»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2018«

35. SREČANJE

# ŠTIRIKOTNIK IN NJEMU PLOŠČINSKO ENAK TRIKOTNIK

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: LEA STRNIŠA, TAŠA HORVAT, KATARINA NEDOH
Mentor: ALENKA REPNIK
Šola: OŠ BORCEV ZA SEVERNO MEJO MARIBOR

Maribor, januar 2018

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2018«

35. SREČANJE

# ŠTIRIKOTNIK IN NJEMU PLOŠČINSKO ENAK TRIKOTNIK

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Maribor, januar 2018

# KAZALO

## KAZALO SLIK

## POVZETEK

V nalogi smo se lotili preiskovanja problema, na katerega nas je opozorila učiteljica matematike, in sicer: *»Dan je poljubni štirikotnik. Ali lahko narišemo temu štirikotniku ploščinsko enak trikotnik?«*

Pokazali smo, kako transformiramo poljubni štirikotnik v ploščinsko enak trikotnik z metodo grafične ponazoritve in uporabo programa dinamične geometrije. Svoje ugotovitve smo podkrepili z razlagami in dokazi. Lotili smo se tudi transformacije poljubnega večkotnika v njemu ploščinsko enak trikotnik ter ugotovili, da je metoda, ki smo jo uporabili pri prvotnem primeru, tudi v tem primeru povsem identična, le da jo moramo uporabiti večkrat zapored. V nalogi smo opisali lastnosti štirikotnikov in trikotnikov.

# 1 UVOD

## 1.1 Namen in cilj naloge

Zanimalo nas je, ali lahko poljubni štirikotnik spremenimo v ploščinsko enak trikotnik.

Ko smo prvič naleteli na omenjeni problem, smo najprej pomislili na to, da bi izračunali ploščino štirikotnika in nato poskušali narisati ploščinsko enak trikotnik. Ker nam je geometrija blizu, izračuni pa so se hitro izkazali za precej komplicirane, nas je zanimalo, ali lahko naš problem rešimo zgolj geometrijsko oziroma načrtovalno. Za pomoč smo povprašali učiteljico matematike, ki nas je pozvala, da o tem naredimo raziskovalno nalogo.

Namen naše raziskovalne naloge je poiskati geometrijski način preobrazbe poljubnega štirikotnika v ploščinsko enak trikotnik. V nalogi smo predstavili tudi zgodovino matematike oziroma geometrije. V uvodnem delu smo se posvetili geometrijskim likom, s katerimi smo se srečevali pri raziskovanju preobrazbe poljubnega štirikotnika v ploščinsko enak trikotnik, torej trikotnikom in štirikotnikom. Predvsem pa je cilj naše naloge raziskati in predstaviti, kako poljubni štirikotnik načrtovalno preobrazimo v ploščinsko enak trikotnik.

## 1.2 Hipoteze

*Hipoteza 1:* Vsak štirikotnik je mogoče preobraziti v ploščinsko enak trikotnik.

*Hipoteza 2:* Štirikotnik lahko preobrazimo v ploščinsko enak trikotnik na en sam način. Rešitev je enolična.

*Hipoteza 3:* Če lahko poljubni štirikotnik transformiramo v ploščinsko enak trikotnik, potem lahko tudi poljubni trikotnik preobrazimo v ploščinsko enak štirikotnik.

*Hipoteza 4:* Pri preobrazbi poljubnega trikotnika v ploščinsko enak štirikotnik je možnih več rešitev.

*Hipoteza 5:* Poljubnega večkotnika ni možno preobraziti v njemu ploščinsko enak trikotnik.

## 1.3 Geometrija

Geometrija je ena od vej matematike. Geometrija se ukvarja večinoma s premicami, z daljicami, s koti, točkami, z ravninami, s prostori, z liki ter s telesi. Ljudje geometrijo uporabljamo že tisočletja. Srečujemo jo tudi v vsakdanjem življenju, npr. v arhitekturi, pri delu, v astronomiji ter pri orientaciji.

### 1.3.1 Zgodovina geometrije

Geometrija se je prvič »pojavila« v Egiptu in v dolini Inda okoli leta 3000 pr. n. št. Ljudje so geometrijo začeli uporabljati predvsem iz praktičnih razlogov, preučevala je namreč probleme, povezane z zemljemerstvom (ime geometrija je grškega izvora in sicer iz besed *γη* (ge = Zemlja) in *μετρία* (metria = merjenje). Znanje geometrije jim je koristilo tudi pri postavljanju veličastnih svetišč in pri gradnji piramid.

*Slika 1: Piramide v Egiptu (vir: [https://sl.wikipedia.org/wiki/Piramida](https://sl.wikipedia.org/wiki/Piramida), 26. 12. 2017)*

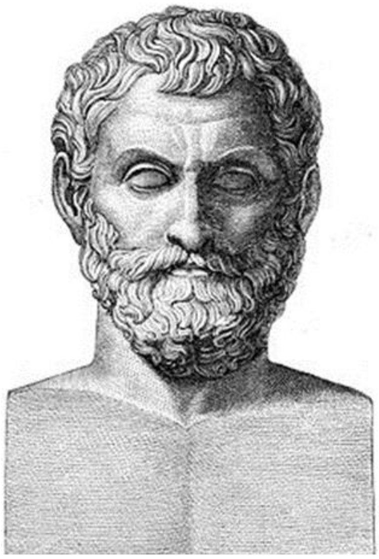
O staroegipčanski geometriji izvemo največ iz dveh ohranjenih papirusov:

- Rhindtov papirus, ki se imenuje po angleškem egiptologu, je napisal pisar Ahmes približno 1600 pr. n. št.
- Mo, moskovski papirus, ki ga hranijo v Moskvi, je bil napisan 1859 pr. n. št.

