Mladi za napredek Maribora 2018

35. srečanje

Hanojski stolp

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: FILIP KORES URLEP
Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ
Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2018

Kazalo

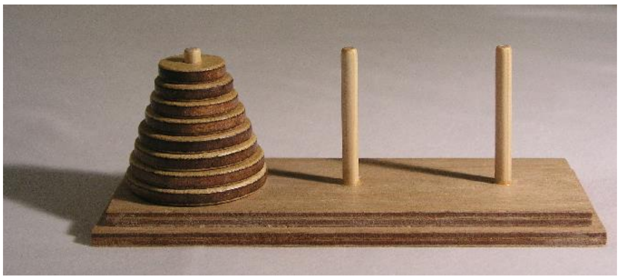
Vsebina

1. Povzetek

V raziskovalni nalogi spoznamo igro Hanojski stolp. Predstavimo pravila igranja igre in najbolj optimalno pot igranja z različnim številom ploščic in število premikov vsake ploščice. Raziščemo, kaj lahko vpliva na spremenjen potek igre, recimo število stolpov. Zapišemo posplošene ugotovitve za poljubno izbrano število ploščic ali stolpov. Z izračunom časa, v katerem končamo igro Hanojski stolp po legendi, ugotovimo da se nam ni potrebno bati konca sveta.

2. Uvod

Pri izbirnem predmetu matematične delavnice nam je učitelj predstavil igro Hanojski stolpi (slika 1). Med predstavitvijo je povedal tudi legendo o tej igri: V nekem indijskem templju obstaja ogromna soba s tremi velikimi stebri. Na stebrih je 64 zlatih ploščic. Plošče so vse različnih velikosti. Vedno je manjša na večji plošči. Menihi-Brahmani v tem templju naj bi premikali te plošče s prvega stebra s pomočjo srednjega na tretji steber dan in noč. Legenda pravi, da ko bodo menihi končali igro in premaknili vse plošče s prvega stebra na tretji steber, bo konec tudi našega sveta.



Slika 1: Hanojski stolp (Wikipedia, 2018)

Igro Hanojski stolpi je izumil Edouard Lucas leta 1883 (Wikipedija, 2018). Za igro potrebujemo 3 enako velike palice in poljubno število ploščic, ki jih lahko premikamo iz ene palice na drugo. Cilj igre namreč je, da vse ploščice premaknemo z ene stranske palice (prve palice) na drugo stransko palico (tretja palica) s pomočjo vmesne palice (druga palica) z najmanjšim možnim številom premikov. Pri premikanju je seveda treba upoštevati nekatera pravila, ki igro še dodatno zakomplicirajo:

- Naenkrat lahko premaknemo samo eno ploščico.
- Naenkrat je možno narediti samo en premik.
- Večja ploščica ne sme biti na manjši.

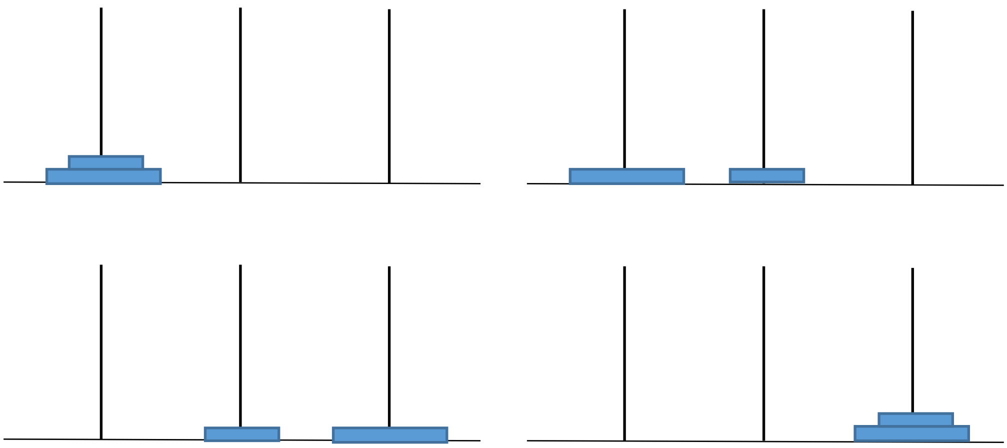
3. Potek igre Hanojski stolpi

Vse ploščice so na začetku na eni od stranskih palic, recimo prvi palici. Te ploščice so razvrščene tako da je čisto na dnu največja, na vrhu pa najmanjša. Nato začnemo premikati ploščice in pri tem upoštevamo vsa pravila. Seveda smo raziskali koliko je najmanjše število premikov pri določenem številu ploščic. Na začetku smo samo šteli število premikov in si podatke zapisovali.

