Mladi za napredek Maribora 2018

35. srečanje

Najmanjše število z znanim številom deliteljev

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: SVEN ALEKSANDAR MARINKOVIĆ, LUKA ALEKSANDER RIEDL
Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ
Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2018

Kazalo

1. Povzetek

Naravna števila imajo delitelje. Vsakemu naravnemu številu znamo določiti katere delitelje ima in koliko je teh deliteljev. Števila lahko razvrstimo v posamezne razrede glede na število deliteljev. Vsak tako oblikovani razred števil ima posebne lastnosti. S poznavanjem teh lastnosti želimo v nalogi raziskati ali lahko izračunamo naravna števila, za katera vnaprej določimo koliko deliteljev naj imajo. Teh števil je seveda neskončno mnogo, morda najdemo najmanjše tako število.

2. Uvod

Z naravnimi števili preštevamo. Tako je prvo naravno število 1, vsako naslednje je za ena večje od predhodnega. Delitelji naravnih števil so prav tako naravna števila, ki izbrano število delijo brez ostanka. Vsako naravno število ima vedno enako deliteljev, tako ima število 10 natanko štiri delitelje, to so števila 1, 2, 5 in 10. Seveda imajo tudi nekatera druga naravna števila prav tako natanko štiri delitelje, recimo število 6 (delitelji 1, 2, 3, 6) ali število 22 (1, 2, 11, 22). Pravzaprav je števil s štirimi delitelji nešteto. Je pa najmanjše število s štirimi delitelji prav število 6. Najmanjše število s tremi delitelji je število 4 (delitelji so 1, 2 in 4). Katero pa je najmanjše število z desetimi delitelji?

V nadaljevanju predstavimo potrebno znanje o naravnih številih in njihovih deliteljih. Raziščemo lastnosti naravnih števil glede na število deliteljev. Poskušamo poiskati postopek za iskanje najmanjšega števila z danim številom deliteljev.

3. Števila imajo delitelje

Naravna števila imajo delitelje. Delitelji naravnih števil so števila, s katerimi je izbrano naravno število deljivo brez ostanka. Poznamo praštevila in sestavljena števila.

Praštevila so vsa števila z natanko dvema deliteljema.

Primer: Število 5 je praštevilo. Ima natanko dva delitelja, število 1 in število 5. Zapišemo količnika 5 : 1 = 5 in 5 : 5 = 1.

Delitelje števil lahko zapišemo z zapisom $D_5 = \{1, 5\}$.

Sestavljena števila so števila s tremi ali več delitelji, ki jih lahko razstavimo na prafaktorje.

Primer: Število 20 je sestavljeno število. Deljivo je s števili 1, 2, 4, 5, 10, 20.

20 : **1** = 20 ; 20 : **2** = 10 ; 20 : **4** = 5 ; 20 : **5** = 4 ; 20 : **10** = 2 ; 20 : **20** = 1

Z zapisom $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Razdelitev na prafaktorje: $20 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$.

Število deliteljev nekega naravnega števila lahko določimo s pomočjo razcepa števila na prafaktorje.

Poglejmo primer za število 8. Z razcepom je 8 = 2 · 2 · 2. Delitelji števila 8 so tako števila 1, 2, 2·2, 2·2·2, torej vsi možni različni produkti prafaktorjev.

V primeru števila 2 · 5 · 11 sploh ne poznamo števila (morali bi zmnožiti prafaktorje), delitelji tega števila pa so: 1, 2, 5, 11, 2 · 5, 2 · 11, 5 · 11, 2 · 5 · 11. Torej D_{110} = {1, 2, 5, 11, 10, 22, 55, 110}.

3.1 Števila razdelimo glede na število deliteljev

Zapišimo v preglednico (preglednica 1) število deliteljev za prvih petdeset naravnih števil.