Egipčani geometrije niso obravnavali kot znanost, vendar so že znali izračunati prostornino krogle, poznali so prisekano piramido in vedeli so, da je trikotnik s stranicami dolgimi 3, 4 in 5 enot pravokoten.

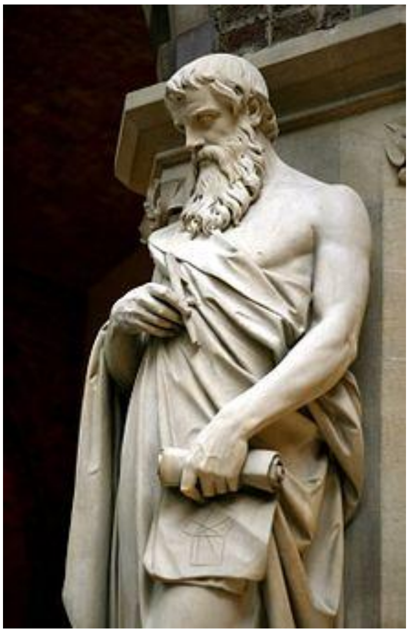
Tudi babilonska geometrija je bila praktične narave. Babilonci so prvi razdelili krog na 360 enakih delov, znali pa so izračunati tudi ploščino trikotnika, kroga, valja itd.

Starogrški matematiki so se geometrije, za razliko od Babiloncev, lotili veliko bolj znanstveno. Tales je prenesel znanje, ki so ga usvojili Babilonci, v Grčijo. Prav zato ga imenujejo tudi oče grške matematike.



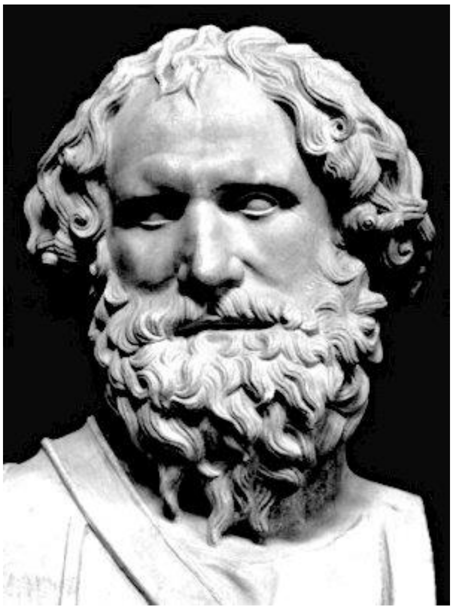
*Slika 2: Tales (vir: https://sl.wikipedia.org/wiki/Tales, 26. 12. 2017)*

Kasneje je znanje grških matematikov dopolnil in objavil Evklid ter geometrijo s tem postavil na aksiomatske temelje, ki so vzdržali več kot 2000 let (do leta 1899). Evklidovi »Elementi« so kasneje postali temeljno delo geometrije.



*Slika 3: Evklid (vir: https://sl.wikipedia.org/wiki/Evklid, 27. 12. 2017)*

Arhimed je eden izmed najbolj znanih matematikov, fizikov, izumiteljev. Njegova odkritja in izumi: Arhimedov zakon, Arhimedov vijak in toplotni žarek. Na področju matematike je raziskoval merjenje kroga, kvadratni koren števila 3, kroglo in valj …



*Slika 4: Arhimed (vir: https://velikimatematicari.wordpress.com/2014/03/08/arhimed/, 27. 12. 2017)*

Leta 1899 je nemški matematik David Hilbert popravil in moderniziral Evklidove aksiomske temelje geometrije ter jih objavil v knjigi »Osnove geometrije«.

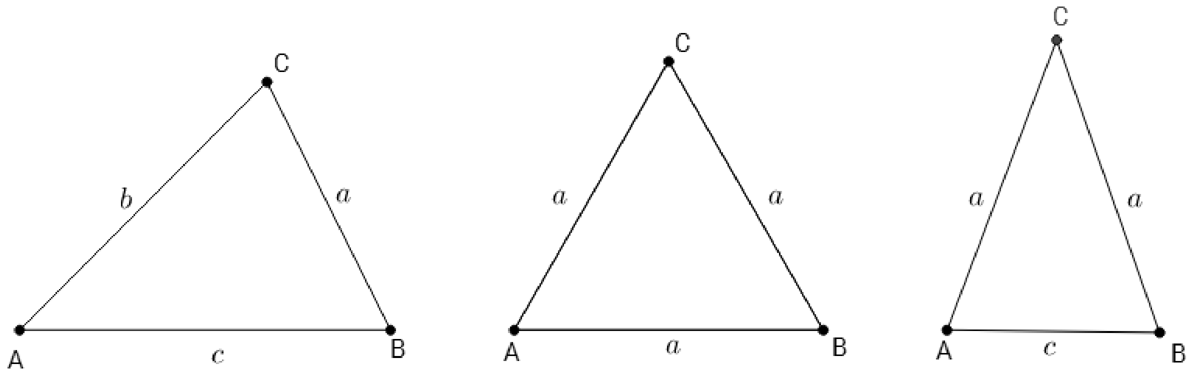
*Slika 5: David Hilbert (vir: https://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert, 29. 12. 2017)*

### 1.3.2 Trikotniki

Trikotnik je geometrijski lik, ki je določen s tremi točkami, ki ne ležijo na isti premici.

Stranice so daljice, ki povezujejo sosednji oglišči, označujemo z malimi tiskanimi črkami $a, b$ in $c$. Vsi notranji koti trikotnika merijo skupaj 180°, vsi zunanji koti pa 360°. Trikotnike razvrščamo glede na dolžine njihovih stranic ter velikosti notranjih kotov.

