Mladi za napredek Maribora 2018

35. srečanje

Domine, triomine …

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: NUŠA LEŠNIK, KATARINA KOLAR
Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ
Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2018

Kazalo

1. Povzetek

Najbrž poznate igro domine. Ploščica ima dve polji, na vsakem polju je neko število, prikazano s pikami. Igro igramo po pravilih. Kratkočasimo se lahko tudi z igro triomine. Gre za trikotnike, ki imajo ob vsakem oglišču zapisano število. Trikotnike polagamo drugega ob drugem po določenem pravilu.

V raziskovalni nalogi predstavimo pravila obeh iger. Spoznamo, kako so števila posamezne igre razporejena na igralne ploščice. Ali bi lahko igro igrali z več ali manj ploščicami? Predstavimo tudi načine razporejanja elementov na različno število mest. V nadaljevanju predstavimo igro 4-omine in premislimo ali bi lahko igrali igro *n*-omine.

2. Uvod

Igri domine ali triomine sta igri s ploščicami, na katerih so zapisana števila. Vse ploščice se med seboj razlikujejo glede na zapisana števila na ploščicah. Za samo sestavo posamezne igre torej razporejamo števila na ploščice. Z razporejanjem števil se ukvarja posebna veja matematike, kombinatorika. Sam pojem nas usmeri v razmislek, da kombiniramo zapise števil. V nadaljevanju si bomo najprej ogledali osnovne pojme, ki jih uporabljamo pri razporejanju števil in s tem načine razporejanja. Razporejanje števil bomo spoznali na konkretnih primerih obeh iger in nato premislili, kako morda oblikovati novo igro.

3. Razporejanje

Razporejanju števk (simbolov, števil…) z drugim imenom rečemo tudi kombinatorika. Kombinatorika je veja matematike, ki se ukvarja s preštevanjem in razporeditvijo elementov dane končne množice. Z njo se srečujemo v vsakdanjem življenju. Primer kombinatorike je npr. Rubikova kocka, pri kateri vedno v 20 potezah dosežemo cilj-sestavljeno kocko. Poznamo pravilo vsote in pravilo produkta.

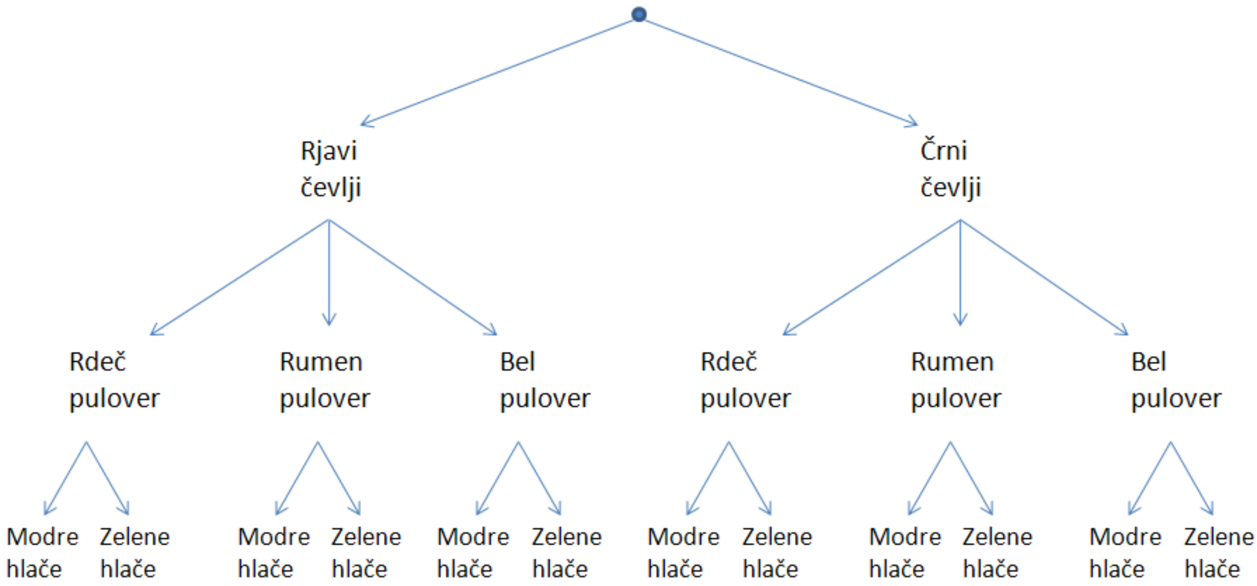
Pravilo vsote

Če imamo na voljo m možnosti iz prve skupine in n možnosti iz druge skupine, izbrati pa želimo točno <u>eno možnost iz prve **ali** iz druge skupine</u>, potem imamo na izbiro skupno $m + n$ možnosti.

Poglejmo primer. V treh restavracijah imamo na voljo različne menije. V prvi restavraciji imamo 4 menije, v drugi 5 in v tretji prav tako 5. Zanima nas koliko je vseh menijev oz. možnosti. To dobimo tako, da vse menije/možnosti med seboj seštejemo, kar pomeni da imamo na voljo 14 menijev.

