

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2018«

35. SREČANJE

NIM

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: SARA VOLGEMUT, ŽIVA ŽURGA
Mentor: MATEJA SLANA MESARIČ, SUZANA TOMŠIČ MAVRIČ
Šola: OŠ JANKA PADEŽNIKA MARIBOR

Maribor, februar 2018

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2018«

35. SREČANJE

NIM

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

PROSTOR ZA NALEPKO



Maribor, februar 2018

KAZALO VSEBINE

stran

KAZALO SLIK	3
KAZALO TABEL	3
POVZETEK	4
1 UVOD	5
1.1 RAZISKOVALNI PROBLEM.....	6
1.2 TEORETIČNE OSNOVE.....	6
1.2.1 Igra Nim.....	6
1.2.2 Številski sistemi.....	7
1.2.2.1 Desetiški sistem.....	8
1.2.2.2 Dvojiški sistem (binarni sistem).....	8
2 OSREDNJI DEL NALOGE	10
2.1 METODOLOGIJA.....	10
2.1.1 Metoda proučevanja pisnih virov.....	10
2.1.2 Metoda poskušanja.....	10
2.1.3 Metoda analize podatkov in njihova interpretacija.....	10
2.2 OPIS REZULTATOV.....	11
2.2.1 Igra z enim kupom žetonov (preprosti Nim).....	11
2.2.2 Igra z dvema kupoma žetonov (osnovni Nim).....	13
2.2.3 Igra s tremi kupi žetonov (osnovni Nim).....	14
3 RAZPRAVA	15
4 ZAKLJUČEK	18
5 DRUŽBENA ODGOVORNOST	19
6 VIRI IN LITERATURA	20
7 PRILOGE	22
7.1 IGRA Z ENIM KUPOM ŽETONOV.....	22
7.2 IGRA Z DVEMA KUPOMA ŽETONOV.....	23
7.3 IGRA S TREMI KUPI ŽETONOV.....	25

KAZALO SLIK

SLIKA 1: RAČUNALNIK NIMATRON.....	5
SLIKA 2: KUPI S TREMI, ŠTIRIMI IN PETIMI ŽETONI.....	16
SLIKA 3: DVOJIŠKA POSTAVITEV KUPOV S TREMI, ŠTIRIMI IN PETIMI ŽETONI.....	17

KAZALO TABEL

TABELA 1: IGRA Z ENIM KUPOM ŽETONOV – NAJVEČJI VZETEK 1 ŽETON.....	11
TABELA 2: IGRA Z ENIM KUPOM ŽETONOV – NAJVEČJI VZETEK 2 ŽETONA	12
TABELA 3: IGRA Z ENIM KUPOM ŽETONOV – NAJVEČJI VZETEK 3 ŽETONI	12
TABELA 4: IGRA Z DVEMA KUPOMA ŽETONOV	13
TABELA 5: IGRA S TREMI KUPI ŽETONOV	14
TABELA 6: IGRA Z ENIM KUPOM – VZAMEM NAJVEČ 1 ŽETON.....	22
TABELA 7: IGRA Z ENIM KUPOM – VZAMEM NAJVEČ 2 ŽETONA.....	22
TABELA 8: IGRA Z ENIM KUPOM – VZAMEM NAJVEČ 3 ŽETONE	22
TABELA 9: IGRA Z ENIM KUPOM – VZAMEM NAJVEČ 4 ŽETONE	22
TABELA 10: IGRA Z DVEMA KUPOMA – VZAMEM NAJVEČ 1 ŽETON	23
TABELA 11: IGRA Z DVEMA KUPOMA – VZAMEM NAJVEČ 2 ŽETONA	23
TABELA 12: IGRA Z DVEMA KUPOMA – VZAMEM NAJVEČ 3 ŽETONE	23
TABELA 13: IGRA Z DVEMA KUPOMA – VZAMEM NAJVEČ 4 ŽETONE	24
TABELA 14: IGRA Z DVEMA KUPOMA – VZAMEM NAJVEČ 5 ŽETONOV.....	24
TABELA 15: IGRA S TREMI KUPI – VZAMEM NAJVEČ 1 ŽETON	25
TABELA 16: IGRA S TREMI KUPI – VZAMEM NAJVEČ 2 ŽETONA	26
TABELA 17: IGRA S TREMI KUPI – VZAMEM NAJVEČ 3 ŽETONE.....	27
TABELA 18: IGRA S TREMI KUPI – VZAMEM NAJVEČ 4 ŽETONE.....	28
TABELA 19: IGRA S TREMI KUPI – VZAMEM NAJVEČ 5 ŽETONOV	29