Glede na dolžine stranic ločimo raznostranični trikotnik, enakokraki trikotnik, enakostranični trikotnik (ali pravilni trikotnik).



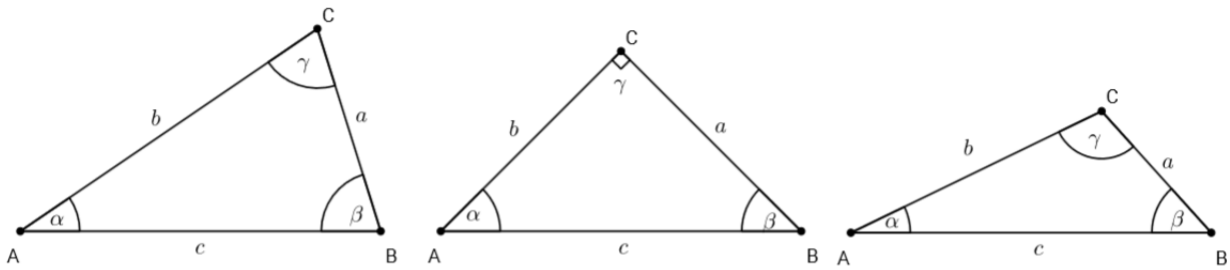

*Slika 6: Trikotniki glede na dolžine stranic – od leve: raznostranični, enakostranični in enakokraki (vir: avtor)*

V trikotniku je nasproti daljše stranice vedno večji notranji kot, za stranice pa velja trikotniško pravilo, ki pravi:

Vsota dolžin dveh stranic v trikotniku mora biti večja od dolžine tretje stranice.

$$a + b > c \qquad a + c > b \qquad b + c > a$$

Glede na velikost notranjih kotov ločimo ostrokotni trikotnik, pravokotni trikotnik in topokotni trikotnik.




*Slika 7: Trikotniki glede na velikosti notranjih kotov – od leve: ostrokotni, pravokotni in topokotni trikotnik (vir: avtor)*

#### 1.3.2.1 Obseg in ploščina trikotnika

Kadar govorimo o geometrijskih likih, imamo poleg oblike velikokrat opraviti tudi z njihovimi merami oziroma 'velikostjo'. Pri tem imamo pogosto opravka tudi s količinami, ki jih neposredno ne izmerimo (obseg, ploščina), ampak jih s pomočjo izmerjenih količin (dolžine stranic, višin, velikosti kotov) izračunavamo.

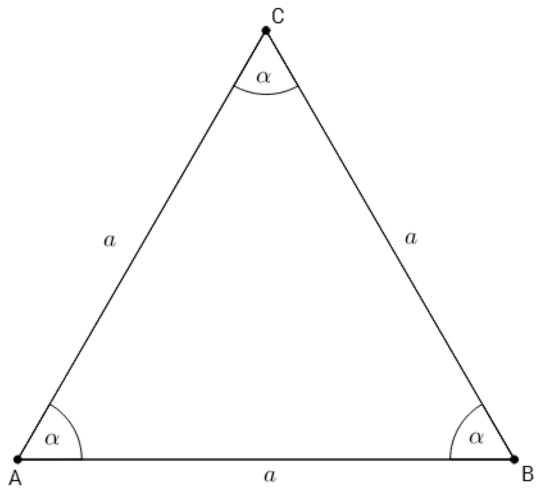
Kadar želimo izračunati obseg ($o$) trikotnika, moramo poznati dolžine vseh treh stranic ($a, b, c$): $o = a + b + c$.

Za izračun ploščine trikotnika moramo poznati dolžino vsaj ene stranice ter višino ($v$) na to stranico: $p = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$.

Glede na vrste trikotnikov lahko ta dva obrazca za posamezno vrsto nekoliko izpeljemo, velja pa dejstvo, da sta zgoraj zapisana obrazca uporabna za vse vrste trikotnikov.

#### 1.3.2.1.1 Enakostranični trikotnik

Trikotnik je enakostraničen, kadar so vse tri stranice med seboj skladne ($a = b = c$). Posledica skladnih stranic so skladni notranji koti enakostraničnega trikotnika (in obratno), torej vsak notranji kot meri natanko 60° ($\alpha = \beta = \gamma = 60°$).




*Slika 8: Enakostranični trikotnik (vir: avtor)*

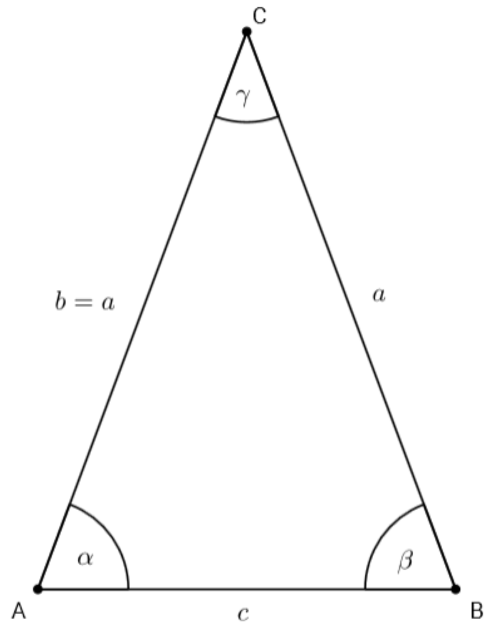
Enakostranični trikotnik (ali pravilni trikotnik) je pravilni večkotnik z najmanj oglišči (stranicami, koti).

Obrazec za obseg enakostraničnega trikotnika lahko zaradi skladnosti stranic torej zapišemo: $o = 3 \cdot a$.