Pravilo produkta ali osnovni izrek kombinatorike

Če imamo na voljo m možnosti iz prve skupine in n možnosti iz druge skupine, izbrati pa želimo <u>eno možnost iz prve **in** hkrati eno iz druge skupine</u>, potem imamo na izbiro skupno $m \cdot n$ možnosti. To lahko ponazorimo s kombinatoričnim drevesom (slika 1). Želimo se obleči. Na voljo imamo dva para različnih čevljev, tri barvno različne puloverje in dvoje barvno različnih hlač. Na koliko načinov se lahko oblečemo?



Slika 1: Primer kombinatoričnega drevesa

Oblečemo se lahko na 2 · 3 · 2 = 12 različnih načinov.

3.1 Permutacije

Permutacije so način razporejanja vseh števk (elementov) po nekem vrstnem redu. Pri permutacijah imamo toliko mest kot je elementov za razporejanje na ta mesta. Permutacije delimo na permutacije brez ponavljanja in na permutacije s ponavljanjem. Permutacije označimo z veliko črko **P**.

PERMUTACIJE BREZ PONAVLJANJA

Ponazorimo jih s primerom, ko imamo 5 oseb, ki jih želimo posesti na vse možne načine na 5 stolov. Na prvi stol lahko sede katerakoli oseba, zato obstaja 5 različnih možnosti. Ko ena oseba zasede prvi stol, ostanejo še štiri osebe, ki lahko zasedejo naslednji stol. Ko naslednja oseba zasede drugi stol, ostanejo tri osebe in 3 stoli, torej 3 možnosti kako se lahko posedejo na tretji stol. Razmislek nadaljujemo do zadnje osebe in zadnjega stola. Če število možnosti med seboj zmnožimo, zapišemo:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Če število elementov (v tem primeru oseb) označimo z ***n***, lahko zapišemo:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Da poenostavimo daljše zapise uvedemo zapis $n!$, ki ga preberemo kot n-fakulteta oz. n-faktorsko. Torej $5!$ pomeni:

$$\mathrm{P}_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \, .$$

Poglejmo še en primer. Koliko različnih trimestnih števil lahko zapišemo s števkami 1, 2, 3. Imamo tri elemente (1, 2, 3) ki jih želimo razvrstiti na vse možne načine na tri mesta. Če sledimo zgornjemu obrazcu, zapišemo tako:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Če pa vse možnosti zapišemo, bi te bile:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM

Pri razporejanju elementov se lahko elementi tudi ponovijo. Poglejmo primer razporejanja črk A, N, S na 6 mest. Ena možna razporeditev je seveda **ANANAS**. Prva zamisel bi morda bila, da izračunamo 6!, ampak je možnosti zaradi ponavljanja črk bistveno manj. Zaradi tega 6! delimo s številom ponavljajočih črk (A=3, N=2), torej s 3! · 2!. Število vseh možnosti je tako:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{2} = 60$$

Ponavljajoče elemente zapišemo kot $k_1, k_2, \ldots k_r$

$$P_n^{k1,k2,\ldots kr} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

Torej če pravilno zapišemo zgoraj navedeni primer dobimo:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!}$$

Poglejmo primer razporejanja števk 1 in 2 na štiri mesta. Pri tem se števki dvakrat ponovita. Zapišemo $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$. Pomeni šest različnih števil, to so:

1122, 1212, 1221, 2211, 2121, 2112.

3.2 Variacije

Variacije so način razporejanja **nekaj** števk (elementov) po nekem vrstnem redu. Elementov je več, kot je mest razporejanja. Variacije delimo na variacije brez ponavljanja in na variacije s ponavljanjem. Označimo jih z veliko črko **V**.

VARIACIJE BREZ PONAVLJANJA

Ponazorimo jih s primerom, ko imamo 5 oseb (elementov) in tri stole (mesta razvrščanja) na katere jih posedemo. Mesta razvrščanja imenujemo tudi redovi (**r**). Na prvi stol se lahko usede katerakoli oseba, zato je 5 možnosti, na drugega 4 in na tretjega 3. Možnosti med seboj zmnožimo. Zato je posplošen zapis računanja

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Variacije so torej razvrščanje *n* elementov na *r* mest (red *r*), $r < n$. Zapišimo zgornji primer,

$$V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Poglejmo še primer razporejanja števk 1, 2, 3 na dve mesti. Na prvo mesto lahko zapišemo števko 1, 2 ali 3. Na drugo mesto samo še dve števki. To je skupaj 2 · 3 = 6 možnosti. Možna števila so:

12, 21, 13, 31, 23, 32.

VARIACIJE S PONAVLJANJEM

O variacijah s ponavljanjem govorimo takrat, ko se elementi lahko na posameznih mestih tudi ponovijo. Poglejmo preprost primer treh števk, 1, 2 in 3, ki jih razporedimo na dve mesti. Zapišemo lahko števila: 11, 12, 13, 22, 21, 23, 33, 31, 32.

Dobimo 9 možnosti, kar je 3^2.

