = \frac{3}{2}$ in $d_3 = \frac{3}{2}$, kar pomeni, da je $a_3 \leq d_3$ in se v_3 obrani napada. Na tak način vidimo, da se lahko D obrani vsakega napada tako, da se v_1 in v_3 obranita celotnega napada svojega soseda, torej v_5 oziroma v_4 . Medtem ko se v_2 deli vedno simetrično glede na to, kako se deli v_6 , se bo množica D lahko obranila ob kakršnikoli delitvi napadalcev. Iz tega sledi, da je $s_f(W_n) = s(W_n) = 3, n \geq 5$.

4.3.6 Racionalno varnostno število Petersenovega grafa

Kot smo že ugotovili v poglavju 3.2.6, je $s(G) = 5$, kjer je G Petersenov graf. Tukaj želimo poiskati racionalno varnostno število, ki bo manjše od zgoraj napisanega varnostnega števila grafa.

Če želimo pokazati, da je racionalno varnostno število manjše od varnostnega števila, mora veljati, da je $s_f(G) < 5$, kar pomeni, da je $s_f(G) = 4$. Manj ne bomo gledali, saj zlahka najdemo protiprimer, s čimer dokažemo, da to ni varna množica. V prvem primeru sta lahko $D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in posledično je $A = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$. V tem primeru se ne zgodi veliko zanimivega, saj imajo vozlišča v_6, v_7, v_8 in v_9 zgolj enega soseda, kar pomeni, da lahko napadejo zgolj njega, kar je vedno smiselno z vso močjo. To zapišemo kot $v_6\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_7\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_8\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $v_9\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Te napade lahko napadena vozlišča zlahka obranijo tako, da porabijo vso svojo moč proti vozliščem, ki so jih napadla, kar zapišemo kot $v_1\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $v_4\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ostane še v_5 , ki lahko napade v_1 in v_2 , kakor želi. Ob vsakem napadu na ti dve vozlišči se ne bosta obranili, saj sta že vso moč porabili. Kar pomeni, da se ob napadu, kot je $v_5\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, zgodi naslednje: $a_1 = \frac{3}{2}$, medtem ko je $d_1 = 1$, kar pomeni, da je $a_1 > d_1$ in se v_1 ne more obraniti. Podobno je pri v_2 , kjer je $a_2 = \frac{3}{2}$ in $d_2 = 1$, torej je $a_2 > d_2$. Nekoliko drugače je pri v_3 , kjer je $a_3 = 1$ in $d_3 = 1$, kar pomeni, da je $a_3 \leq d_3$. Podobno tudi pri v_4 , kjer je $a_4 = 1$ in $d_4 = 1$, kar pomeni, da je $a_4 \leq d_4$. Vse obrambe bi morale biti večje od napadov, ampak niso, torej se množica D ne more obraniti.



Slika 20: Petersenov graf, ki predstavlja $D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in $A = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$

V drugem primeru pogledamo, da je $D_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ in posledično je $A = \{v_4, v_5, v_7, v_8, v_9\}$. V tem primeru lahko vozlišča v_4, v_5, v_7 in v_9 napadejo le eno vozlišče, kar je smiselno z vso močjo. Torej zapišemo $v_4 \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \\ 1 \\ v_6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \\ v_6 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $v_9 \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \\ v_6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Te napade lahko napadena vozlišča zlahka obranijo tako, da porabijo vso svojo moč proti vozliščem, ki so jih napadla, kar zapišemo kot $v_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \\ v_6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ 1 \\ v_3 \\ 0 \\ v_6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \\ 1 \\ v_6 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $v_6 \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \\ v_6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ostane še v_8 , ki lahko napade v_3 in v_6 , kakor želi. V obeh primerih sta vozlišči že porabili vso svojo moč. Tako zapišemo poljuben napad, kot je $v_8 \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \\ \frac{1}{2} \\ v_6 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Zgodi se naslednje: $a_1 = 1$, medtem ko je $d_1 = 1$, kar pomeni, da je $a_1 \leq d_1$ in se v_1 obrani. Podobno je pri v_2 , kjer je $a_2 = 1$ in $d_2 = 1$, torej je $a_2 \leq d_2$. Nekoliko drugače je pri v_3 , kjer je $a_3 = \frac{3}{2}$ in $d_3 = 1$, kar pomeni, da je $a_3 > d_3$ in se v_3 ne more obraniti. Podobno je tudi pri v_4 , kjer je $a_4 = \frac{3}{2}$ in $d_4 = 1$, kar pomeni, da je $a_4 > d_4$. Vse obrambe bi morale biti večje od napadov, ampak niso, torej se množica D ne more obraniti.