POVZETEK

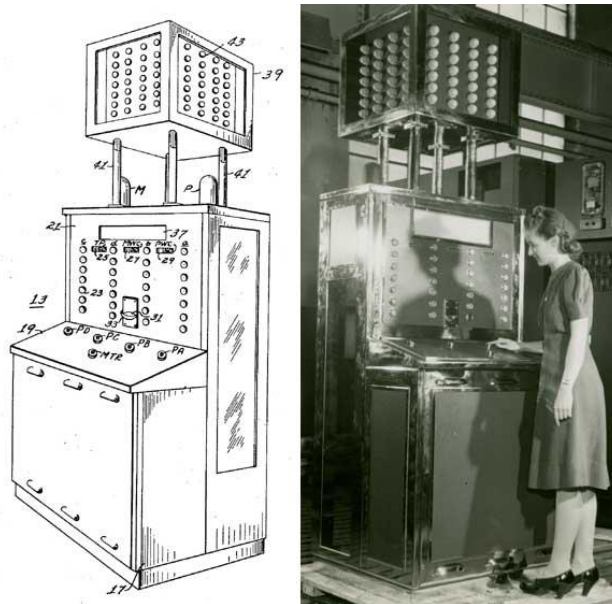
V nalogi sva raziskovali igrico Nim. Igra je namenjena dvema igralcema, ki zlagata predmete v različno velike kupčke in jih potem odvezmeta. Pri tem se dogovorita, koliko žetonov lahko naenkrat vzameta. Zmaga igralec, ki pobere zadnji žeton. Zanimalo naju je, ali število žetonov v kupu vpliva na zmago in ali je pomembno, da zmagovalec igra prvi. Pri proučevanju igre sva ugotovili, da je že ameriški matematik Charles Leonard Bouton raziskoval zmagovalno strategijo igre Nim in jo predstavil. Tako sva se pri najinem raziskovanju odločili preizkusiti njegovo strategijo. Pri tem sva se naučili, da obstajajo različni številski sistemi. Pri tej igri je pomemben dvojiški številski sistem. V nalogi predstavljava možne strategije za zmago pri igri z največ tremi kupi in največjim številom žetonov pet v enem kupu.

1 UVOD

V šoli smo se igrali kitajsko igrico Nim. Prej je nisva poznali, je pa igra namenjena dvema igralcema, ki zlagata predmete v različno velike kupčke in jih potem odvzemata. Pri tem se dogovorita, koliko žetonov lahko naenkrat vzameta. Kakorkoli smo sestavili kupčke in se vsakokrat drugače dogovorili za največje število vzetih žetonov, je zmeraj eden zmagal. Ni se zgodilo, da bi bilo neodločeno.

To naju je pritegnilo, da sva igrico raziskali bolj podrobno. Zanimalo naju je, kako zmagati v igri, ki jo lahko igrajo tako otroci kot tudi odrasli. Ugotovili sva, da se v njej skriva veliko matematike, saj je za zmagovalno strategijo potrebno poznati dvojiški številski sistem.

Zanimivo je, da igrice prej nisva poznali. Sedaj pa ugotavljava, da so jo poznali že pred več stoletji in da jo pravzaprav poznajo po celem svetu. Že leta 1940 je Edward Uhler Condon sestavil računalniško igrico oziroma stroj, na katerem so igrali igro Nim.



Slika 1: Računalnik Nimatron

(vir: <https://pcgaminghistory.wordpress.com/1940/04/18/nimatron/>)

1.1 Raziskovalni problem

Namen najine raziskovalne naloge je bil raziskati igrico Nim. Igrica je namenjena dvema igralcema, ki zlagata žetone v različno velike kupe in jih potem odvzemata. Zmaga igralec, ki zadnji pobere žeton.

Pri raziskovanju sva se omejili na največ tri kupe z največjo velikostjo 5 žetonov. Z metodo poskušanja sva sproti ugotavljali strategijo zmage pri posameznih vzetkih za igralca, ki igra prvi in ob predpostavki, da oba igralca poznata igro.

Znotraj tega raziskovanja sva iskali odgovore na naslednja ciljna vprašanja:

- Ali število žetonov v kupu vpliva na zmago?
- Ali je pomembno, da zmagovalec igra prvi?

1.2 Teoretične osnove

1.2.1 Igra Nim

Igra je znana že več stoletij. Točen čas nastanka ni znan. Charles Leonard Bouton domneva, da igra izvira s Kitajske. Igro je poimenoval Tsyanshidzi, kar pomeni pobiranje kamnov. Izvor imena je še vedno negotov, ampak ime igre najbolje zaznamuje nemška beseda nimm, ki v slovenščini pomeni vzemi. Poznamo tudi afriško varianto – Tiok tiouk. (Prapertnik, 2015)

»Nim je v resnici skupno ime za igre, v katerih dva igralca izmenično pobirata kamne (oziroma razne predmete, kot so žetoni, kovanci, vžigalice...) z enega ali več kupov. Kdor naredi zadnjo možno potezo, je zmagovalec. Med seboj se te igre ločijo po številu kupov in kamnov na začetku igre in po pravilu, ki predpisuje velikost vzetka. Vsaka poteza mora seveda spremeniti celotno število kamnov v igri in igralec mora tako vzeti vsaj en kamen«. (Rojko, Presek, 1980)

Igre se med seboj razlikujejo po številu kupov in žetonov, ki jih imamo na voljo v začetku igre, in po pravilu, ki določa, koliko žetonov lahko vzamemo v eni potezi. (Prapertnik, 2015).

Glede na število kupov, žetonov in vzetkov ločimo igre:

- Nezanimivi Nim

Na začetku imamo kup z n žetoni, igralec lahko vzame od enega do n žetonov. Zmaga prvi igralec, saj lahko vzame vse žetone.

- Preprosti Nim

Tudi pri tej igri imamo en kup z n žetoni. Velja pa omejitev pri vzetku, saj igralec lahko vzame od enega do k žetonov, pri čemer je ($1 \leq k \leq n$) vzetek torej manjši od n .

- Običajni Nim

Pri tej igri pa imamo na začetku dva ali več kupov. To za igralca predstavlja dodaten izziv, saj mora najprej izbrati kup, iz katerega bo začel jemati.