Pri razporejanju štirih črk, recimo A, B, C in D na dve mesti zapišemo naslednje »besede«:
AA, AB, AC, AD, BB, BA, BC,BD, CC, CA, CD, DD, DA, DB, DC.

$V_4^2 = 4^2 = 16.$

Število elementov potenciramo s številom mest (redov).

$$V_n^r = n^r$$

3.3 Kombinacije

Kombinacije so razvrščanje elementov. Vsak element je na vsakem mestu le enkrat. Zato je možnosti dosti manj kot pri variacijah. Kombinacije označimo z veliko črko **C**. Ponazorim jih z enakim primerom kot variacije brez ponavljanja. Imamo 5 oseb, ki jih razvrščamo na tri stole.

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

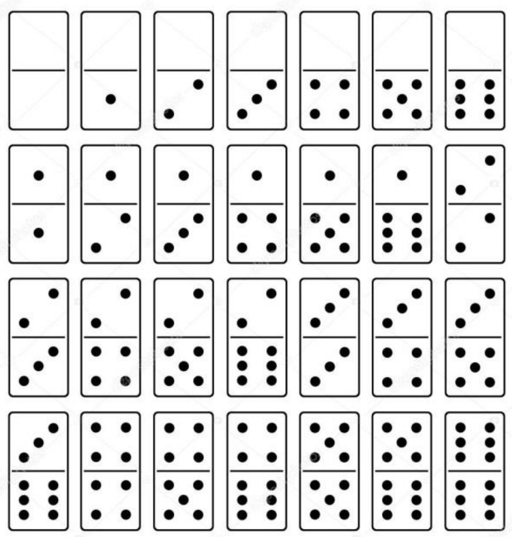
Torej je obrazec za kombinacije pravzaprav popolnoma enak obrazcu za variacije brez ponavljanja, le da v imenovalcu (*n* – *r*)! pomnožimo z *r*!.

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

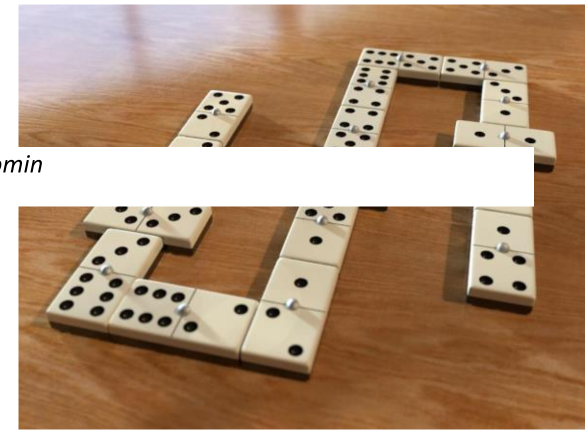
<u>Vsaka oseba se lahko na enem stolu pojavi samo enkrat.</u> Poglejmo še primer števila kombinacij za števke 1, 2, 3 z razporejanjem na dve mesti. Zapišemo $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 3.$ Možna števila so tako 13, 21 in 32. Števka 1 se pojavi na vsakem mestu natanko enkrat, števka 2 se pojavi na vsakem mestu natanko enkrat, števka 3 se pojavi na vsakem mestu natanko enkrat.

4. Domine

Domine so družabna igra, pri kateri uporabljamo pravokotne ploščice (domine), ki so razdeljene na dve polji. Na vsakem polju je od 0 do 6 pik. Vsak igralec dobi enako število domin. Domine položimo na mizo tako, da so s hrbtno stranjo obrnjene navzgor. Eden izmed igralcev premeša domine. Nato poljubno obrne eno izmed domin. S to domino se igra prične. Nato igralec levo od igralca, ki je obrnil prvo domino, prične z igro. Iz preostalih domin izvleče eno. Domino lahko priloži le, če ima ta isto število pik. Če domina nima istega števila pik, obrača domine toliko časa, dokler ne izvleče takšne z istim številom. Domine, ki je izvlekel in niso imele istega števila pik, položi igralec pred sebe tako, da so obrnjene s hrbtno stranjo proti soigralcem, ali jih drži v roki. Nato z igro nadaljuje naslednji igralec. Če tekmovalci nimajo več domin z istim številom pik, ki bi jo lahko priložili iz vrste, ki so jo sestavili, odstranijo toliko domin, da lahko priložijo eno izmed svojih domin. Igro se igra, dokler ne zmanjka vseh domin. Zmaga tisti, ki prvi priloži vse svoje domine.