Obrazec za ploščino enakostraničnega trikotnika lahko izpeljemo s pomočjo Pitagorovega izreka in dobimo: $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

#### 1.3.2.1.2 Enakokraki trikotnik

Trikotnik je enakokrak, kadar ima dve skladni stranici, ki ju imenujemo kraka ($a = b$). Tretjo stranico imenujemo osnovnica. V trikotniku velja, da nasproti daljše stranice leži večji kot. Posledično sta kota, ki ležita ob osnovnici enakokrakega trikotnika, skladna ($\alpha = \beta$).



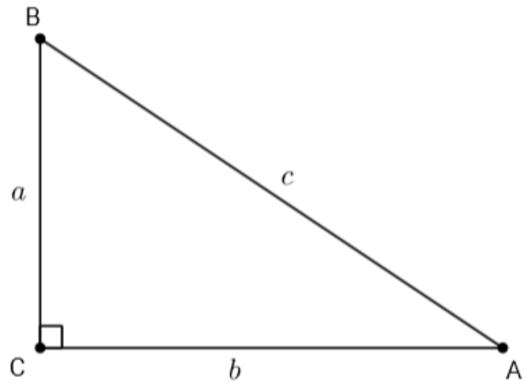

*Slika 9: Enakokraki trikotnik (vir: avtor)*

Zaradi skladnosti stranic (krakov) enakokrakega trikotnika lahko obrazec za obseg izpeljemo v obliko: $o = 2a + c$.

Ploščino računamo po splošnem obrazcu, ki velja za vse trikotnike in je zapisan v poglavju 1.3.2.1.

#### 1.3.2.1.3 Pravokotni trikotnik

Trikotnik je pravokoten, kadar en njegov notranji kot meri natanko 90°.




*Slika 10: Pravokotni trikotnik (vir: avtor)*

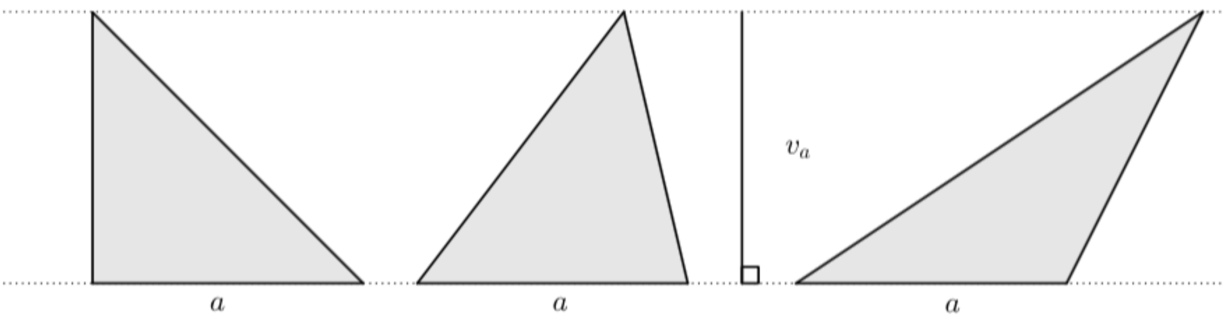
V pravokotnem trikotniku stranice poimenujemo še s posebnimi izrazi. Krajši stranici sta kateti (po dogovoru sta to navadno stranici $a$ in $b$), najdaljša stranica pa se imenuje hipotenuza ($c$). S pomočjo Pitagorovega izreka lahko v pravokotnem trikotniku iz znanih dolžin dveh stranic izračunamo dolžino tretje stranice: $c^2 = a^2 + b^2$.

V splošnem so dolžine stranic pravokotnega trikotnika različne, zato uporabimo obrazec za obseg: $o = a + b + c$. Kadar je pravokotni trikotnik enakokrak, lahko seveda uporabimo tudi obrazec, ki smo ga zapisali pri enakokrakem trikotniku: $o = 2a + c$.

Pri izračunu ploščine lahko upoštevamo, da sta kateti hkrati ena drugi višini, zato ploščino pravokotnega trikotnika izračunamo: $p = \frac{a \cdot b}{2}$.

#### 1.3.2.2 Kdaj sta obseg in ploščina različnih trikotnikov enaka?

Obseg prvega trikotnika bo enak obsegu drugega trikotnika, ko bo vsota dolžin stranic prvega trikotnika enaka vsoti dolžin stranic drugega trikotnika ($a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$). Ploščini obeh trikotnikov bosta zagotovo enaki, ko bosta imela oba trikotnika enako vsaj eno stranico ter višino na to stranico.




*Slika 11: Ploščinsko enaki trikotniki (vir: avtor)*

### 1.3.3 Štirikotniki

Množico točk v ravnini, ki je omejena s štirimi daljicami, imenujemo štirikotnik.

Ko slišimo izraz štirikotnik, imamo nehote pogosto pred očmi pravokotnik ali kvadrat, ki pa še zdaleč ne predstavljata štirikotnikov nasploh. 'Družina' štirikotnikov je veliko večja in pestrejša, kot zgolj pravokotniki in kvadrati.

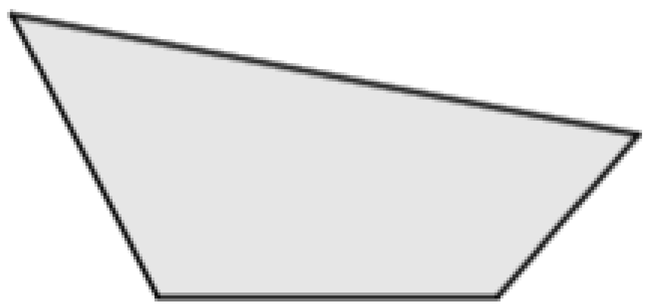
Zgoraj zapisana definicija daje oblikam štirikotnikov neskončne možnosti. Vendarle pa je nekaj lastnosti skupnih vsem štirikotnikom:

- imajo štiri stranice (daljice, ki jih omejujejo),
- imajo štiri oglišča,
- vsota vseh notranjih kotov je 360°,
- vsota vseh zunanjih kotov je 360°,
- imajo po dve diagonali ($|AC| = e$ in $|BD| = f$).