1.2.2 Številski sistemi

Številski sistem ali številski sestav je sistem, v katerem so urejena števila. Število je matematičen pojem, ki označuje količino nečesa. V vsakodnevnem življenju se srečujemo s števili in številkami. Številke so le zapisi za števila.

Vemo, da so ljudje v preteklosti števila zapisovali na različne načine. Števila lahko zapišemo z rimskimi, arabskimi ali drugimi številkami. Danes se največ uporablja mestni zapis z arabskimi številkami.

Za osnovo številskega sistema smemo vzeti poljubno naravno število $b > 1$. V tem primeru govorimo o številskem sestavu z osnovo b , kjer so gradniki potence števila b . Vsak zapis je sestavljen iz števk, ki nam povedo, koliko posameznih gradnikov vsebuje opazovano število. Številke v zapisu so iz množice $\{0, 1, 2, 3, \dots, b - 1\}$. Zapis in vrednost števila:

$$n = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 b^0$$

(<http://www.iucbeniki.si/vega1/19/index2.html>, stran 160)

1.2.2.1 Desetiški sistem

Najbolj se je uveljavil desetiški številski sistem, kjer so gradniki potence števila 10, ljudje pa sklepajo, da zato, ker ima človek 10 prstov. Vsak zapis je sestavljen iz števk, ki nam povedo, koliko posameznih gradnikov vsebuje opazovano število.

(<http://www.iucbeniki.si/vega1/19/index2.html>, stran 155)

Števke v desetiškem zapisu števila so iz množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Imena posameznih števk od desne proti levi so: enice, desetice, stotice, tisočice... Naravno število je n -mestno, če je v njegovem zapisu n števk. (<http://www.iucbeniki.si/vega1/19/index2.html>, stran 154)

Zapis števila v desetiškem sistemu:

$$n = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

(<http://www.iucbeniki.si/vega1/19/index2.html>, stran 155)

Primer 1:

Število 54321 zapisano:

– z večkratniki potenc števila 10: $54321 = 5 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 1$

– z desetiškimi enotami: $54321 = 5DT \ 4T \ 3S \ 2D \ 1E$

Uporabimo lahko tabelo:

	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
54321	5	4	3	2	1

1.2.2.2 Dvojiški sistem (binarni sistem)

Dvojiški ali binarni sistem dobimo, če za osnovne gradnike vzamemo potence števila 2. V tem sistemu uporabljamo le dve števki, 0 ali 1. Ta sistem se najbolj uporablja v računalništvu.

Zapis števila v dvojiškem sistemu:

$$n = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Primer 2:

Število $11001_{(2)}$ zapisano z večkratniki potenc števila 2:

$$11001_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 + 0 + 1 = 16 + 8 + 1 = 25_{(10)}$$

Uporabimo lahko tudi tabelo:

	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
11001	1	1	0	0	1

Kako pretvarjamo iz desetiškega sistema v dvojiški sistem:

- Izberemo poljubno število v desetiškem sistemu.
- Delimo ga s številom 2, zapišemo rezultat in ostanek.
- Z deljenjem nadaljujemo, dokler ne dobimo zadnji ostanek pri deljenju.
- Zapis števila v dvojiškem sistemu dobimo, ko zapišemo vse ostanke v obratnem vrstnem redu, kot je nastajal.

Primer 3:

$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

Ostanke pri deljenju z 2 zapišemo v obratnem vrstnem redu:

$$14_{(10)} = 1110_{(2)}$$

Števila v dvojiškem sistemu lahko tudi seštevamo. Upoštevamo pravila:

- Če seštejemo 0 in 0 dobimo 0.
- Če seštejemo 0 in 1 dobimo 1.
- Če seštejemo 1 in 1 dobimo 0 (vsota je 2, vendar pri deljenju z 2 dobimo ostanek 0).

Primer 4:

$$1101_{(2)} + 111_{(2)} = 1010_{(2)}$$

2 OSREDNJI DEL NALOGE

2.1 Metodologija

Uporabili sva naslednje metode dela:

- metodo proučevanja pisnih virov
- metodo poskušanja
- metodo analize podatkov in njihovo interpretacijo.

2.1.1 Metoda proučevanja pisnih virov

Začetna metoda dela je bila metoda dela s pisnimi viri. Literaturo sva iskali v Mariborski knjižnici in na spletu. Zbrano gradivo sva preučili in prebrali. Ugotovitve sva povzeli in uskladili.

2.1.2 Metoda poskušanja

To metodo sva uporabili v osrednjem delu raziskave. Raziskovanja sva se lotili sistematično in vsakokrat spreminjali vzetke (od enega žetona do vseh petih žetonov). Najprej sva se igrali igrico z enim kupom žetonov, nato z dvema in na koncu še s tremi kupi žetonov. Omejili sva se na kupe z največjo velikostjo 5 žetonov. Sproti sva ugotavljali strategijo zmage pri posameznih vzetkih za igralca, ki igra prvi in ob predpostavki, da oba igralca poznata igro.

2.1.3 Metoda analize podatkov in njihova interpretacija

Zbrane podatke o rezultatih igranja igre sva sproti zapisovali v tabele. Rezultate sva analizirali in podali ugotovitve. Uporabljali sva osebni računalnik in program Microsoft Word.