Slika 2: Komplet domin



Slika 3: Prikaz igre domino

Vse možnosti igralnih ploščic lahko zapišemo v tabeli (preglednica 1):

0-0	1-0				2-0	3-0	4-0	5-0	6-0
0-1	1-1				2-1	3-1	4-1	5-1	6-1
0-2	1-2				2-2	3-2	4-2	5-2	6-2
0-3	1-3				2-3	3-3	4-3	5-3	6-3
0-4	1-4				2-4	3-4	4-4	5-4	6-4
0-5	1-5				2-5	3-5	4-5	5-5	6-5
0-6	1-6	2-6	3-6	4-6	5-6	6-6			

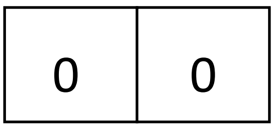
Preglednica 1: Zapis možnosti

Na eno polje lahko zapišemo števila od 0 do 6 in prav tako na drugo. Na dve polji razvrščamo sedem števil. Gre za variacije s ponavljanjem, $V_2^7 = 7^2 = 49$. Ker se nekatere možnosti ponovijo (osenčena polja v tabeli), v sami igri pa takih ploščic ni, to število možnosti (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) odštejemo od števila vseh možnosti. Zapišemo

$7 \cdot 7 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 49 - 21 = 28.$ Torej je v igri 28 ploščic.

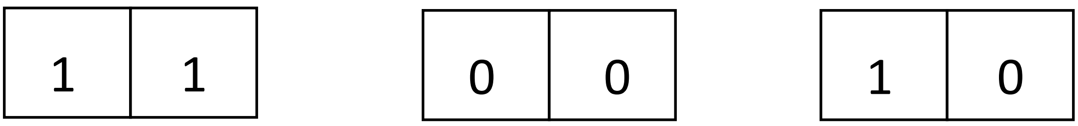
Poglejmo katere možnosti domin dobimo, če pripravimo drugačne igralne ploščice.

- Za eno število, recimo 0, dobimo eno domino. Eno število razporedimo na dve mesti.



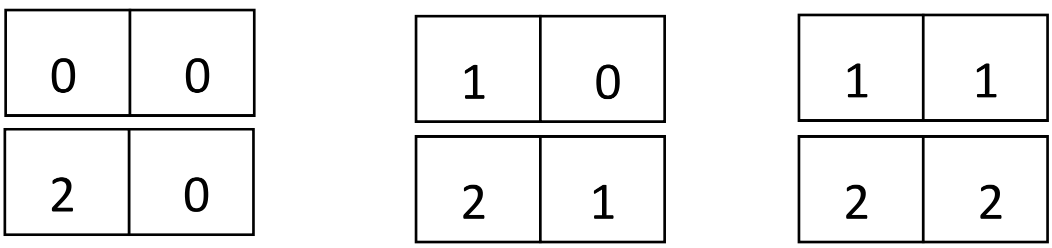
Slika 4: domina

- Za dve števili, recimo 0 in 1, dobimo tri domine. Dve števili razporedimo na dve mesti.



Slika 5: razporeditev dveh števil na domine

- Za tri števila, recimo 0, 1 in 2, dobimo 6 domin. Tri števila razporedimo na dve mesti.



Slika 6: razporeditev treh števil na domine

- Za pet števil, recimo 0, 1, 2 , 3 in 4, dobimo 15 domin. To pa lahko ponazorimo tudi s številskim izrazom:

$$\mathbf{5 \cdot 5 - (1 + 2 + 3 + 4) = 25 - 10 = 15.}$$

- Za šest števil, recimo 0, 1, 2 , 3, 4 in 5 dobimo 21 domin. To pa lahko ponazorimo tudi s številskim izrazom:

$$\mathbf{6 \cdot 6 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 36 - 15 = 21.}$$

- Za deset števil, recimo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9, dobimo 55 domin.
  Številski izraz:

$$\mathbf{10 \cdot 10 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 100 - 45 = 55.}$$

- Za ***n*** števil lahko izračunamo število domin na naslednji način:

$$\boldsymbol{n \cdot n - \big(1 + 2 + 3 + \cdots (n - 1)\big) = n^2 - \frac{(n-1) \cdot n}{2} = n^2 - \frac{n^2 - n}{2} = n^2 - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}}$$

Vse možnosti dobimo tako, da pomnožimo $n \cdot n = n^2$. Nato od tega odštejemo vsoto zaporednih naravnih števil: $\boldsymbol{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$**.** Potem ko izraz poenostavimo**,** dobimo $\boldsymbol{\frac{n^2+n}{2}}$**.**

Od variacij s ponavljanjem (7^2) odštejemo vse možnosti, ki so se ponovile (npr., če imamo 1-0 in 0-1, eno možnost odštejemo) in tako dobimo 28 domin. Pri tem 21 domin izmed 28 ustreza kombinacijam saj je $C_7^2 = \frac{7!}{(7-2!) \cdot 2!} = 21$. Sedem domin pa je takih, ki imajo na obeh mestih enake števke (1-1, 2-2, 3-3 ...). Če pogledamo na 28 domin kot na celoto, ne ustrezajo ne kombinacijam, ne variacijam, temveč so svojevrsten način razporejanje števil na dve mesti. Za poljubno število *n* lahko izračunamo število vseh domin tudi tako:

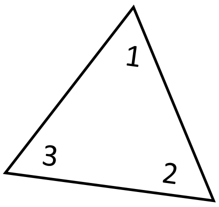
$$C_n^2 + n = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + n.$$

5. Triomine

Triomine so družabna igra, pri kateri uporabljamo trikotne ploščice (slika 7). Na ploščici so tri mesta (oglišča), na katerih so lahko števila od 0 do 5. Igra poteka podobno kot pri klasičnih dominah, le da je potrebno ujemanje dveh parov števil. Zaradi oblike ploščic pride tudi do veliko bolj razgibanih vzorcev, ko so triomine postavljene.