Premik ene ploščice (slika 2). Seveda potrebujemo en premik.

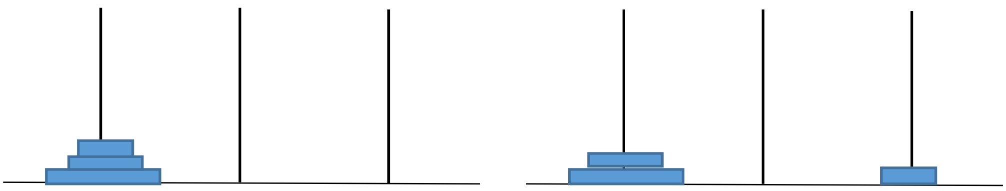
Slika 2: Ena ploščica

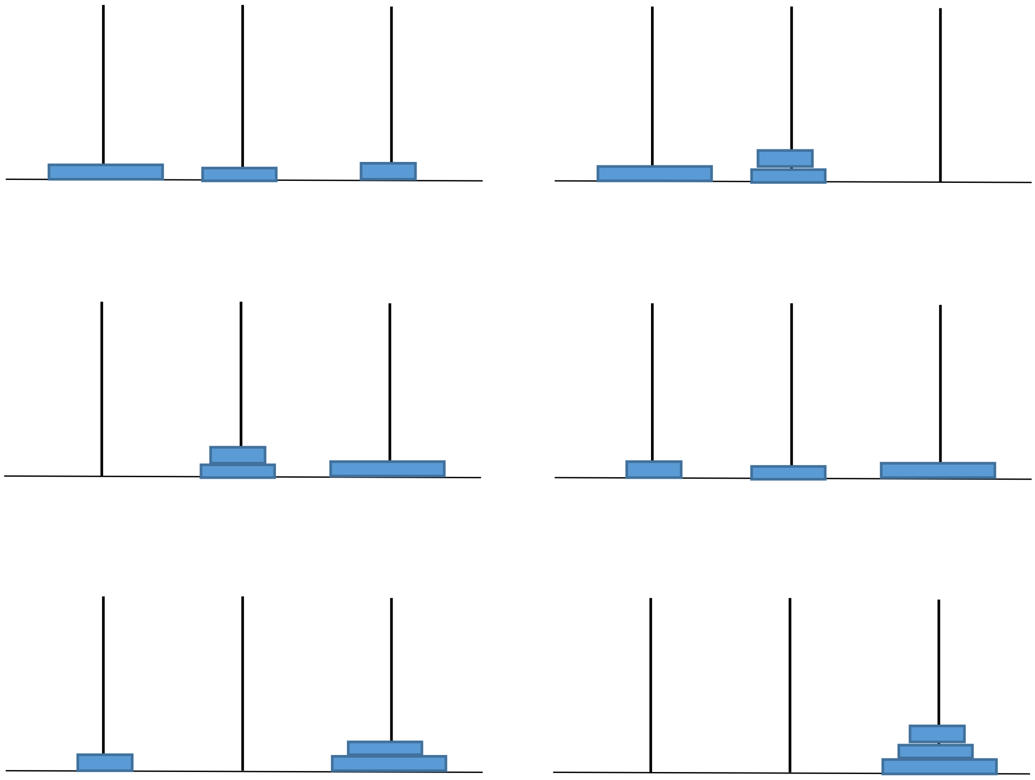
Premik dveh ploščic (slika 3). Potrebujemo tri premike.