V tretjem primeru pogledamo, da je $D_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_7\}$ in posledično $A = \{v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}\}$. V tem primeru imajo vsi napadalci zgolj enega soseda, ki je branilec, kjer je smiselno, da na tega soseda napadejo z vso močjo. Torej zapišemo $v_4(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{1}, \frac{v_7}{0})$, $v_5(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0}, \frac{v_7}{0})$, $v_6(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0}, \frac{v_7}{0})$, $v_8(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{1}, \frac{v_7}{0})$, $v_9(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0}, \frac{v_7}{1})$ in $v_{10}(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0}, \frac{v_7}{1})$. Tukaj lahko vidimo, da je napad na vsa vozlišča razen na v_2 , ki nima sosedov v množici A , enak 2, torej lahko zapišemo $a_1 = a_3 = a_7 = 2$. Ta vozlišča se zelo očitno ne bodo mogla obraniti, saj imajo le enega soseda, ki ni napaden in jim lahko pomaga. Obrambo kljub temu določimo kot $v_1(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0}, \frac{v_7}{0})$, $v_2(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0}, \frac{v_7}{0})$, $v_3(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{1}, \frac{v_7}{0})$ in $v_7(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_3}{0}, \frac{v_7}{1})$. Tukaj se le v_1 in v_2 , na kateri ni bilo napada, obranita, saj je $d_1 = 2$, kar pomeni, da je $a_1 \leq d_1$ in $a_2 = 0$ in $d_2 = 0$, torej je $a_2 \leq d_2$. Drugače je pri v_3 in v_7 , ki se branita le sami, torej je $d_3 = 1$ in $d_7 = 1$. To pomeni, da je $a_3 > d_3$ in tudi $a_7 > d_7$. Vse obrambe bi morale biti večje od napadov, ampak niso, torej se množica D ne more obraniti.

V četrtem primeru pogledamo, da je $D_4 = \{v_1, v_2, v_6, v_7\}$ in posledično je $A = \{v_3, v_5, v_8, v_9, v_{10}\}$. V tem primeru lahko vozlišča v_3, v_5, v_8 in v_{10} napadejo le eno vozlišče, kar je smiselno z vso močjo. Torej zapišemo $v_3(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{1}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_7}{0})$, $v_5(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_7}{0})$, $v_8(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{1}, \frac{v_7}{0})$ in $v_{10}(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_7}{1})$. Te napade lahko napadena vozlišča zlahka obranijo tako, da porabijo vso svojo moč proti vozliščem, ki so jih napadla, kar zapišemo kot $v_1(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_7}{0})$, $v_2(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{1}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_7}{0})$, $v_6(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{1}, \frac{v_7}{0})$ in $v_7(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_7}{1})$. Ostane še v_9 , ki lahko napade v_6 in v_7 , kakor želi. V obeh primerih sta vozlišči že porabili vso svojo moč. Tako zapišemo poljuben napad, kot je $v_9(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{\frac{1}{2}}, \frac{v_7}{\frac{1}{2}})$. Zgodi se naslednje: $a_1 = 1$, medtem ko je $d_1 = 1$, kar pomeni, da je $a_1 \leq d_1$ in se v_1 obrani. Podobno je pri v_2 , kjer je $a_2 = 1$ in $d_2 = 1$, torej je $a_2 \leq d_2$. Nekoliko drugače je pri v_6 , kjer je $a_6 = \frac{3}{2}$ in $d_6 = 1$, kar pomeni, da je $a_6 > d_6$ in se v_6 ne more obraniti. Podobno je tudi pri v_7 , kjer je $a_7 = \frac{3}{2}$ in $d_7 = 1$, kar pomeni, da je $a_7 > d_7$. Vse obrambe bi morale biti večje od napadov, ampak niso, torej se množica D ne more obraniti.