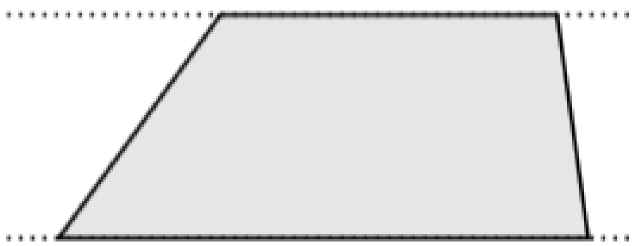
Glede na velikosti notranjih kotov lahko štirikotnike ločimo na izbočene (vsi koti manjši od 180°) in vdrte (en kot večji od 180°).

Glede na medsebojne lege stranic lahko štirikotnike razdelimo na:

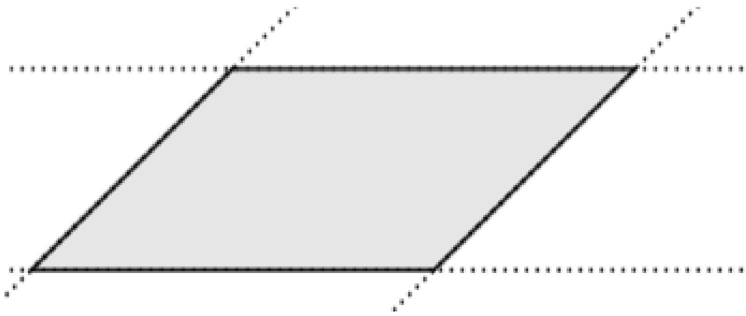
- trapezoide, ki nimajo vzporednih stranic (slika 12),
- trapeze, ki imajo en par vzporednih stranic (slika 13) in
- paralelograme, ki imajo dva para vzporednih stranic (slika 14).



*Slika 12: Trapezoid (vir: avtor)*



*Slika 13: Trapez (vir: avtor)*



*Slika 14: Paralelogram (vir: avtor)*

Obseg poljubnega štirikotnika je vsota dolžin vseh njegovih stranic: $o = a + b + c + d$. Za posamezne štirikotnike lahko ta obrazec preoblikujemo glede na lastnosti posameznega štirikotnika.

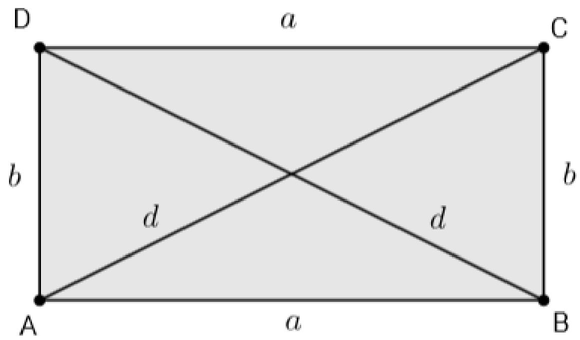
Pri izračunavanju ploščine poljubnih štirikotnikov si pomagamo z znanim obrazcem za ploščino pravokotnika, iz katerega izpeljemo praktično vse posamezne obrazce (tudi obrazec za ploščino trikotnika smo pravzaprav izpeljali iz tega istega obrazca). Splošnega obrazca za ploščino poljubnega štirikotnika ne moremo zapisati.

#### 1.3.3.1 Pravokotnik

Pravokotnik je paralelogram, ki ima skladne tudi vse štiri notranje kote, vsak meri 90°. Diagonali pravokotnika sta skladni in se razpolavljata. Pravokotnik je osno in središčno simetričen. Središče simetrije je v presečišču diagonal, osi simetrije pa sta simetrali dolžine in širine pravokotnika.

Obseg pravokotnika dobimo tako, da seštejemo dolžine posameznih stranic. Če upoštevamo skladnost stranic, lahko splošni obrazec preoblikujemo: $o = 2 \cdot (a + b)$.

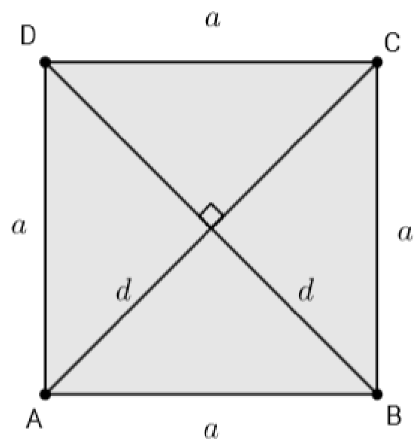
Njegovo ploščino izračunamo tako, da pomnožimo dolžino ($a$) in širino ($b$) pravokotnika med seboj: $p = a \cdot b$.




*Slika 15: Pravokotnik (vir: avtor)*

#### 1.3.3.2 Kvadrat

Kvadrat je pravokotnik, ki ima vse stranice skladne. Torej ima skladne vse štiri notranje kote (90°). Diagonali sta skladni in se razpolavljata (saj je pravokotnik), še več, diagonali sta pravokotni. Kvadrat je osno in središčno simetričen lik. Osi simetrije je več, središče simetrije pa je v presečišču diagonal.