2.2 Opis rezultatov

Pri igranju igre Nim sva se omejili na največ 5 žetonov v kupu in na igro z največ tremi kupi. Preverjali sva možnosti za zmago pri vzetku od enega žetona do vseh petih. Zmaga igralec, ki zadnji pobere žeton. Zmagovalno strategijo sva ugotavljali za igralca, ki igra prvi in ob predpostavki, da oba igralca poznata igro. Pri igri z več kupi mora igralec najprej izbrati kup, iz katerega bo vzel poljubno število žetonov, saj je dovoljeno vzeti žetone le iz enega kupa naenkrat (ne more vzeti npr. enega žetona iz prvega kupa in enega žetona iz drugega kupa hkrati). V nadaljevanju podajava izbrane rezultate v tabelah, v katerih sva glede na število žetonov v kupih določali zmagovalno strategijo. Vsi rezultati igranja igre in določanja zmagovalne strategije pa so prikazani v tabelah v prilogi.

2.2.1 Igra z enim kupom žetonov (preprosti Nim)

Tabela 1: Igra z enim kupom žetonov – največji vzetek 1 žeton

ŠTEVILO ŽETONOV V KUPIH	ZMAGOVALNA STRATEGIJA ZA IGRALCA, KI IGRA PRVI
1	Vzamem vse.
2	PORAZ
3	ZMAGA, saj vsak vzame po 1 žeton.
4	PORAZ
5	ZMAGA, saj vsak vzame po 1 žeton.

Pri lihem številu žetonov v kupu vedno zmaga igralec, ki je prvi na vrsti. Pri sodem številu žetonov pa zmaga igralec, ki je drugi.

Tabela 2: Igra z enim kupom žetonov – največji vzetek 2 žetona

ŠTEVILO ŽETONOV V KUPIH	ZMAGOVALNA STRATEGIJA ZA IGRALCA, KI IGRA PRVI
1	Vzamem vse.
2	Vzamem vse.
3	PORAZ
4	Vzamem 1, da ostanejo 3 žetoni.
5	Vzamem 2, da ostanejo 3 žetoni.

Igralec lahko vzame enega ali dva žetona. Izgubi v primeru kupa s tremi žetoni oziroma v primerih, ko je število žetonov večkratnik števila 3 (pri največjem vzetku 2 žetona to pomeni pri $(2 + 1)$ žetonov).

Tabela 3: Igra z enim kupom žetonov – največji vzetek 3 žetoni

ŠTEVILO ŽETONOV V KUPIH	ZMAGOVALNA STRATEGIJA ZA IGRALCA, KI IGRA PRVI
1	Vzamem vse.
2	Vzamem vse.
3	Vzamem vse.
4	PORAZ
5	Vzamem 1, da ostanejo 4 žetoni.

Igralec lahko vzame enega, dva ali tri žetone. Izgubi v primeru kupa s štirimi žetoni oziroma v primerih, ko je število žetonov večkratnik števila 4 (pri največjem vzetku 3 žetona to pomeni pri $(3 + 1)$ žetonov).

2.2.2 Igra z dvema kupoma žetonov (osnovni Nim)

Tabela 4: Igra z dvema kupoma žetonov

ŠTEVILO ŽETONOV V KUPIH		ZMAGOVALNA STRATEGIJA ZA IGRALCA, KI IGRA PRVI
1	1	PORAZ
1	2	Vzamem 1 iz kupa 2 žetonov.
1	3	Vzamem 2 iz kupa 3 žetonov.
1	4	Vzamem 3 iz kupa 4 žetonov.
1	5	Vzamem 4 iz kupa 5 žetonov.
2	2	PORAZ
2	3	Vzamem 1 iz kupa 3 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
2	4	Vzamem 2 iz kupa 4 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
2	5	Vzamem 3 iz kupa 5 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
3	3	PORAZ
3	4	Vzamem 1 iz kupa 4 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
3	5	Vzamem 2 iz kupa 5 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
4	4	PORAZ
4	5	Vzamem 1 iz kupa 5 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
5	5	PORAZ

Igralec izgubi v primerih, ko imata oba kupa enako število žetonov. Ko sta kupa različna, mora igralec iz večjega kupa vzeti toliko žetonov, da izenači število žetonov z drugim kupom. Nato ponavlja poteze za drugim igralcem.