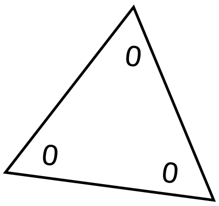
Slika 7: Igra triomine

Zanima nas koliko igralnih ploščic je v tej igri. V primeru da so na ploščici tri različna števila, pri izbiri najmanjšega v nasprotni smeri gibanja kazalcev na uri (negativna orientacija) števila naraščajo (Slika 5).



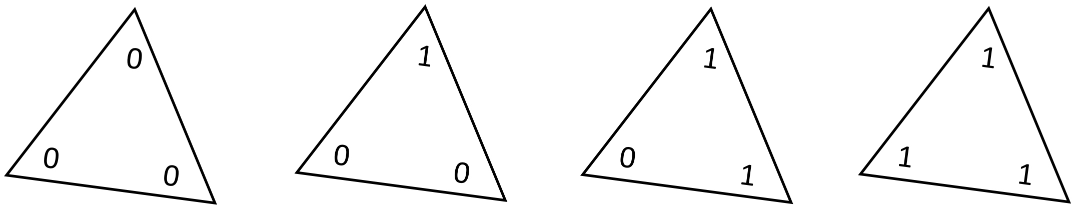
Slika 8: Orientacija triomine

Za eno število, recimo 0, dobimo en triomino (slika 9). Eno število razporedimo na tri mesta.



Slika 9: Triomina

Za dve števili, recimo 1 in 0, dobimo štiri triomine. Dve števili razporedimo na tri mesta.



Slika 10: Triomine

Vse možnosti bi bile:

000	001	011	111
	010	101	
	100	110	

Preglednica 2

Možnosti zapisane na osenčenih mestih so ponavljajoče, v igri enakovredne prvi zapisani možnosti v stolpcu. Vseh možnosti je tako

$$2^3 - 4 = 4.$$

Za tri števila zapišimo najprej vse možnosti razporeditve:

000	001	002	011	022	112	122	012	111	222
	010	020	101	202	121	212	021		
	100	200	110	220	211	221	102		
							120		
							201		
							210		

Preglednica 3

S tremi števili bi v igri imeli 10 različnih ploščic. Vseh možnosti je 3^3 = 27. Možnosti na sivo označenih poljih izločimo, ker so že upoštevane v zapisu v prvi vrstici preglednice. Skupaj je torej $3^3 - 17 = 10$ možnosti. Zapišimo še v preglednici (preglednica 4).

000	111	222
001	112	
002	122	
011		
022		
012		

Preglednica 4

Vseh igralnih ploščic je $3 + 2 \cdot 2 + 3 = 10$.

S štirimi števili (0, 1, 2, 3) zapišemo naslednje možnosti:

000	001	002	003	011	012	013	022	023	033	112	113	122	133	123	221	223	111	222	333
	010	020	030	101	021	031	202	032	303	121	131	212	313	132	212	232			
	100	200	300	110	102	103	220	203	330	211	331	221	331	213	122	322			
					201	301		302						231					
					120	130		230						321					
					210	310		320						312					

Preglednica 5

S štirimi števili bi v igri imeli 20 različnih ploščic. Vseh možnosti je $4^3 = 64$. Možnosti na sivo označenih poljih izločimo, ker so že upoštevane v zapisu v prvi vrstici preglednice. Skupaj je torej $4^3 - 44 = 20$ možnosti. Zapišimo še v preglednici.

000	111	222	333
001	112	223	
002	113	233	
003	122		
011	133		
022	123		
033			
012			
013			
023			

Preglednica 6

Vseh igralnih ploščic je: $4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 = 20$.

Poglejmo igro, v kateri izberemo pet števil. V preglednici so zapisane možnosti na ploščicah.

000	111	222	333	444
001	112	223	334	
002	113	224	344	
003	114	233		
004	122	234		
011	123	244		
012	124			
013	133			
014	134			
022	144			
023				
024				
033				
034				
044				

Preglednica 7

S petimi števili bi v igri imeli 35 različnih ploščic. Vseh možnosti je $5^3 = 125$. Ponavljajočih možnosti je 90, zato vse možnosti izračunamo z razliko $5^3 - 90 = 35$.

Zapišemo lahko vsoto $1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 35$.

Zapišimo možnosti še za šest števil.

Vse možnosti, ki so na posameznem trikotniku z uporabo števil 0, 1, 2, 3, 4, 5 zapišemo v naslednji preglednici:

000	111	222	333	444	555
001	112	223	334	445	
002	113	224	335	455	
003	114	225	344		
004	115	233	345		
005	122	234	355		
011	123	235			
022	124	244			
033	125	245			
044	133	255			
055	134				
012	135				
013	144				
014	145				
015	155				
023					
024					
025					
034					
035					
045					

Preglednica 8

Iz zapisa vidimo da lahko skupno število ploščic izračunamo z vsoto

$1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 6 + 10 + 12 + 12 + 10 + 6 = 56.$

Igramo s 56 ploščicami.