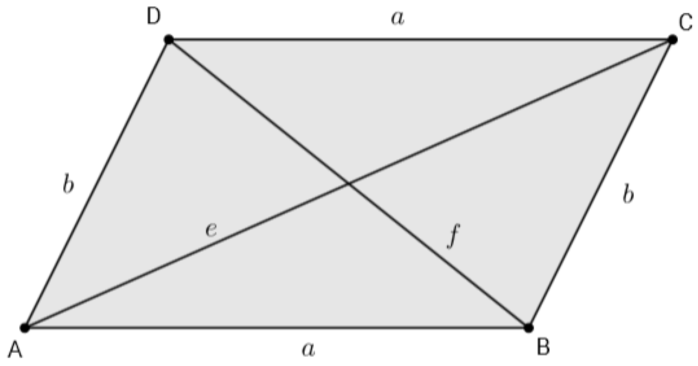

*Slika 16: Kvadrat (vir: avtor)*

Ploščino izračunamo enako kot pri pravokotniku, saj je kvadrat pravokotnik. Zaradi skladnosti stranic lahko obrazec za ploščino zapišemo: $p = a^2$.

Pri preoblikovanju obrazca za obseg kvadrata upoštevamo skladnost vseh stranic: $o = 4 \cdot a$.

#### 1.3.3.3 Paralelogram

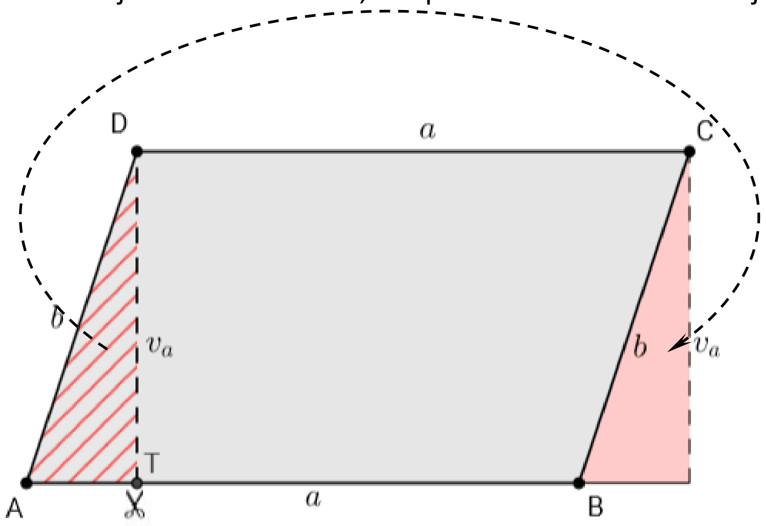
Paralelogram je štirikotnik z dvema paroma vzporednih stranic. Nasprotni stranici sta skladni, enako velja za nasprotna kota. Kota ob isti stranici sta suplementarna (skupaj merita 180°). Diagonali se razpolavljata. Paralelogram je središčno simetričen lik, presečišče diagonal je središče simetrije.




*Slika 17: Paralelogram (vir: avtor)*

Ker sta po dve in dve stranici skladni, kot pri pravokotniku, je obrazec enak kot za obseg pravokotnika: $o = 2 \cdot (a + b)$.

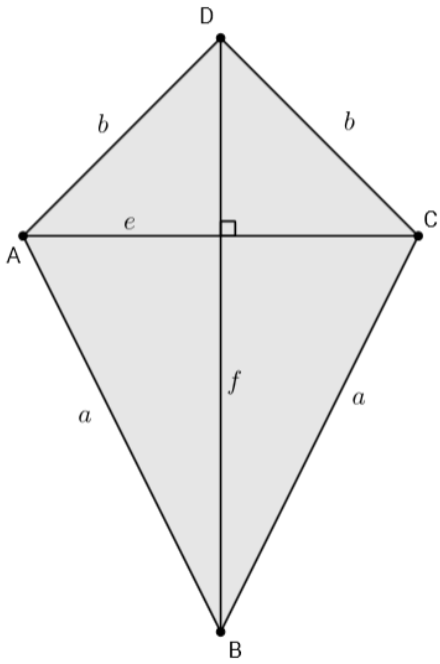
Paralelogram lahko preoblikujemo v ploščinsko enak pravokotnik, kot kaže slika spodaj. Ploščino paralelograma torej izračunamo tako, da pomnožimo stranico z njej pripadajočo višino: $p = a \cdot v_a$.




*Slika 18: Preoblikovanje paralelograma v ploščinsko enak pravokotnik (vir: avtor)*

#### 1.3.3.4 Deltoid

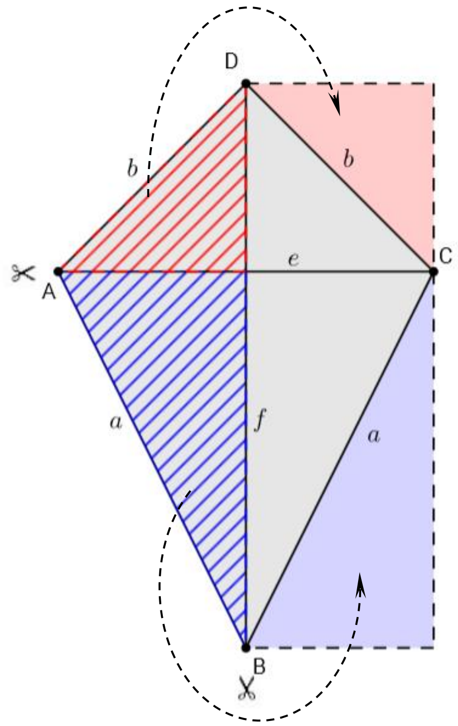
Deltoid je štirikotnik, ki ima dva para sosednjih skladnih stranic. Po dogovoru deltoid označimo tako, da os simetrije poteka skozi oglišči $B$ in $D$. Je torej osno simetričen lik; stranici, ki imata skupno oglišče na osi simetrije, sta skladni. Diagonali sta pravokotni. Diagonala, ki leži na somernici, razpolavlja drugo diagonalo in notranja kota, skozi katera poteka ($\beta\ in\ \delta$). Preostala notranja kota sta skladna ($\alpha = \gamma$).