Naravno število	Število deliteljev	Naravno število	Število deliteljev	Naravno število	Število deliteljev	Naravno število	Število deliteljev
1	1	13	2	25	3	37	2
2	2	14	4	26	4	38	4
3	2	15	4	27	4	39	4
4	3	16	5	28	6	40	8
5	2	17	2	29	2	41	2
6	4	18	6	30	8	42	8
7	2	19	2	31	2	43	2
8	4	20	6	32	6	44	6
9	3	21	4	33	4	45	6
10	4	22	4	34	4	46	4
11	2	23	2	35	4	47	2
12	6	24	8	36	9	48	10

Število 49 ima 3 delitelje, število 50 pa 6 deliteljev.

Preglednica 1

Z rumeno so označena števila z dvema deliteljema oziroma praštevila.

Števila bomo razdelili na število deliteljev.

Števila z enim deliteljem: 1.

Števila z dvema deliteljema: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Števila s tremi delitelji: 4, 9, 25, 49.

Števila s štirimi delitelji: 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27, 33, 34, 35, 38, 39, 46 .

Števila s petimi delitelji: 16.

Števila s šestimi delitelji: 12, 18, 20, 28, 32, 44, 45, 50.

Števila s sedmimi delitelji: /.

Števila z osmimi delitelji: 24, 30, 40, 42.

Števila z devetimi delitelji: 36.

Števila z desetimi delitelji: 48.

3.2 Lastnosti števil glede na število deliteljev

V nadaljevanju poglejmo lastnosti števil, ki smo jih razvrstili v skupine glede na število deliteljev. Števila v posamezni skupini bomo zapisali z razcepom na prafaktorje.

<u>Števila z enim deliteljem</u>: 1.

Število 1 ima samo en delitelj in ni praštevilo in ni sestavljeno število.

<u>Števila z dvema deliteljema</u>: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Števila z natanko dvema deliteljema so praštevila. Vsako praštevilo p ima delitelja 1 in p.

<u>Števila s tremi delitelji</u>: 4, 9, 25, 49.

Števila s tremi delitelji zapišemo z razcepom na prafaktorje:

$4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $49 = 7^2$.

Iz razcepa na prafaktorje vidimo, da vsako število s tremi delitelji zapišemo s potenco, ki ima za osnovo praštevilo in stopnjo 2.

Sklepamo, da ima vsako število, ki ga zapišemo s potenco $p^2 = p \cdot p$ (kjer je p praštevilo), natanko tri delitelje. Ti tri delitelji so 1, p in p^2.

Poglejmo primere:

Število $11^2 = 121$ ima natanko tri delitelje 1, 11, 121.

Število $13^2 = 169$ ima natanko tri delitelje 1, 13, 169.

Števila s štirimi delitelji: 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27, 33, 34, 35, 38, 39, 46.

Števila s štirimi delitelji zapišimo z razcepom na prafaktorje:

$6 = 2 \cdot 3$	$15 = 3 \cdot 5$	$27 = 3^3$
$8 = 2^3$	$21 = 3 \cdot 7$	$33 = 3 \cdot 11$
$10 = 2 \cdot 5$	$22 = 2 \cdot 11$	$34 = 2 \cdot 17$
$14 = 2 \cdot 7$	$26 = 2 \cdot 13$	$35 = 5 \cdot 7$

Ugotovimo, da imamo dve možnosti.

Prva možnost je taka, da število napišemo s potenco praštevila s stopnjo 3 (števili 8 in 27).

Druga možnost je taka, da je vsako število napisano s produktom dveh praštevil s stopnjo 1 (6, 10 …).

(Prva možnost) Sklepamo, da ima vsako število, ki ga zapišemo p^3 (p je praštevilo) natanko štiri delitelje. Poglejmo primere:

Število $5^3 = 125$ ima natanko štiri delitelje 1, 5, 25, 125.

Število $7^3 = 343$ ima natanko štiri delitelje 1, 7, 49, 343.

Torej ima število p^3 delitelje 1, p, p^2 in p^3.

(Druga možnost) Sklepamo, da kadar število razcepimo na dva prafaktorja (npr. $10 = 2 \cdot 5$), imata števili 2 in 5 (praštevili) dva delitelja, skupaj torej $2 \cdot 2 = 4$. Zmnožek števila deliteljev prafaktorjev je število deliteljev izbranega števila. Poglejmo primere:

$11 \cdot 7 = 77$ torej je $2 \cdot 2 = 4$, zato ima število 77 natanko štiri delitelje 1, 7, 11, 77.