Pri razporejanju šestih števil bi bilo natanko 216 možnosti, zaradi ponavljanja jih odštejemo 160 ($6^3 - 160 = 56$).

Glede na obravnavane primere premislimo, koliko ploščic bi imeli v igri za *n* uporabljenih števil (0, 1, 2 … (*n*-1)).

Vseh možnosti je n^3 (to je število vseh variacij s ponavljanjem, od katerega moramo potem odšteti ponavljajoče trojice števil, da dobimo končno število triomin).

Število triomin (*x*) pa lahko izračunamo tako:

$1 \cdot (n-0) + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + 4 \cdot (n-3) + \cdots + (n-3) \cdot 4 + (n-2) \cdot 3 + (n-1) \cdot 2 + (n-0) \cdot 1 = x$

Poenostavljeno zapisano

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-2) \cdot 3 + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 = x.$$

Izračun vedno začnemo z izbranim številom števil (*n*). Naslednji člen je produkt dvakratnika (*n* – 1), nato trikratnika števila (*n* – 2) … .Postopek ponavljamo. Opazimo lahko simetrijo v zapisanih členih.

Če je izbrano število *n* sodo dobimo v drugi polovici vsote simetrične člene. Vsota je tako $2 \cdot n + 4 \cdot (n-1) + 6 \cdot (n-2) + \cdots + 2 \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$.

Zapišimo primer za *n* = 6, $2 \cdot 6 + 4 \cdot (6-1) + 2 \cdot \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{6}{2}+1\right) = 12 + 20 + 24 = 56.$

Če je izbrano število *n* liho, pa postopek ponavljamo do $\frac{n+1}{2}$, nato pa nadaljujemo enako kot pri sodih številih. Posplošen zapis je

$2 \cdot n + 4 \cdot (n-1) + 6 \cdot (n-2) + \cdots + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}.$

Zapišimo primer za *n* = 5, $2 \cdot 5 + 4 \cdot (5-1) + \frac{6}{2} \cdot \frac{6}{2} = 10 + 16 + 9 = 35.$

6. Štiriomine (kvadromine)

4-omine (ali kvadromine, kot smo jih mi poimenovali) so lahko družabna igra, pri kateri uporabljamo kvadratne ploščice. Na ploščici so štiri mesta (oglišča), na katerih so lahko števila. Igra poteka podobno kot pri klasičnih dominah ali triominah. Potrebno je ujemanje dveh parov števil.

Če na kvadromino razvrščamo le eno števko, dobimo eno kvadromino (slika 11).

0	0
0	0

Slika 11: kvadromina

Če na 4-omino razvrščamo dve števki, recimo 0 in 1 dobimo pet 4-omin.

0	0
0	0

1	1
1	1

0	0
0	1

0	0
1	1

0	1
1	1

Slika 12: razvrščanje dveh števk na kvadromine

Po premisleku bi lahko oblikovali tudi igro s šestimi ploščicami, če bi dodali ploščico

0	1
1	0

Slika 13: dodatna kvadromina

Če upoštevamo predpostavko za triomine (stran 13, slika 8) zaradi upoštevanje zapisa vrstnega reda števil, uporabimo le pet ploščic za igro.

Vse možnosti razporeditve dveh števil na štiri mesta bi bile:

0000	0001	0011	0111	1111
	0010	1001	1011	
	0100	1100	1101	
	1000	0110	1110	
		0101		
		1010		

Preglednica 9

Možnosti zapisane na osenčenih mestih so ponavljajoče, v igri enakovredne prvi zapisani možnosti v stolpcu. Vseh možnosti in s tem igralnih ploščic je tako

$$2^4 - 11 = 5.$$

Če na kvadromino razvrščamo 3 števila (0, 1, 2) dobimo naslednje možnosti:

0000	1111	2222	0001	0011	0111	0002	0022	0222	1112	1122	1222	0012	0112	0221
			1000	1001	1011	2000	2002	2022	2111	2112	2122	0021	2110	0221
			0100	1100	1101	0200	2200	2202	1211	2211	2212	1200	1102	2210
			0010	0110	1110	0020	0220	2220	1121	1221	2221	2100	1120	2201
				0101			0202			1212		2001	0211	0122
				1010			2020			2121		1002	2011	1022
												2010	0121	0212
												1020	2101	1202
												0201	1012	2021
												0102	1210	2120
												0120	1021	2102
												0210	1201	2012

Preglednica 10

Možnosti zapisane na osenčenih mestih so ponavljajoče, v igri enakovredne prvi zapisani možnosti v stolpcu. Vseh možnosti je tako

$$3^4 - 66 = 15.$$

Vsoto lahko zapišemo tudi tako $1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 3 + 6 + 6 = 15$.