2.2.3 Igra s tremi kupi žetonov (osnovni Nim)

Tabela 5: Igra s tremi kupi žetonov

ŠTEVILO ŽETONOV V KUPIH			ZMAGOVALNA STRATEGIJA ZA IGRALCA, KI IGRA PRVI	ŠTEVILO ŽETONOV V KUPIH			ZMAGOVALNA STRATEGIJA ZA IGRALCA, KI IGRA PRVI
1	1	1	Vseeno iz katerega kupa vzamem 1 žeton.	2	2	4	Vzamem 4 iz kupa 4 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	1	2	Vzamem 2 iz kupa 2 žetonov.	2	2	5	Vzamem 5 iz kupa 5 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	1	3	Vzamem 3 iz kupa 3 žetonov.	2	3	3	Vzamem 2 iz kupa 2 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	1	4	Vzamem 4 iz kupa 4 žetonov.	2	3	4	Vzamem 3 iz kupa 4 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	1	5	Vzamem 5 iz kupa 5 žetonov.	2	3	5	Vzamem 4 iz kupa 5 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	2	2	Vzamem 1 iz kupa 1 žeton, nato ponavljam za drugim .	2	4	4	Vzamem 2 iz kupa 2 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	2	3	PORAZ	2	4	5	Vzamem 1 iz kupa 2 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	2	4	Vzamem 1 iz kupa 4 žetonov in ponavljam za drugim.	2	5	5	Vzamem 2 iz kupa 2 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	2	5	Vzamem 2 iz kupa 5 žetonov in ponavljam za drugim.	3	3	3	Vzamem 3 iz kupa 3 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	3	3	Vzamem 1 iz kupa 1 žeton in ponavljam poteze za drugim.	3	3	4	Vzamem 4 iz kupa 4 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	3	4	Vzamem 2 iz kupa 4 žetonov, ponavljam poteze za drugim.	3	3	5	Vzamem 5 iz kupa 5 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	3	5	Vzamem 3 iz kupa 5 žetonov in ponavljam za drugim.	3	4	4	Vzamem 3 iz kupa 3 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	4	4	Vzamem 1 iz kupa 1 žeton in ponavljam poteze za drugim.	3	4	5	Vzamem 2 iz kupa 3 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	4	5	PORAZ	3	5	5	Vzamem 3 iz kupa 3 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
1	5	5	Vzamem 1 iz kupa 1 žeton in ponavljam poteze za drugim.	4	4	4	Vzamem 4 iz kupa 4 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
2	2	2	Vzamem 2 iz kupa 2 žetonov, ponavljam poteze za drugim.	4	4	5	Vzamem 5 iz kupa 5 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
2	2	3	Vzamem 3 iz kupa 3 žetonov in ponavljam za drugim	4	5	5	Vzamem 4 iz kupa 4 žetonov, ponavljam poteze za drugim.
				5	5	5	Vzamem 5 iz kupa 5 žetonov, ponavljam poteze za drugim.

Igralec zmagaja, ko vzame vse žetone iz enega kupa, da ostaneta dva kupa z enakim številom oziroma spravi žetone v kupa (1, 2, 3) ali (1, 4, 5) in ponavlja poteze za drugim igralcem.

3 RAZPRAVA

Pri proučevanju pisnih virov sva ugotovili, da je zmagovalne strategije že preučeval ameriški matematik Charles Leonard Bouton.

» Profesor iz harvardske univerze je tako leta 1902 v reviji The Annals of Mathematics objavil rešitev igre Nim, na katero lahko danes gledamo kot na rojstvo kombinatornih iger. Bouton, ki je želel z igro prikazati prednosti binarnega številskega sistema, je našel preprosto formulo, s katero lahko igralci takoj ugotovijo pravilne poteze in igro obrnejo sebi v korist. Velja, da je ustvaril popolno teorijo in zapisal zmagovalno strategijo.« (Prapertnik, 2015)

Zmagovalna strategija pravi, da število žetonov v kupu zapišemo v dvojiškem sistemu. Nato seštejemo vsa števila v dvojiškem sistemu. Če je vsota 0, je igra za igralca na potezi izgubljena. Zato igralec, ki je na potezi, poskuša soigralcu narediti položaj žetonov tako, da bo vsota v dvojiškem sistemu enaka 0. Seveda zmaga s tem še ni zagotovljena, saj mora vsakokrat poteze spreminjati v dvojiško vsoto 0. Igra se konča, ko ni več žetonov (zmagovalec pobere zadnjega).

Primer:

Imejmo 3 kupe s tremi, štirimi in petimi žetoni. Pretvorimo število žetonov v dvojiški sistem:

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$3_{(10)} = 11_{(2)}$$

$$4_{(10)} = 100_{(2)}$$

$$5_{(10)} = 101_{(2)}$$

Seštejmo števila v dvojiškem sistemu:

$$11_{(2)} + 100_{(2)} + 101_{(2)} = 010_{(2)}$$

Vsota je različna od 0, zato lahko igralec, ki je na potezi, soigralcu nastavi položaj z dvojiško vsoto 0. Vidimo, da je v drugem stolpcu vsota 1, torej jo mora spremeniti v 0. To lahko naredi tako, da iz kupa s tremi žetoni vzame 2 in ostane 1 žeton.

Tako dobimo dvojiško vsoto 0:

$$1_{(2)} + 100_{(2)} + 101_{(2)} = 000_{(2)}$$

Igralec vsakokrat poteze spreminja v dvojiško vsoto 0, dokler ne zmanjka žetonov in on pobere zadnjega.

Pri raziskovanju igre Nim sva se tako odločili preizkusiti Boutonovo strategijo. Žetone sva postavili v kupe in število žetonov pretvarjali v dvojiško število. Kmalu sva ugotovili, da je pretvarjanje števil v dvojiški sistem z zapisovanjem na list zamudno. Odločili sva se, da že samo postavitve žetonov v kupu prilagodiva dvojiškemu sistemu.

Primer:

Kupi s tremi, štirimi in petimi žetoni.



Slika 2: Kupi s tremi, štirimi in petimi žetoni (Vir: avtorici)

Postavitve $11_{(2)}$, $100_{(2)}$, $101_{(2)}$ iz katere lahko takoj ugotovimo dvojiško vsoto $010_{(2)}$.



Slika 3: Dvojiška postavitve kupov s tremi, štirimi in petimi žetoni (Vir: avtorici)

Na ta način sva nadaljevali najino raziskovanje. Najprej sva se igrali igrico z enim kupom žetonov, nato z dvema in na koncu še s tremi kupi žetonov. Omejili sva se na kupe z največjo velikostjo 5 žetonov. Spreminjali sva vzetke od enega žetona do vseh petih. Ugotavljava:

1. Pri igri z enim kupom n žetonov in vzetku k žetonov, kjer velja ($1 \leq k \leq n$), igralec izgubi v primeru, ko je število žetonov n večkratnik števila ($k + 1$).