$17 \cdot 3 = 51$ torej je $2 \cdot 2 = 4$, zato ima število 51 natanko štiri delitelje 1, 3, 17, 51.

Če število zapišemo s produktom dveh prafaktorjev $p_1 \cdot p_2$, ima to število natanko štiri delitelje. Ti delitelji so 1, p_1, p_2, $p_1 \cdot p_2$.

Števila s petimi delitelji: 16

Števila s petimi delitelji zapišemo z razcepom na prafaktorje: $16 = 2^4$.

Iz razcepa na prafaktorje ugotovimo, da vsako število s petimi delitelji zapišemo s potenco, ki ima za osnovo praštevilo in stopnjo 4. Zato sklepamo, da ima vsako praštevilo s stopnjo 4, natanko pet deliteljev. Poglejmo primere:

Število $3^4 = 81$ ima natanko pet deliteljev 1, 3, 9, 27, 81.

Število $5^4 = 625$ ima natanko pet deliteljev 1, 5, 25, 125, 625.

Če je število zapisano s potenco praštevila p^4 ima pet deliteljev, to so 1, p, p^2, p^3, p^4.

<u>Števila s šestimi delitelji</u>: 12, 18, 20, 28, 32, 44, 45, 50.

Števila s šestimi delitelji zapišemo z razcepom na prafaktorje:

$12 = 2^2 \cdot 3$	$28 = 2^2 \cdot 7$	$45 = 3^2 \cdot 5$
$18 = 3^2 \cdot 2$	$32 = 2^5$	$50 = 5^2 \cdot 2$
$20 = 2^2 \cdot 5$	$44 = 2^2 \cdot 11$	

Prva možnost je taka, da števila s šestimi delitelji zapišemo s potenco praštevila s stopnjo 5.

Primer:

$2^5 = 32$, $D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ $3^5 = 243$, $D_{243} = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$

Število p^5 ima torej natanko šest deliteljev. To so števila 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5.

Druga možnost je taka, da prafaktor množimo s prafaktorjem s stopnjo 2.

Primer:

$5^2 \cdot 3 = 75$, $D_{75} = \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$

$3^2 \cdot 7 = 63$, $D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

Poljubno število je zapisano s produktom $p_1^2 \cdot p_2$. To število ima natanko šest deliteljev, saj ima faktor p_1^2 tri delitelje (smo ugotovili zgoraj) in faktor p_2 dva delitelja, skupaj tako $3 \cdot 2 = 6$ deliteljev.

<u>Števila s sedmimi delitelji</u>

Števil s sedmimi delitelji ni do števila 50. Iz primerov števil s tremi, štirimi, petimi, šestimi delitelji (p^2, p^3, p^4, p^5) sklepamo, da lahko število s sedmimi delitelji zapišemo kot p^6. Delitelji tega števila so 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5 , p^6. Poglejmo primere.

$2^6 = 64$, $D_{64} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

$3^6 = 729$, $D_{729} = \{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$

Ugotovili smo, da števila s sedmimi delitelji zapišemo s potenco prafaktorja s stopnjo 6.

Števila z osmimi delitelji: 24, 30, 40, 42.

Števila z osmimi delitelji zapišemo z razcepom na prafaktorje:

$24 = 2^3 \cdot 3$	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	$128 = 2^7$
$40 = 2^3 \cdot 5$	$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$	$2187 = 3^7$
$56 = 2^3 \cdot 7$	$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$	$78125 = 5^7$

Iz razcepa na prafaktorje ugotovimo, da imamo tri možnosti.

Prva možnost je taka, da zapišemo potenco, ki ima za osnovo praštevilo in stopnjo 7.

Primeri so označeni z zeleno barvo.

Število je torej oblike p^7. Delitelji tega števila so: 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7. Jih je natanko osem.

Druga možnost je taka, da množimo tri različna praštevila.

Primeri so označeni z modro barvo.