*Slika 19: Deltoid (vir: avtor)*

Ker sta po dve in dve stranici skladni, lahko obrazec za obseg poljubnega štirikotnika preoblikujemo za deltoid takole: $o = 2 \cdot (a + b)$.

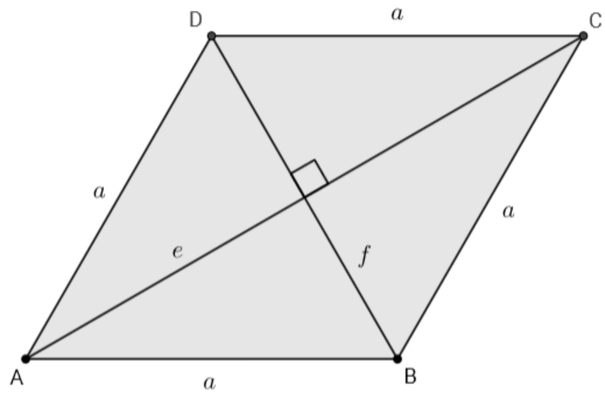
Zaradi pravokotnosti diagonal lahko deltoid dokaj preprosto 'preoblikujemo' v pravokotnik in izkaže se, da je ploščina deltoida enaka polovici produkta obeh diagonal: $p = \frac{e \cdot f}{2}$.




*Slika 20: Preoblikovanje deltoida v ploščinsko enak pravokotnik (vir: avtor)*

### 1.3.3.5 Romb

Romb je deltoid in hkrati tudi paralelogram, ki ima vse stranice enako dolge. Ima dva para vzporednih stranic. Ker vemo, da je romb deltoid, vemo, da sta njegovi diagonali pravokotni, ker je paralelogram, pa se diagonali tudi razpolavljata. Nasprotna notranja kota sta skladna, sosednja notranja kota pa suplementarna. Romb je osno in središčno simetričen. Središče simetrije je presečišče diagonal, osi simetrije pa sta obe diagonali.




*Slika 21: Romb (vir: avtor)*

Zaradi skladnosti stranic lahko obrazec za obseg zapišemo enako kot pri kvadratu: $o = 4 \cdot a$.

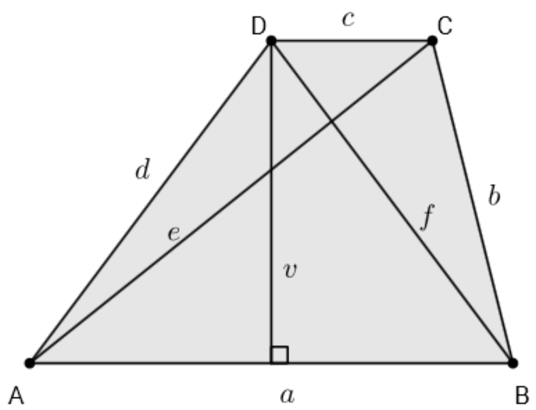
Ker je romb deltoid, lahko uporabimo za izračun ploščine enak obrazec kot za deltoid: $p = \frac{e \cdot f}{2}$.

Ker pa je romb hkrati tudi paralelogram, lahko uporabimo za izračun ploščine tudi obrazec, ki smo ga zapisali že pri paralelogramu: $p = a \cdot v_a$.

V obeh primerih je preoblikovanje romba v ploščinsko enak pravokotnik enako kot v že predstavljenih preoblikovanjih deltoida oziroma paralelograma v ploščinsko enaka pravokotnika.

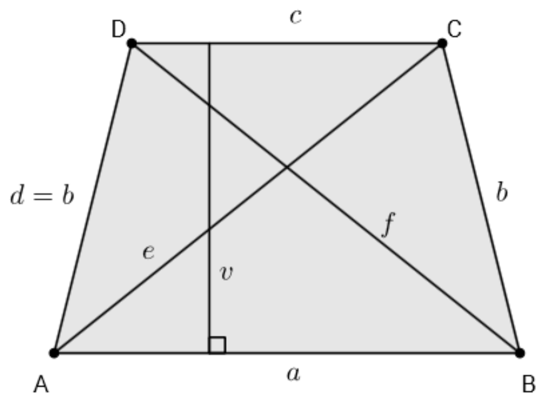
#### 1.3.3.6 Trapez

Štirikotnik, ki ima en par vzporednih stranic, imenujemo trapez. Vzporedni stranici imenujemo tudi osnovnici ($a$ in $c$), preostali dve stranici pa kraka ($b$ in $d$). Višina trapeza je razdalja med nosilkama osnovnic.




*Slika 22: Trapez (vir: avtor)*

Trapez, ki ima kraka skladna ($b \cong d$), imenujemo enakokraki trapez. Ta je osno simetričen, os simetrije razpolavlja njegovi osnovnici. Kota ob osnovnici sta skladna ($\alpha \cong \beta$ in $\gamma \cong \delta$). Tudi diagonali enakokrakega trapeza sta skladni.