Slika 3: Dve ploščici

Prikažimo še s slikami postopek za tri ploščice (slika 4). Potrebujemo sedem premikov.





Slika 4: Tri ploščice

Podatke o številu ploščic in številu premikov zapišemo v preglednico (preglednica 1). Premike smo opravili in prešteli tudi za 4, 5 in 6 ploščic.

ŠTEVILO PLOŠČIC, *n*	ŠTEVILO PREMIKOV, *p*
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

Preglednica 1

Za večje število ploščic je štetje seveda zamudno. Ugotovili pa smo zaporedje izvajanja premikov. Tako da lahko za poljubno število ploščic vedno znova opravljamo premike po enakem postopku. Ker je postopek ponavljajoč predvidevamo, da lahko število premikov izračunamo za poljubno število ploščic. Z opazovanjem zaporedja števila premikov (številsko zaporedje 1, 3, 7, 15, 31, 63) smo opazili, da so števila vedno za ena manjša od vrednosti potence števila dva, katere stopnja je bila enaka številu ploščic, ki smo jih premikali (preglednica 2).

ŠTEVILO PLOŠČIC, *n*	ŠTEVILO PREMIKOV, *p*	POTENCA ŠT. 2 IN NJENA VREDNOST	ŠTEVILO PREMIKOV
1	1	$2^1 = 2$	$2^1 - 1 = 1$
2	3	$2^2 = 4$	$2^2 - 1 = 3$
3	7	$2^3 = 8$	$2^3 - 1 = 7$
4	15	$2^4 = 16$	$2^4 - 1 = 15$
5	31	$2^5 = 32$	$2^5 - 1 = 31$
6	63	$2^6 = 64$	$2^6 - 1 = 63$
7	127	$2^7 = 128$	$2^7 - 1 = 127$
8	255	$2^8 = 256$	$2^8 - 1 = 255$
9	511	$2^9 = 512$	$2^9 - 1 = 511$
10	1023	$2^{10} = 1024$	$2^{10} - 1 = 1023$

Preglednica 2

Torej je formula za najmanjše možno število premikov pri določenem številu ploščic *n* enaka

$$\mathbf{2^n - 1.}$$

Primer.

Za $n = 3$ je $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$.

Za $n = 12$ je $2^{12} - 1 = 4\ 096 - 1 = 4\ 095$.

Seveda lahko sedaj izračunamo, koliko premikov bodo menihi naredili, da bodo igro končali. S tem lahko izračunamo tudi čas (tako, da določimo koliko sekund menihi potrebujejo za en premik) za dokončanje igre.

3.1 »Konec sveta«

Koliko premikov bodo naredili menihi? Koliko časa bodo za celotno igro potrebovali? Kdaj bodo končali in bo po legendi konec sveta? S pomočjo formule za najmanjše možno število premikov ($2^n - 1$) se vse to da izračunati.

Najprej izračunajmo čas, ki ga bodo menihi porabili za premik ploščic. Glede na legendo, da je ploščic 64, bi nekatere od njih morale biti zelo velike (pa še zlate).

Koliko pa sploh je $2^{64} - 1$?
Vrednost potence je ogromna, 2^{64}= 18 446 744 073 709 551 616.
Torej je število premikov sledeče $2^{64} - 1$= 18 446 744 073 709 551 615.

Toliko sekund bi torej menihi premikali plošče, če bi naredili 1 premik na 1 sekundo. Ker pa so plošče velike in težke, računajmo tako, da en premik v povprečju opravijo v 3 sekundah. Postopoma delimo in izračunamo minute, ure, dneve in leta, ki jih bodo menihi porabili za premikanje plošč. Najprej število delimo z 20 (upoštevajmo, da menihi porabijo 3 sekunde za premik ene plošče) in tako dobimo minute.

18 446 744 073 709 551 615 : 20 = 922 337 203 685 477 581 – približno toliko **minut** bodo porabili za premik vseh plošč.

Izračunano število delimo s 60 in dobimo približno število **ur** sestavljanja:
922 337 203 685 477 581 : 60 =15 372 286 728 091 293 ur.