V petem primeru pogledamo, da je $D_5 = \{v_1, v_2, v_6, v_9\}$ in posledično je $A = \{v_3, v_4, v_5, v_7, v_8\}$. V tem primeru lahko vozlišča v_3, v_4, v_5 in v_8 napadejo le eno vozlišče, kar je smiselno z vso močjo. Torej zapišemo $v_3(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{1}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_9}{0})$, $v_4(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_9}{1})$, $v_5(\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{0}, \frac{v_9}{0})$ in $v_8(\frac{v_1}{0}, \frac{v_2}{0}, \frac{v_6}{1}, \frac{v_9}{0})$. Te napade lahko napadena vozlišča zlahka obranijo tako, da porabijo vso

svojo moč proti vozliščem, ki so jih napadla, kar zapišemo kot $v_1(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_6 & v_9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $v_2(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_6 & v_9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $v_6(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_6 & v_9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix})$ in $v_9(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_6 & v_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix})$. Ostane še v_7 , ki lahko napade v_2 in v_9 , kakor želi. V obeh primerih sta vozlišči že porabili vso svojo moč. Tako zapišemo poljuben napad, kot je $v_7(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_6 & v_9 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix})$. Zgodi se naslednje: $a_1 = 1$, medtem ko je $d_1 = 1$, kar pomeni, da je $a_1 \leq d_1$ in se v_1 obrani. Podobno je pri v_6 , kjer je $a_6 = 1$ in $d_6 = 1$, torej je $a_6 \leq d_6$. Nekoliko drugače je pri v_2 , kjer je $a_2 = \frac{3}{2}$ in $d_2 = 1$, kar pomeni, da je $a_2 > d_2$ in se v_2 ne more obraniti. Podobno je tudi pri v_9 , kjer je $a_9 = \frac{3}{2}$ in $d_9 = 1$, kar pomeni, da je $a_9 > d_9$. Vse obrambe bi morale biti večje od napadov, ampak niso, torej se množica D ne more obraniti.

Vse možnosti napadov, ki tukaj niso zapisane, so simetrične tem in jih posledično ni potrebno obravnavati. V vseh zgornjih primerih smo ugotovili, da se vse množice z močjo 4 ne morejo obraniti in med njimi nismo našli varne množice. Iz tega sledi, da je $s_f(G) \neq 4$.

Sedaj še moramo pogledati, ali je racionalno varnostno število enako varnostnemu številu. To pomeni, da je $s_f(G) = 5$. V tem primeru sta lahko $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ in $A = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$. Tukaj pa imajo vsa vozlišča v množici A natanko enega soseda, ki ga lahko napadejo, torej bodo tega soseda vedno napadla z vso močjo. To bomo zapisali kot $v_6(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $v_7(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $v_8(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $v_9(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix})$ in $v_{10}(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix})$. Seveda se bodo branitelji branili vsak sam, kar pomeni, da je $v_1(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $v_2(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $v_3(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $v_4(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix})$ in $v_5(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix})$. Iz teh zapisov razberemo, da je $a_1 = 1$ in $d_1 = 1$, kar pomeni, da je $a_1 \leq d_1$ in se v_1 lahko obrani. Podobno je pri v_2 , kjer je $a_2 = 1$ in $d_2 = 1$, torej je ponovno $a_2 \leq d_2$. Kot v prejšnjem primeru bo pri v_3 , kjer je $a_3 = 1$ in $d_3 = 1$, kar pomeni, da je $a_3 \leq d_3$. Ponovno se to zgodi pri v_4 , kjer je $a_4 = 1$ in $d_4 = 1$, kar pomeni, da je $a_4 \leq d_4$. In tudi pri v_5 , kjer je $a_5 = 1$ in $d_5 = 1$, kar pomeni, da je še zadnjič $a_5 \leq d_5$. Iz tega sledi, da je $s_f(G) = s(G) = 5$.