Število je oblike $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$. Vsak prafaktor ima natanko dva delitelja. Ker je $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, sklepamo, da na skupno število deliteljev vpliva število deliteljev posameznih prafaktorjev.

Tretja možnost je taka, da množimo potenco 2^3 z nekim drugim praštevilom. Sklepamo, da gre za produkt potence s stopnjo 3 in osnovo praštevilom.

Primeri so označeni z rdečo barvo.

Število je oblike $p_1^3 \cdot p_2$. Iz že spoznanega vemo, da ima število p_1^3 natanko štiri delitelje, število p_2 pa dva delitelja. Seveda je $4 \cdot 2 = 8$.

Števila z devetimi delitelji: 36.

Število z devetimi delitelji zapišemo z razcepom na prafaktorje:

$36 = 2^2 \cdot 3^2$, $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

Število je zapisano v obliki produkta $p_1^2 \cdot p_2^2$. To število ima delitelje 1, p_1, p_2, p_1^2, p_2^2, $p_1 \cdot p_2$, $p_1^2 \cdot p_2$, $p_1 \cdot p_2^2$, $p_1^2 \cdot p_2^2$. Število p_1^2 ima natanko tri delitelje, število p_2^2 ima natanko tri delitelje. Seveda je $3 \cdot 3 = 9$.

Poglejmo še dva primera.

$100 = 2^2 \cdot 5^2$, $D_{100} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$

$196 = 2^2 \cdot 7^2$, $D_{196} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196\}$

S primeri smo že ugotovili, da ima recimo p^6 sedem deliteljev. Sklepamo, da ima devet deliteljev število oblike p^8. Delitelji so 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, p^8.

Tako imajo števila $2^8 = 256$, $3^8 = 6\,561$, $5^8 = 390\,625$ natanko devet deliteljev.

Števila z desetimi delitelji: 48

Števila z desetimi delitelji zapišemo z razcepom na prafaktorje:

$48 = 2^4 \cdot 3$	$512 = 2^9$
$80 = 2^4 \cdot 5$	$19\,683 = 3^9$

Iz razcepa spet ugotovimo, da imamo dve možnosti.

Prva možnost je taka, da število zapišemo s potenco, ki ima za osnovo praštevilo in stopnjo 9.

Število je oblike p^9. Delitelji tega števila so 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, p^8, p^9.

Druga možnost je taka, da število zapišemo s produktom potence, ki ima za osnovo praštevilo in stopnjo 4 in praštevilom, ki ni enako osnovi potence.

Število zapišemo kot produkt $p_1^4 \cdot p_2$. Iz zgoraj zapisanega vemo, da ima vsako število oblike p^4 natanko pet deliteljev. Vsako praštevilo pa natanko dva delitelja. Ker je vseh deliteljev deset, je to natanko $5 \cdot 2 = 10$.

3. 3 Ugotovitve

Ugotovimo, da ima vsako število, ki ga zapišemo s potenco p^k (p – praštevilo, k – naravno število) natanko $k + 1$ deliteljev.

Ugotovimo, da če množimo dve različni praštevili ($p_1 \cdot p_2$) dobimo število s štirimi delitelji. Število p_1 ima dva delitelja in število p_2 ima prav tako dva delitelja, zato število deliteljev prvega praštevila pomnožimo s številom deliteljev drugega praštevila, kar je $2 \cdot 2 = 4$.

Ugotovimo, da če je razcep na prafaktorje sestavljen iz praštevila s stopnjo, za katero velja, da je večja od 1, recimo p^k in s še enim praštevilom p_1, ima število toliko deliteljev kot je produkt števil deliteljev obeh faktorjev. Število p^k ima $k + 1$ deliteljev število p_1 ima dva delitelja, torej ima število $p^k \cdot p1$ natanko $(k + 1) \cdot 2$ deliteljev.

Ugotovimo, da če je razcep sestavljen iz treh ali več praštevil je število deliteljev enako produktu števil deliteljev posameznih prafaktorjev.