Izračunano število delimo s 24, da dobimo približno število **dni** sestavljanja:
15 372 286 728 091 293 : 24 = 640 511 947 003 804 dni.

Pri računanju števila let, ki jih bodo potrebovali za sestavljanje moramo upoštevati tudi prestopna leta. Najprej zapišemo enačbo, kjer so x vsa leta, $\frac{x}{4}$ so prestopna leta, $\frac{3x}{4}$ so prestopna ali navadna leta. Prestopno leto je namreč vsako četrto leto, zato je četrtina vseh prestopnih.

$\frac{x}{4} \cdot 366 + \frac{3x}{4} \cdot 365 = 640\,511\,947\,003\,804$

$365{,}25 \cdot x = 640\,511\,947\,003\,804$

$x = 640\,511\,947\,003\,804 : 365{,}25$

$x = 1\,753\,626\,138\,272$

Približno 1 753 626 138 272 **let** bodo menihi porabili za igro, če naredijo **1 premik v 3 sekundah.**

Če bi menihi naredili 1 premik na 1 sekundo bi porabili 584 542 046 091 let. Vesolje je staro 13,7 milijard let = 13 700 000 000 let (za primerjavo kakšna časovna doba je to).

Tudi drugi matematiki so že računali koliko časa bi menihi porabili za igro. Na spletni strani Problem Solvig with Algorithms and Data Structures zasledimo, da so izračunali časovno dobo 584 942 417 355 let sestavljanja, če naredijo 1 premik na sekundo (Interactivepython, 2018). Do odstopanja z našimi izračuni pride verjetno zaradi drugačnega načina računanja

3.2 Število premikov posamezne plošče

Sedaj vemo kakšna je formula za najmanjše število premikov vseh ploščic. Kakšna pa je, če želimo ugotoviti število premikov za posamezno ploščo. V preglednici (preglednica 3) so plošče označene s številkami (najmanjša je 1, največja 10).

Legenda: - premiki , št. ploščic(*n*) , številka ploščice(*k*)

Število ploščic	Število vseh premikov	Številka ploščice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3		2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	7		4	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	15		8	4	2	1	0	0	0	0	0	0
5	31		16	8	4	2	1	0	0	0	0	0
6	63		32	16	8	4	2	1	0	0	0	0
7	127		64	32	16	8	4	2	1	0	0	0
8	255		128	64	32	16	8	4	2	1	0	0
9	511		256	128	64	32	16	8	4	2	1	0
10	1023		512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Preglednica 3

Tudi pri številu premikov posamezne ploščice se pojavijo vrednosti potenc z osnovo 2. Tako recimo za tri ploščice (*n* = 3) vidimo, da tretjo ploščico premaknemo 1 krat, drugo 2 krat in prvo 4 krat. Števila 4, 2, 1 so potence števila 2. Skupno število premikov je tako 4 + 2 + 1 = 7. Najmanjšo ploščico (*k* = 1) premaknemo štirikrat, $2^2 = 4$. Srednjo ploščico (*k* = 2) premaknemo dvakrat $2^1 = 2$. Največjo ploščico (*k* = 3) premaknemo enkrat, $2^0 = 1$. Podobno opazimo za poljubno izbrano število plošč. Formula za število premikov posamezne ploščice pa je $\boldsymbol{\frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k}}$

V teh primerih je kot spremenljivka *n* obravnavano število vseh ploščic, spremenljivka *k* pa kot številka posamezne ploščice. Poglejmo nekaj primerov.

Za $n = 5$, $k = 3$

$\frac{2^5}{2^3} = 32 : 8 = 4 = 2^2$ ………….. Štirje premiki ploščice številka 3 pri petih skupnih ploščicah.

Za $n = 7$, $k = 2$

$\frac{2^7}{2^2} = 128 : 4 = 32 = 2^5$ ………..32 premikov ploščice številka 2 pri sedmih skupnih ploščicah.

Za $n = 10$, $k = 1$

$\frac{2^{10}}{2^1} = 1024 : 2 = 512 = 2^9$ ………..512 premikov ploščice 1 pri desetih skupnih ploščicah.