Če na kvadromino razvrščamo 4 števila (0, 1, 2, 3) dobimo:

0000	1111	2222	3333
0001	1112	2223	
0002	1113	2233	
0003	1122	2333	
0011	1133		
0022	1222		
0033	1333		
0111	1123		
0222	1223		
0333	1233		
0012			
0013			
0112			
0023			
0113			
0122			
0133			
0123			
0223			
0233			

Preglednica 11

Skupno število ploščic izračunamo z vsoto $1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 35$.

Pri razporejanju štirih števil bi bilo natanko 256 možnosti, zaradi ponavljanja jih odštejemo 221 ($4^4 - 221 = 35$).

Razporejanje petih števil (0, 1, 2, 3, 4):

0000	1111	2222	3333	4444
0001	1112	2223	3334	
0002	1113	2224	3344	
0003	1114	2233	3444	
0004	1122	2244		
0011	1133	2333		
0022	1144	2444		
0033	1222	2234		
0044	1333	2334		
0111	1444	2344		
0222	1123			
0333	1124			
0444	1134			
0012	1223			
0013	1224			
0014	1233			
0023	1234			
0024	1244			
0034	1334			
0112	1344			
0113				
0114				
0122				
0123				
0124				
0133				
0134				
0144				
0223				
0224				
0233				
0234				
0244				
0334				
0344				

Preglednica 12

Iz zapisa vidimo da lahko skupno število ploščic izračunamo z vsoto

$$1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = 70.$$

Igramo s 70 ploščicami.

Pri razporejanju petih števil bi bilo natanko 625 možnosti, zaradi ponavljanja jih odštejemo 555, ($5^4 - 555 = 70$).

Iz zapisanih primerov ugotovimo ponavljajoč vzorec izračuna števila igralnih ploščic. Glede na izbrano število števil na ploščicah zapišemo vsoto členov.

Za 3 števila: $1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 3 + 6 + 6 = 15$

Za 4 števila: $1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 35$

Za 5 števil: $1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = 70$

Za 6 števil predpostavimo vsoto $1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 21 \cdot 1 = 96$.

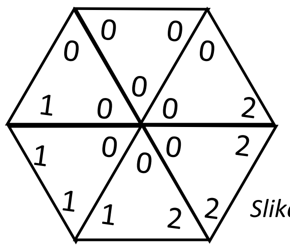
Za izbrano število *k* zapišemo vsoto

$1 \cdot k + 3 \cdot (k-1) + 6 \cdot (k-2) + 10 \cdot (k-3) + \ldots + t \cdot 1$, kjer s t označimo k-to zaporedno število številskega zaporedja 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 … . Gre za zaporedje trikotniških števil. Poljubno trikotniško število v zaporedju izračunamo $\frac{k(k+1)}{2} = t$.

7. *n* – omine

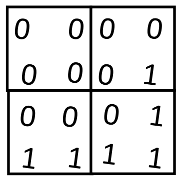
Postavimo vprašanje ali lahko oblikujemo igro s poljubnimi pravilnimi večkotniki, v katerih oglišča zapisujemo izbrana števila. V prikazanih primerih opazimo, da s ploščicami prekrivamo ravnino. V bistvu tlakujemo ravnino s pravilnimi večkotniki (razen v primeru domin, kjer tlakujemo ravnino s pravokotniki). Pri tlakovanju ravnine s pravilnimi večkotniki pa ne moremo za vsak izbrani pravilni večkotnik poljubno prekrivati ravnine, saj lahko pride do prekrivanja dveh ali več ploščic. Tlakovanje je možno s takimi ploščicami, s katerimi lahko v skupnem vrhu (oglišču) oblikujemo polni kot. Govorimo o pravilnem pokritju ravnine.

Za enakostranični trikotnik potrebujemo 6 ploščic, da oblikujemo polni kot, saj je velikost notranjega kota izbranega trikotnika 120°.



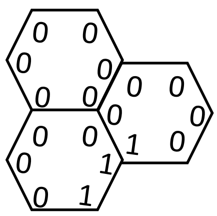
Slika 14: polni kot triomin

Potrebujemo štiri kvadratne ploščice, da oblikujemo polni kot.



Slika 15: polni kot štiriomin

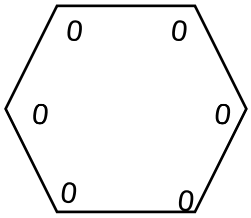
Polni kot lahko oblikujemo tudi s pravilnimi šestkotniki.



Slika 16: polni kot šestomin

Ugotovitev pomeni, da lahko sestavimo igro s ploščicami v obliki pravilnih šestkotnikov. Poimenujmo jo šestomine (ali heksomine).

Če imamo eno (npr. 0) število, ki jo razporejamo na pravilni šestkotnik dobimo 1 ploščico.



Slika 17: šestomina

Če na pravilni šestkotnik razvrščamo 2 števili (0, 1) dobimo 7 ploščic za igro.

000000	111111
000001	
000011	
000111	
001111	
011111	

Preglednica 13

Če na pravilni šestkotnik razvrščamo tri števila (npr. 0, 1, 2) dobimo 28 ploščic.