Primer: Število žetonov v kupu je 5. Največji vzetek je 4. Za prvega igralca je igra izgubljena, saj lahko vzame 1, 2, 3 ali 4 žetone, na koncu vedno ostane toliko žetonov, kot jih drugi igralec lahko vzame in zmaga.

2. Pri igri z dvema kupoma žetonov prvi igralec izgubi v primerih, ko imata kupa enako število žetonov (dvojiška vsota je 0). Pri kupih z različnim številom žetonov pa zmaga, če vzame toliko žetonov iz večjega kupa, da izenači in nato ponavlja poteze za drugim igralcem.
3. Pri igri s tremi kupi žetonov prvi igralec zmaga v večini primerov. Paziti mora, da drugemu igralcu nastavlja dvojiško vsoto 0. Pri najinem raziskovanju sva se omejili na največje število 5 žetonov v kupu, zato ugotavljava, da izgubi v primerih s kupi (**1, 2, 3**) in (**1, 4, 5**) žetonov.

Glede na zgoraj zapisano lahko na najino raziskovalno vprašanje, ali število žetonov v kupu vpliva na zmago, odgovoriva pritrdilno in da je v večini primerov dobro, da igralec igra prvi, saj ima večje možnosti za zmago.

4 ZAKLJUČEK

Namen najine raziskovalne naloge je bil raziskati igrico Nim. Želeli sva ugotoviti, ali število žetonov v kupu vpliva na zmago in ali je pomembno, da zmagovalec igra prvi. Dela sva se lotili sistematično. V teoretičnem delu sva pri preučevanju virov ugotovili, da je zmagovalno strategijo že zapisal ameriški matematik Charles Leonard Bouton. Pri tej strategiji je pomembno, da število žetonov v kupu zapišemo v dvojiškem sistemu. Nato seštejemo vsa števila v dvojiškem sistemu. Če je vsota 0, je igra za igralca na potezi izgubljena. Zato igralec, ki je na potezi, poskuša soigralcu narediti položaj žetonov tako, da bo vsota v dvojiškem sistemu enaka 0.

V osrednjem delu sva z metodo poskušanja preizkušali Boutonovo strategijo. Omejili sva se na največ tri kupe z največjim številom žetonov 5. Žetone sva postavljali v kupe in število žetonov pretvarjali v dvojiško število. Pri tem sva se odločili, da že samo postavitev žetonov v kupu prilagodiva dvojiškemu sistemu. V enem kupu sva žetone postavili v manjše skupine po potencah števila 2. Pri tem sva dobili nazorno sliko dvojiškega zapisa števil, kjer sva lahko takoj ugotovili dvojiško vsoto. Ta je pomembna, saj zmagovalna strategija pravi, da igralec nastavlja drugemu vsoto 0, če želi zmagati. Glede na najina raziskovalna vprašanja ugotavljava, da število žetonov v kupu vpliva na zmago in da je v večini primerov dobro, da igralec igra prvi, saj ima večje možnosti za zmago.

Pri pisanju raziskovalne naloge sva se naučili veliko novega. Spoznali sva, da obstaja več številskih sistemov, predvsem pa, kje se uporablja dvojiški sistem in kako računati v njem.

5 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Matematika je nepogrešljiva na različnih področjih v življenju. Marsikatero napravo ne bi bilo danes (računalniki, medicinska oprema ...) brez razvoja matematike. Pomembna je za razvijanje abstraktnega mišljenja in logičnega sklepanja. Le-ta nas uči natančnosti in doslednosti.

Prav to pa je pomembno tudi pri igranju družabnih iger, pri katerih moramo upoštevati pravila, obenem pa se učimo sodelovanja in strpnosti. Igranje iger razvija strateško razmišljanje in ustvarjalnost. Prav tako pa ponuja veliko izzivov za učenje medsebojnih odnosov in družbenih pravil.

6 VIRI IN LITERATURA

1. *Boutonova teorija*. Spletna stran (pridobljeno 15. 12. 2017):
<https://paradise.caltech.edu/ist4/lectures/Bouton1901.pdf>
2. Bračič J., *Številski sistemi*. Spletna stran (pridobljeno 19. 12. 2017):
<https://www.fmf.uni-lj.si/~bracic/papers/StevilskiSistemiPresek.pdf>
3. *Desetiški številski sistem*. Spletna stran (pridobljeno 19. 12. 2017):
https://sl.wikipedia.org/wiki/Desetiški_številski_sistem
4. *Dvojiški sistem*. Spletna stran (pridobljeno 17. 12. 2017):
https://sl.wikipedia.org/wiki/Dvojiški_številski_sistem
5. Juvan M., *Nim in sorodne igre*. Spletna stran (pridobljeno 15. 12. 2017):
<https://www.dmfa.si/Predavanja/Dokumenti/50/Juvan.pdf>
6. *Kineska igra Nim*. Spletna stran (pridobljeno 15. 12. 2017):
mis.element.hr/fajli/214/12-12.pdf
7. *Nimatron*. Spletna stran (pridobljeno 12. 1. 2018):
<https://pcgaminghistory.wordpress.com/1940/04/18/nimatron/>
8. Prapertnik A., *Igra Nim in njena uporabnost v šolski situaciji*, diplomsko delo. Spletna stran (pridobljeno 15. 12. 2017): [UN_Prapertnik_Ales_2015.pdf](#)
9. *Različni številski sistemi*. Spletna stran (pridobljeno 19. 12. 2017):
https://si.openprof.com/wb/poglavje:različni_številski_sistemi/1749/
10. Rojko, *Igra Nim*. Spletna stran (pridobljeno 17. 12. 2017):
www.presek.si/7/444-Rojko-NIM.pdf
11. *Številski sistemi*. Spletna stran (pridobljeno 19. 12. 2017):
https://sl.wikipedia.org/wiki/Številski_sistem