5. DRUŽBENA ODGOVORNOST

Pri pripravi svoje raziskovalne naloge sem upošteval pravilno navajanje virov in literature ter tako poskrbel, da ni prišlo do zlorabe podatkov. Za raziskovalno nalogo s področja matematike sem se odločil zaradi poglobitve in razširitve svojega srednješolskega znanja matematike, saj me zanima študij matematike. Svojo raziskovalno nalogo sem odgovorno predstavil tudi svojim vrstnikom, da bi del tega novega znanja pridobili tudi oni.

6. ZAKLJUČEK

V svoji raziskovalni nalogi sem ugotovil, da je varnostno število in racionalno varnostno število poti enako ena. To ugotovitev sem posplošil na vse grafe, ki vsebujejo vozlišče stopnje ena, torej tudi na drevesa. Ugotovil sem, da je varnostno in racionalno varnostno število ciklov enako dva. Tudi to ugotovitev sem posplošil na vse grafe, ki vsebujejo dve sosednji vozlišči stopnje dva. Nato sem poiskal varnostno in racionalno varnostno število polnega grafa, ki je bilo enako polovici vseh vozlišč na primeru sodega števila vozlišč in navzgor zaokroženo celo število polovice vseh vozlišč na primeru lihega števila vozlišč. Pregledal sem še kolesa in ugotovil, da je varnostno in racionalno varnostno število kolesa enako tri. Kot zadnji primer sem poiskal varnostno in racionalno varnostno število Petersenovega grafa, ki je enako pet.

Ugotovil sem, da se pri družinah grafov, ki sem jih preučeval, varnostno in racionalno varnostno število ujemata. S tem sem potrdil prvi dve hipotezi naloge. Ni mi uspelo poiskati grafa, kjer bi bilo racionalno varnostno število manjše od varnostnega števila grafa, kar pomeni, da tretje hipoteze ne morem potrditi.

Ob koncu raziskave se ponuja še nekaj odprtih vprašanj, ki omogočajo nadaljnje raziskovanje. Raziskati in primerjati bi bilo možno varnostno in racionalno varnostno število še drugih družin grafov, kot so na primer polni dvodelni grafi, hiperkocke ...

Nadaljnja raziskava bi lahko vsebovala iskanje primera grafa, kjer je racionalno varnostno število manjše od varnostnega števila ali pa v nasprotnem primeru dokaz, da je racionalno varnostno število enako varnostnemu številu za vse grafe.

Če je varnostno število enako racionalnemu varnostnemu številu za vsak graf, bi imeli zanimiv primer matematičnega modela, ki bolje ponazori realno sliko, vendar ne prinese boljših rezultatov.

Uporabnost raziskovalne naloge se kaže v ponujenih možnostih nadaljnjih raziskav, kot tudi v povsem novi definiciji racionalnega varnostnega števila grafov.

7. VIRI IN LITERATURA

WILSON, Robin J. in WATKINS, John J. 1997. *Uvod v Teorijo Grafov*. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. str. 397. Knjižnica Sigma ISBN 961-212-081-1.

ScienceDirect: Discrete Applied Mathematics [Online]. 1997-. Amsterdam: Elsevier, 15.8.2007. [Citirano 10.11.2017; 14:35] Dostopno na spletnem naslovu: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X07000558>>.

Vse slike, uporabljene v raziskovalni nalogi, so lastnega vira in so narisane v matematičnem programu Geogebra.