4. Hanojski stolpi z več kot tremi palicami

Do sedaj smo pri igri spreminjali samo število ploščic. Kaj pa če bi spremenili število palic? Lahko bi dodali kakšno palico, saj je odvzeti ne moremo, ker igre potem ne bi mogli več igrati, ne da bi kršili pravila.

Dodajmo najprej eno palico in ugotovimo, koliko je najmanj možnih premikov na štirih palicah ($m = 4$) (preglednica 4).

Število ploščic	Število premikov	Število posameznih premikov
1	1	1
2	3	1 + 2
3	5	1 + 2 + 2
4	9	1 + 2 + 2 + 4
5	13	1 + 2 + 2 + 4 + 4
6	21	1 + 2·2 + 2·4 + 8
7	29	1 + 2·2 + 2·4 + 2·8
8	45	1 + 2·2 + 2·4 + 2·8 + 16
9	61	1 + 2·2+ 2·4+ 2·8 + 2·16
10	93	1 + 2·2 + 2·4 + 2·8 + 2·16 + 32

Preglednica 4

Opazimo, da je število premikov manjše glede na število premikov pri treh palicah, saj je seveda z eno palico več tudi več prostora za začasen odmik posamezne ploščice. Z izjemo števila premikov ene in dveh ploščic, kjer sta rezultata enaka kot pri treh palicah.

V preglednici možnosti (preglednica 4) vidimo da se z večanjem števila ploščic po enakem postopku spreminja število premikov. Pri vsakem sodem številu ploščic je zadnje število premikov v vsoti enako $2^{\frac{n}{2}}$. Recimo za *n* = 4 je zadnji člen vsote $2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$. Za *n* = 10 je $2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$. Vsaka vsota se začne s številom 1 ($1 = 2^0$), ostali predhodni členi so dvakratniki potence števila 2.

Število premikov za 12 ploščic (*n* = 12) na 4 palicah zapišimo z vsoto, ki ima za zadnji člen $2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$. Število premikov je

$$1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 32 + 64 = 115.$$

Število premikov za 13 ploščic (*n* = 13) na 4 palicah zapišimo z vsoto je

$$1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 32 + 2 \cdot 64 = 179.$$

Če dodamo še eno palico zraven in jih imamo tako sedaj 5 (preglednica 5), bo spet število premikov ploščic manjše kot pri 4 palicah, saj je spet za eno palico več prostora za odmik posamezne ploščice.

Število ploščic	Števil premikov	Število posameznih premikov
1	1	1
2	3	1 + 2
3	5	1 + 2 + 2
4	7	1 + 2 + 2 + 2
5	11	1 + 2 + 2 + 2 + 4
6	15	$1 + 3 \cdot 2 + 4 + 4$
7	19	$1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4$
8	27	$1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8$
9	35	$1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8 + 8$
10	43	$1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8$

Preglednica 5

V preglednici možnosti (preglednica 5) vidimo, da se z večanjem števila ploščic po enakem postopku spreminja število premikov. Pri $n = 5$ je zadnji člen $2^2 = 4$. Pri $n = 8$ je zadnji člen $2^3 = 8$.

Pri $n = 11$ je zadnji člen $2^4 = 16$. Vsi predhodni členi so trikratniki potence števila 2. Prvi člen je število 1.

Za $n = 11$ bi zapisali vsoto vseh premikov $1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 16 = 59$.

Za $n = 12$ zapišemo vsoto vseh premikov $1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 16 = 75$.

Za $n = 13$ zapišemo vsoto vseh premikov $1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 16 = 91$.

Za $n = 14$ zapišemo vsoto vseh premikov $1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 16 + 32 = 124$.

Predvidevamo da bi za šest palic zapisali naslednje število premikov (preglednica 6).