000000	111111	222222
000001	111112	
000011	111122	
000111	111222	
001111	112222	
011111	122222	
000002		
000022		
000222		
002222		
022222		
000012		
000112		
001112		
011112		
000122		
001122		
001222		
011122		
011222		
012222		

Preglednica 14

Za nastanek zgornje slike (slika 16) potrebujemo najmanj 2 števili.

Ugotovimo, da glede na nekatere predpostavke igre ne moremo oblikovati poljubne igre *n*-omine.

8. Ugotovitve

Skozi raziskovalno nalogo ugotovimo, da igre domine, triomine, štiriomine ne sodijo med noben način razporejanja števk na mesta (torej ne med permutacije, variacije ali kombinacije), ampak da obstaja za vsako igro poseben način računanja števila igralnih ploščic glede na število elementov, ki jih razvrščamo. Igre ne moremo igrati s kakršnim koli pravilnim večkotnikom, temveč le s trikotniki, kvadrati in pravilnimi šestkotniki. Zaradi tega tudi ne obstaja univerzalna formula za izračun števila igralnih ploščic. V nadaljevanju bi lahko raziskali, katere oblike prekritja ravnine lahko dobimo, ko igramo igre (domine, triomine …) in morda definirali možnosti, kako prekritja prikazati, čeprav je teh možnosti izjemno veliko in bi bilo to zelo težko zapisati.

9. Družbena odgovornost

Družabne igre je v današnjem času vedno več ljudi zamenjalo za računalniške nadomestke. Ta raziskovalna naloga izhaja iz problematike/kombinatorike domin, ki so osnova za druge podobne, a zahtevnejše družabne igre, kot so npr. triomine. Raziskovalna naloga spodbuja razmišljanje mladih ampak ne pred računalniškimi ekrani, temveč v družbi svojih prijateljev in vrstnikov. Najlažje in najbolj prepoznavne so zagotovo domine, ki so primerne tudi za najmlajše igralce. Triomine ali štiriomine (ki smo jih sami oblikovali) pa lahko predstavljajo izziv za igralce vseh starosti, zato so primerno sredstvo za medgeneracijsko povezovanje.

10. Viri

https://sl.wikipedia.org/wiki/Teselacija (15. 1. 2018)

https://www.youtube.com/watch?v=bwASfuDyuIQ&list=PLjMizuT1iB3sUfnUHq1IZePkEf9EUNi5C (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=50V2xhn5HyY&list=PLjMizuT1iB3sUfnUHq1IZePkEf9EUNi5C&index=3 (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=KEC-NeAZXiE&list=PLjMizuT1iB3sUfnUHq1IZePkEf9EUNi5C&index=4 (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=o8FzBPF0fL4&list=PLjMizuT1iB3t1E54BgRACJCUv7rJFxF4i (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=FbdN0UaFGr8&index=2&list=PLjMizuT1iB3t1E54BgRACJCUv7rJFxF4i (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=ZLq7PvI7EJw&list=PLjMizuT1iB3t1E54BgRACJCUv7rJFxF4i&index=3 (19.11.2017)

http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/kombi.html (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=dXcVRZseCKk&list=PLjMizuT1iB3s4Ni50sQnYCPqCWaQMRohv (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=L5XAyKR3FXk&index=3&list=PLjMizuT1iB3s4Ni50sQnYCPqCWaQMRohv (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=AsQ_ryr5-ls&index=4&list=PLjMizuT1iB3s4Ni50sQnYCPqCWaQMRohv (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=dvMVNPX0ScU&t=78s (19.11.2017)

https://www.youtube.com/watch?v=Q9hx4B3YxDk&list=PLjMizuT1iB3vkh9OACOMFus48YjXk_fg4 (19.11.2017)

SLIKE:

slika 1:

https://www.google.si/search?q=kombinatori%C4%8Dno+drevo&client=firefox-b-ab&dcr=0&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwj6xbycoMvXAhWCthoKHV0yD0YQ_AUICigB&biw=1536&bih=725#imgrc=vZPf4QglxiitfM

slika 2:

https://www.google.si/search?q=domino&dcr=0&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwio06KW5Y7YAhWJ4aQKHXPtD4EQ_AUICigB&biw=1366&bih=609#imgrc=k1DtDMZuBRK8IM: 16.12.2017

slika 3:
https://www.google.si/search?q=domino&dcr=0&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwio06KW5Y7YAhWJ4aQKHXPtD4EQ_AUICigB&biw=1366&bih=609#imgrc=Vwww9pe24iUTaM: 16.12.2017

slika 4:

https://www.google.si/search?dcr=0&biw=1366&bih=609&tbm=isch&sa=1&ei=mEw1WuOyBZKvsAek67DwCQ&q=triomins&oq=triomins&gs_l=psy-ab.3..0i19k1l6j0i13i30i19k1l4.12334.12815.0.13202.2.2.0.0.0.0.203.365.0j1j1.2.0....0...1c.1.64.psy-ab..0.2.363...0i30i19k1.0.ZKWzLjz6dEU#imgrc=zzFSzHF4qNJFVM: 16.12.2017