12. Vencelj M., *Mala šola številskih sestavov*. Spletna stran (pridobljeno 19. 12. 2017):
www.presek.si/30/1522-Vencelj-sola.pdf

13. Višak R., *Igre*. Spletna stran (pridobljeno 12. 1. 2018): <http://www.gimnazija-izdijankoveckoga-kc.skole.hr/upload/gimnazija-izdijankoveckoga-kc/multistatic/405/Igre.pdf>

14. Vega 1, i-učbenik za 1. letnik srednje šole. Spletna stran (pridobljeno 19. 12. 2017):
<http://www.iucbeniki.si/vega1/19/index2.html>

7 PRILOGE

7.1 Igra z enim kupom žetonov

Tabela 6: Igra z enim kupom – vzamem največ 1 žeton

VELIKOST KUPA	ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	ZMAGA	Vzamem vse
2	PORAZ	
3	ZMAGA	Izmenično jemljeva po 1
4	PORAZ	
5	ZMAGA	Izmenično jemljeva po 1

Tabela 7: Igra z enim kupom – vzamem največ 2 žetona

VELIKOST KUPA	ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	ZMAGA	Vzamem vse
2	ZMAGA	Vzamem vse
3	PORAZ	
4	ZMAGA	Vzamem 1, da ostanejo 3
5	ZMAGA	Vzamem 2, da ostanejo 3

Tabela 8: Igra z enim kupom – vzamem največ 3 žetone

VELIKOST KUPA	ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	ZMAGA	Vzamem vse
2	ZMAGA	Vzamem vse
3	ZMAGA	Vzamem vse
4	PORAZ	
5	ZMAGA	Vzamem 1, da ostanejo 4

Tabela 9: Igra z enim kupom – vzamem največ 4 žetone

VELIKOST KUPA	ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	ZMAGA	Vzamem vse
2	ZMAGA	Vzamem vse
3	ZMAGA	Vzamem vse
4	ZMAGA	Vzamem vse
5	PORAZ	

7.2 Igra z dvema kupoma žetonov

Tabela 10: Igra z dvema kupoma – vzamem največ 1 žeton

VELIKOST KUPOV		ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	PORAZ	
1	2	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	3	PORAZ	
1	4	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	5	PORAZ	
2	2	PORAZ	
2	3	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
2	4	PORAZ	
2	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
3	3	PORAZ	
3	4	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
3	5	PORAZ	
4	4	PORAZ	
4	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
5	5	PORAZ	

Tabela 11: Igra z dvema kupoma – vzamem največ 2 žetona

VELIKOST KUPOV		ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	PORAZ	
1	2	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 2
1	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 3
1	4	PORAZ	
1	5	PORAZ	
2	2	PORAZ	
2	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2
2	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 4
2	5	PORAZ	
3	3	PORAZ	
3	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
3	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
4	4	PORAZ	
4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 5
5	5	PORAZ	

Tabela 12: Igra z dvema kupoma – vzamem največ 3 žetone

VELIKOST KUPOV		ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	PORAZ	

1	2	PORAZ	
1	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 3
1	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 4
1	5	PORAZ	
2	2	PORAZ	
2	3	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 3
2	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 4
2	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 5
3	3	PORAZ	
3	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
3	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
4	4	PORAZ	
4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 5
5	5	PORAZ	

Tabela 13: Igra z dvema kupoma – vzamem največ 4 žetone

VELIKOST KUPOV		ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	PORAZ	
1	2	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 2
1	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 3
1	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 4
1	5	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 5
2	2	PORAZ	
2	3	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 3
2	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 4
2	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 5
3	3	PORAZ	
3	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
3	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
4	4	PORAZ	
4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 5
5	5	PORAZ	

Tabela 14: Igra z dvema kupoma – vzamem največ 5 žetonov

VELIKOST KUPOV		ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	PORAZ	
1	2	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 2
1	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 3
1	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 4
1	5	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 5
2	2	PORAZ	
2	3	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 3

2	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 4
2	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 5
3	3	PORAZ	
3	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
3	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
4	4	PORAZ	
4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 5
5	5	PORAZ	

7.3 Igra s tremi kupi žetonov

Tabela 15: Igra s tremi kupi – vzamem največ 1 žeton

VELIKOST KUPOV			ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	1	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	1	2	PORAZ	
1	1	3	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	1	4	PORAZ	
1	1	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	2	2	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	2	3	PORAZ	
1	2	4	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	2	5	PORAZ	
1	3	3	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	3	4	PORAZ	
1	3	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	4	4	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
1	4	5	PORAZ	
1	5	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
2	2	2	PORAZ	
2	2	3	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
2	2	4	PORAZ	
2	2	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
2	3	3	PORAZ	
2	3	4	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
2	3	5	PORAZ	
2	4	4	PORAZ	
2	4	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
2	5	5	PORAZ	
3	3	3	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
3	3	4	PORAZ	
3	3	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
3	4	4	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
3	4	5	PORAZ	