Ugotovimo, da če je razcep sestavljen iz več prafaktorjev s stopnjo, ki je večja od 1, ima število toliko deliteljev, kot je produkt števila deliteljev vseh faktorjev.

4. Najmanjše število z danim številom deliteljev

Začnimo s konkretnima primeroma:

a) Katero je najmanjše naravno število s šestimi delitelji ?

Imamo več možnosti:

1. Prva možnost je, da število napišemo s potenco p^k (p – praštevilo, k – naravno število). Izberemo najmanjšo možno osnovo, ki je hkrati praštevilo, to je število 2 in stopnjo 5, ker je 5 + 1 = 6. Število ima natanko 6 deliteljev.

   Zapišemo $2^5 = 32$ $D_{32} = \{ 1, 2, 4, 8, 16, 32 \}$.

2. Druga možnost je, da množimo dve različni praštevili. Ena ima stopnjo 2 druga pa stopnjo 1. Torej $p_1^2 \cdot p_2$. Faktor s stopnjo 2 ima tri delitelje, faktor p_2 ima dva delitelja. Za osnovi Izberemo najmanjši različni praštevili to sta 2 in 3, zapišemo

   $2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$ $D_{12} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \}$.

   Če izberemo zapis $3^2 \cdot 2 = 18$, dobimo prav tako število s šestimi delitelji, vendar večje od števila 12.

   Število dvanajst je najmanjše naravno število s šestimi delitelji.

b) Katero je najmanjše naravno število z dvanajstimi delitelji?

Spet poglejmo več možnosti:

1. možnost je ta, da najmanjše praštevilo zapišemo s potenco s stopnjo 11. Tako je

$2^{11} = 2\,048$.

2. možnost je ta, da zmnožimo faktorja s štirimi, oziroma tremi delitelji, torej $p_1^3 \cdot p_2^2$. Spet izberemo najmanjši možni praštevili za osnovi, $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$. Lahko bi zapisali tudi $3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72$, a dobimo enako število z dvanajstimi delitelji.

3. možnost je ta, da zmnožimo faktorja s šestimi in dvema deliteljema, torej $p_1^5 \cdot p_2$, saj ima tako število natanko dvanajst deliteljev. Za osnovi izberemo najmanjši praštevili, $3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$, kar je večje od števila 72.

4. možnost je ta, da zmnožimo tri števila, eno s tremi delitelji in dve s po dvema deliteljema, $p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3$. Izberemo osnove, ki so najmanjša možna praštevila, $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Z drugačno razporeditvijo osnov dobimo sicer števila z dvanajstimi delitelji, vendar večja, recimo $3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 90$.

Ugotovili smo, da je najmanjše število z dvanajstimi delitelji število 60,

$D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

Iz zapisanih in drugih primerov ugotovimo, da je pri iskanju najmanjšega števila z danim številom deliteljev pomembno, koliko deliteljev želimo, da število ima.

Če želimo, da ima iskano število praštevilsko število deliteljev, recimo 3, 5, 7, 11 …, je samo ena možnost za iskano število. Če naj ima recimo tri delitelje, zapišemo število p^2, kjer je p najmanjše možno praštevilo. Torej če naj ima število r deliteljev, kjer je r praštevilo, bomo to število zapisali in izračunali s p^{r-1}.

Primer za število s 17 delitelji (število 17 je praštevilo) je število 2^{16}.

Če naj ima iskano najmanjše naravno število za število deliteljev sestavljeno število, zapišemo število deliteljev z razcepom na prafaktorje. Upoštevamo vse različne možnosti produktov, saj tako raziščemo vse možnosti. Pri tem za osnove uporabimo najmanjša možna praštevila. Recimo da želimo neko število z n delitelji. Število n razcepimo na prafaktorje, $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots p_m^{k_m}$. Pri tem so osnove potenc praštevila, stopnje so naravna števila.

c) Katero je najmanjše število s petnajstimi delitelji?

1. možnost je ta, da napišemo potenco s stopnjo 14, torej 2^{14}. Praštevilo (izberemo najmanjše možno) s stopnjo, ki je za eno manjša od števila deliteljev (v tem primeru 14), dobimo število s petnajstimi delitelji.