Število ploščic	Števil premikov	Število posameznih premikov
1	1	1
2	3	1 + 2
3	5	1 + 2 + 2
4	7	1 + 2 + 2 + 2
5	9	1 + 2 + 2 + 2 + 2
6	13	1 + 4·2 + 4
7	17	1 + 4·2 + 4 + 4
8	21	1 + 4·2 + 4 + 4 + 4
9	25	1 + 4·2 + 4·4
10	33	1 + 4·2 + 4·4 + 8

Preglednica 6

V vsoti so za prvim členom (število 1) vedno največ štiri enaki členi (potence števila 2). S primerjanjem podatkov v preglednicah 4, 5 in 6 ugotovimo, da je število ponavljajočih potenc števila 2 v vsoti največ $m - 2$, kjer je m število palic. Tako pri štirih palicah ($m = 4$) vedno nastopata po največ dva enaka člena. Pri petih palicah ($m = 5$) so največ trije enaki členi, pri šestih palicah ($m = 6$) so največ štirje enaki členi.

V preglednici 6 prav tako ugotovimo, da je število premikov do vključno štirih ploščic enako kot za pet palic (preglednica 5). Ampak je tudi za 3 ploščice število premikov enako kot pri petih, štirih in treh palicah. Iz tega lahko sklepamo, da se bo stvar ponavljala. Za sedem palic ($m = 7$) bo število premikov pri $n = 5$ enako številu premikov kot za 6 palic (devet premikov). Če se to nadaljuje lahko izvemo, koliko je najmanjše možno število premikov nekega števila ploščic sploh. Tudi če spreminjamo število palic. Kako pa pridemo do tega števila?

Število ploščic je n. Če bi začeli pri eni palici, bi po zgoraj opisanem postopku to število dobili, ko bi bili število ploščic in število palic enaki. Ampak se vse skupaj začne na treh palicah, saj se igra ne more igrati na eni ali dveh palicah. Zato prištejemo številu ploščic 2 in dobimo število palic, na katerih bo možno z najmanj možnimi premiki končati igro z določenim številom ploščic. Najmanjša števila premikov za določeno stopnjo (do 10) pa so prvih 10 lihih naravnih števil (preglednica 7).

Število ploščic	Število palic	Najmanjše možno število premikov sploh
1	3 (1+2)	1
2	4 (2+2)	3
3	5 (3+2)	5
4	6 (4+2)	7
5	7 (5+2)	9
6	8 (6+2)	11
7	9 (7+2)	13
8	10 (8 +2)	15
9	11 (9+2)	17
10	12 (10+2)	19

Preglednica 7

Poglejmo, kako ugotovimo koliko premikov za 12 ploščic (n = 12) opravimo pri 7 palicah (m = 7). Iz preglednice 7 ugotovimo, da je za sedem palic in 5 ploščic najmanjše število premikov 9. Zapišemo 9 = 1 + 2 + 2 + 2 + 2. To vsoto bomo dopolnjevali s členi vsote. Ker je v igri 7 palic, bo največje število posameznih členov (dvojiških potenc) pet. Zapišimo v preglednico (preglednica 8).

Število ploščic, *n*	Števil premikov, *p*	Število posameznih premikov
5	9	1 + 2 + 2 + 2 + 2
6	11	1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2
7	15	1 + 5·2 + 4
8	19	1 + 5·2 + 4 + 4
9	23	1 + 5·2 + 4 + 4 + 4
10	27	1 + 5·2 + 4 + 4 + 4 + 4
11	31	1 + 5·2 + 5·4
12	39	1 + 5·2 + 5·4 + 8

Preglednica 8

Zapišimo še posplošeno ugotovitev.

Za poljubno število ploščic *n* je najmanjše število palic $m = n + 2$. Za to število palic je potrebno najmanj $n + (n - 1) = 2n - 1$ premikov.

Vsaka vsota števila premikov se začne s členom 1 in nadaljuje z ustreznim številom dvojiških potenc, najprej s stopnjo 1, nato s stopnjo 2 … . Največje število enakih dvojiških potenc je $m - 2$. Ko ugotovimo najmanjše število premikov za izbrano število ploščic in s tem palic, številski izraz dopolnjujemo do končne vsote. Poglejmo primera.

Primer 1

Za *n* = 8, za *m* = 8.

Pri osmih palicah je najmanjše število ploščic 6 in s tem 11 premikov (preglednica 7), 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11.

Za sedem ploščic (*n* = 7) zapišemo $1 + (8 - 2) \cdot 2 = 1 + 6 \cdot 2 = 13$.