3	5	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
4	4	4	PORAZ	
4	4	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1
4	5	5	PORAZ	
5	5	5	ZMAGA	Ni pomembno iz katerega kupa vzamem 1

Tabela 16: Igra s tremi kupi – vzamem največ 2 žetona

VELIKOST KUPOV			ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	1	ZMAGA	
1	1	2	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2
1	1	3	PORAZ	
1	1	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
1	1	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
1	2	2	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	2	3	PORAZ	
1	2	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
1	2	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
1	3	3	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	3	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 4, nato pa ponavljam
1	3	5	PORAZ	
1	4	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	4	5	PORAZ	
1	5	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 5, nato pa ponavljam
2	2	2	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	2	3	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 2
2	2	4	PORAZ	
2	2	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 5, nato pa ponavljam
2	3	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2
2	3	4	PORAZ	
2	3	5	PORAZ	
2	4	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 2, nato pa
2	5	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
3	3	3	PORAZ	
3	3	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4, nato pa ponavljam
3	3	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5, nato pa ponavljam
3	4	4	PORAZ	
3	4	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 3
3	5	5	PORAZ	
4	4	4	PORAZ	
4	4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 5
4	5	5	PORAZ	
5	5	5	ZMAGA	Po dveh potezah nastavimo soigralcu poraz in ponavljamo za njim

Tabela 17: Igra s tremi kupi – vzamem največ 3 žetone

VELIKOST KUPOV			ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	1	ZMAGA	
1	1	2	ZMAGA	Vzamem vse iz kateregakoli kupa
1	1	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3
1	1	4	PORAZ	
1	1	5	PORAZ	
1	2	2	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	2	3	PORAZ	
1	2	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
1	2	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
1	3	3	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	3	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 4, nato pa ponavljam
1	3	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 5, nato pa ponavljam
1	4	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	4	5	PORAZ	
1	5	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
2	2	2	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	2	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3
2	2	4	PORAZ	
2	2	5	PORAZ	
2	3	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2
2	3	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 4
2	3	5	PORAZ	
2	4	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	5	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
3	3	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
3	3	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4, nato pa ponavljam
3	3	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5, nato pa ponavljam
3	4	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
3	4	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 3
3	5	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
4	4	4	PORAZ	
4	4	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 4
4	5	5	PORAZ	
5	5	5	ZMAGA	Po dveh potezah nastavimo soigralcu poraz in ponavljamo za njim

Tabela 18: Igra s tremi kupi – vzamem največ 4 žetone

VELIKOST KUPOV			ZAČNEM PRVA	STRATEGIJA
1	1	1	ZMAGA	
1	1	2	ZMAGA	Vzamem vse iz kateregakoli kupa
1	1	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3
1	1	4	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4
1	1	5	PORAZ	
1	2	2	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	2	3	PORAZ	
1	2	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
1	2	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
1	3	3	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	3	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 4, nato pa ponavljam
1	3	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 5, nato pa ponavljam
1	4	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	4	5	PORAZ	
1	5	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
2	2	2	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	2	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3
2	2	4	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4
2	2	5	PORAZ	
2	3	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2
2	3	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 4
2	3	5	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 5, nato pa ponavljam
2	4	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	5	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
3	3	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
3	3	4	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4, nato pa ponavljam
3	3	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5, nato pa ponavljam
3	4	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
3	4	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 3
3	5	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
4	4	4	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4
4	4	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 4
4	5	5	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4
5	5	5	ZMAGA	Po dveh potezah nastavimo soigralcu poraz in ponavljamo za njim

Tabela 19: Igra s tremi kupi – vzamem največ 5 žetonov

VELIKOST KUPOV			ZAČNEM PRVI	STRATEGIJA
1	1	1	ZMAGA	
1	1	2	ZMAGA	Vzamem vse iz kateregakoli kupa
1	1	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3
1	1	4	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4, nato pa ponavljam
1	1	5	ZMAGA	Vzamem 5 iz kupa 5, nato pa ponavljam
1	2	2	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	2	3	PORAZ	
1	2	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 4
1	2	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 5
1	3	3	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	3	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 4, nato pa ponavljam
1	3	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 5, nato pa ponavljam
1	4	4	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
1	4	5	PORAZ	
1	5	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 1, nato pa ponavljam
2	2	2	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	2	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3
2	2	4	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4
2	2	5	ZMAGA	Vzamem 5 iz kupa 5
2	3	3	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2
2	3	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 4
2	3	5	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 5
2	4	4	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	4	5	ZMAGA	Vzamem 1 iz kupa 2, nato pa ponavljam
2	5	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 2, nato pa ponavljam
3	3	3	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
3	3	4	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4, nato pa ponavljam
3	3	5	ZMAGA	Vzamem 5 iz kupa 5, nato pa ponavljam
3	4	4	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
3	4	5	ZMAGA	Vzamem 2 iz kupa 3
3	5	5	ZMAGA	Vzamem 3 iz kupa 3, nato pa ponavljam
4	4	4	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4, nato pa ponavljam
4	4	5	ZMAGA	Vzamem 5 iz kupa 5
4	5	5	ZMAGA	Vzamem 4 iz kupa 4, nato pa ponavljam
5	5	5	ZMAGA	Vzamem 5 iz kupa 5, nato pa ponavljam