Število je $2^{14} = 16\,384$.

2. možnost je ta , da število deliteljev zapišemo s produktom praštevil, 15 = 3 · 5. To pomeni, da množimo faktorja s tremi in petimi delitelji, torej $p_1^2 \cdot p_2^4$. Vstavimo dve najmanjši praštevili za osnovi torej, $2^2 \cdot 3^4 = 4 \cdot 81 = 324$. Preverimo še z zamenjavo osnov, $3^2 \cdot 2^4 = 9 \cdot 16 = 144$.

Ugotovimo, da je število 144 manjše, ker je v drugem faktorju manjša osnova z večjo stopnjo.

D_{144} = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144}

Ugotovimo, da je število 144 najmanjše naravno število s petnajstimi delitelji.

d) Katero je najmanjše naravno število z enaindvajsetimi delitelji?

1. možnost je ta, da zapišemo potenco z najmanjšo praštevilsko osnovo in stopnjo za ena manjšo od števila zahtevanih deliteljev, 2^{20} = 1 048 576.

2. možnost je ta, da zmnožimo faktorja s tremi in sedmimi delitelji, saj je 3 · 7 = 21. Kot smo ugotovili, je število manjše, če je manjše praštevilo osnova večje stopnje. Produkt faktorjev je $p_1^2 \cdot p_2^6$. Iskano število je $3^2 \cdot 2^6 = 9 \cdot 64 = 576$

Najmanjše naravno število z enaindvajsetimi delitelji je število 576.

5. Družbena odgovornost

Raziskovalna naloga nama je omogočila napredek pri matematiki, še posebej pri računanju. Pri računanju sva spretnejša kot najini sošolci prav zaradi pravil, ki smo jih spoznali v tej raziskovalni nalogi. Z raziskovalno nalogo se naučimo sodelovati, postavljati vprašanja, preverjati rezultate in iskati nove poti razmišljanja. Z izdelavo raziskovalne naloge se oblikujejo samostojnost, zanesljivost in kritičnost. Prav tako se naučimo ceniti že zapisana dognanja v virih.

6. Zaključek

Za zaključek zapišimo nekaj pomembnih ugotovitev raziskovalne naloge.

Ugotovili smo, kako izračunamo število deliteljev poljubnega naravnega števila.

Ugotovili smo, da naravna števila lahko razdelimo glede na število njihovih deliteljev.

Opredelili smo lastnosti števil z enakim številom deliteljev.

Vsako naravno število oblike p^n ima $n + 1$ deliteljev. Število p je praštevilo.

Vsako sestavljeno naravno število n lahko zapišemo s produktom $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots p_m^{k_m}$. To število ima $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_m + 1)$ deliteljev.

Ugotovili smo, kako izračunamo naravno število z določenim številom deliteljev. Če želimo število z *r* delitelji in je *r* sestavljeno število

- ima število 2^{r-1} natanko *r* deliteljev.

- razcepimo število *r* na prafaktorje, $r = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots p_m^{k_m}$. Glede na posamezne faktorje z osnovami ki so praštevila raziščemo možnosti za zapis naravnega števila.

Najmanjše naravno število izračunamo s premislekom in primerjavo števil po zgornjem postopku.

Zavedamo se, da je opisani postopek iskanja najmanjšega naravnega števila z znanim številom deliteljev še nepopoln, saj najmanjše število najdemo samo s primerjavo in premislekom. Pri zelo velikih številih je to precej težko. Tako nas dokaz, da je neko izračunano naravno število res najmanjše še čaka. Prav tako bi lahko še raziskali, kako na najhitrejši način določimo največji skupni delitelj dveh ali več poljubnih števil z uporabo spoznanega znanja.

7. Viri

1. Jože Grasselli, O najmanjšem številu s predpisanim številom deliteljev. Presek, letnik 28, 2000/2001, Številka 1, strani 34 – 41.

2. Gazvoda, Frešer, Senekovič, Matematika za radovedneže 7, učbenik za OŠ, ICO d.o.o, 2012.