Za osem ploščic (*n* = 8) zapišemo $1 + 6 \cdot 2 + 4 = 17$.

Tako je za osem ploščic na osmih palicah najmanjše možno število premikov 17.

Primer 2

Za n = 14 in za m = 9.

Pri devetih palicah je najmanjše možno število premikov 13 za sedem ploščic.

Zapišemo vsoto 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 13.

Za osem ploščic je tako $1 + (9 - 2) \cdot 2 = 15$ premikov.

Za devet ploščic je $1 + 7 \cdot 2 + 4 = 19$ premikov.

Za deset ploščic je $1 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 23$ premikov.

Za enajst ploščic je $1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 27$ premikov.

Za dvanajst ploščic je $1 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 31$ premikov.

Za trinajst ploščic je $1 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 35$ premikov.

Za štirinajst ploščic (n = 14) je tako $1 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 39$ premikov.

V pregledanih virih najdemo prav tako preglednico za nekaj izbranih možnosti števila ploščic (n) in palic (k) (preglednica 9).

n/k	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1
2	3	3	3	3
3	7	5	5	5
4	15	9	7	7
5	31	13	11	9
6	63	21	15	13
7	127	29	19	17
8	255	45	27	21

Preglednica 9

Ko primerjamo podatke dobljene z našimi razmisleki v raziskovalni nalogi in podatke v preglednici ugotovimo, da je naš razmislek ustrezen, saj so podatki enaki.

5. Zaključek

Navedimo nekaj najpomembnejših ugotovitev raziskovalne naloge:

- Formula za najmanjše število premikov *n* ploščic na treh palicah je $2^n - 1$.
- Formula za število premikov posamezne ploščice je $\frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k}$, kjer je *n* število ploščic, *k* je številka opazovane ploščice.
- Število palic za najmanjše možno število premikov za posamezno število ploščic sploh izračunamo tako, da številu ploščic prištejemo 2 in dobimo število potrebnih palic.
- Najmanjše število premikov sploh je za prvih 10 naravnih števil prvih 10 lihih naravnih števil (preglednica 7, stran 12).
- Pri več palicah (*m* > 3) v preglednici (preglednica 7) poiščemo najmanjše število premikov za izbrano število palic in s tem ploščic (*m* = *n* + 2). Za večje število ploščic zapisujemo vsoto členov $1 + 2 + 2 \cdot 2 + \cdots + (m-2) \cdot 2 + 4 + 2 \cdot 4 + \cdots + (m-2) \cdot 4 + \cdots$. Členov vsote je toliko, kot je število ploščic.

6. Družbena odgovornost

Z raziskovalno nalogo predstavimo okolju morda bolj neznano igro, čeprav je v slovenskem prostoru morda znana pod katerim drugim imenom. Z raziskovalno nalogo želimo pokazati, da lahko tudi osnovnošolci raziščemo matematična ozadja družabnih iger. Tako po eni strani z igranjem igre s sošolci ali drugimi razvijamo bolj pristne medsebojne odnose, po drugi stani pa razvijamo raziskovalne pristope k matematičnim problemom. Z izdelavo raziskovalne nalogo se naučimo upoštevati in navajati vire, prepoznavati in spoštovati intelektualno lastnino in ceniti dosežke, ki jih povzemamo, navajamo ali uporabljamo.

7. Viri

1. Interactivepython. (20. januar 2018). *Poblem Solving with Alghorithms and Data Structures*. Pridobljeno iz Tower of Hanoi: http://interactivepython.org/runestone/static/pythonds/Recursion/TowerofHanoi.html
2. Wikipedia. (20. januar 2018). *Tower of Hanoi*. Pridobljeno iz A model set of the Tower of Hanoi (with 8 disks): https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi
3. Wikipedija. (20. januar 2018). *Hanojski stolpi*. Pridobljeno iz Izvor igre: https://sl.wikipedia.org/wiki/Hanojski_stolpi
4. Ciril Pezdir, Posplošeni Hanojski stolp. Presek, letnik 22 (1994/95). Številka 1, strani 10 – 16.