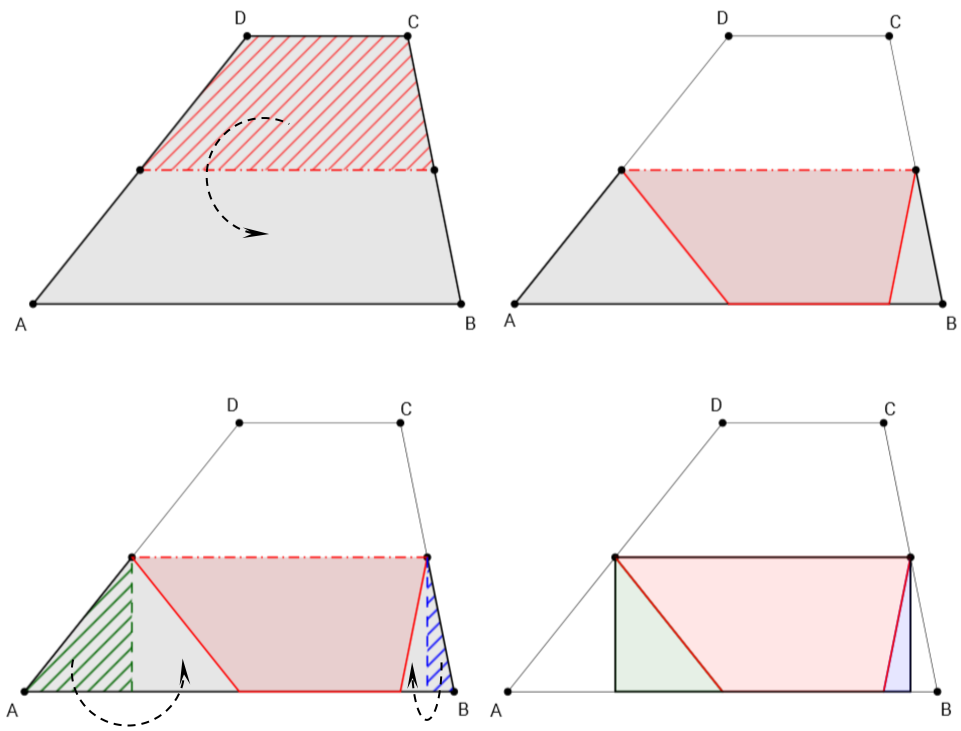



*Slika 23: Enakokraki trapez (vir: avtor)*

Obseg trapeza je vsota dolžin njegovih stranic, torej: $o = a + b + c + d$.

Za enakokraki trapez lahko obrazec izpeljemo v obliko: $o = a + 2 \cdot b + c$.

Za izračun ploščine trapez preoblikujemo v pravokotnik. Najprej ga preložimo po srednjici, daljici, ki povezuje razpolovišči obeh krakov: $s = \frac{a+c}{2}$. Z nekaj preoblikovanja dobimo, da je ploščina trapeza: $p = s \cdot v = \frac{a+c}{2}$.



*Slika 24: Preoblikovanje trapeza v ploščinsko enak pravokotnik (vir: avtor)*

# 2 METODOLOGIJA DELA

Pri raziskovanju smo uporabili naslednje metode:

- metoda raziskovanja pisnih virov,
- metode grafičnih ponazoritev (grafične ponazoritve s pomočjo računalniškega programa za dinamično geometrijo GeoGebre),
- računanje,
- sklepanje,
- načrtovanje,
- opazovanje.

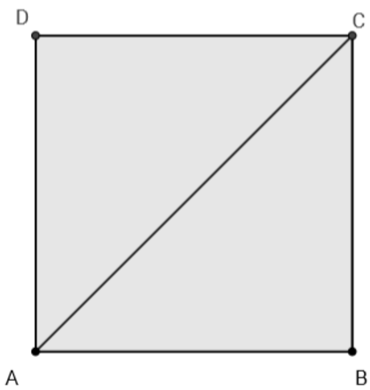
# 3 REZULTATI

Raziskovalni problem (*Ali lahko poljubni štirikotnik spremenimo v ploščinsko enak trikotnik?*) nas je takoj pritegnil in naša prva ideja je bila, da se naloge lotimo računsko. Kljub poznavanju obrazcev za računanje ploščin štirikotnikov in trikotnikov smo kmalu ugotovili, da bi bil tak način reševanja zastavljenega problema precej zapleten in predvsem zamuden. To nas je napeljalo, da se problema lotimo drugače, geometrijsko.

## 3.1 Kvadratu ploščinsko enak trikotnik

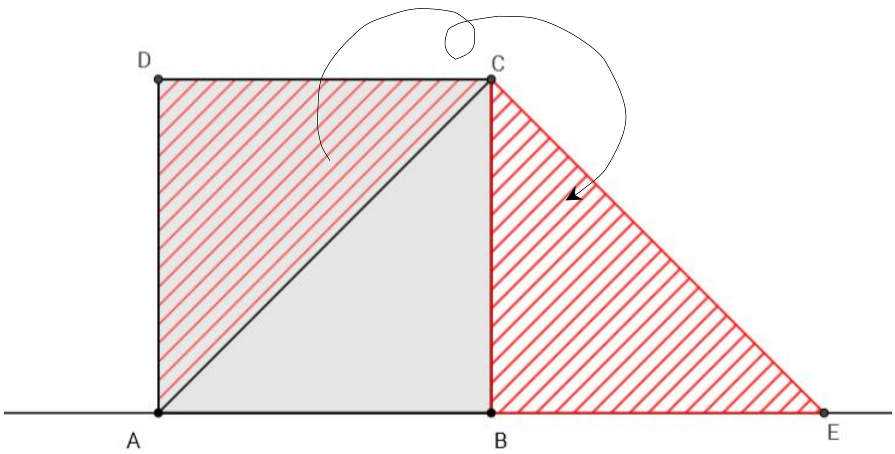
Recimo, da je »poljubni« štirikotnik kvadrat. V tem primeru je problem dokaj hitro in enostavno rešen.

Dan je kvadrat $ABCD$. Narišimo diagonalo ($AC$), ki kvadrat razdeli na dva skladna trikotnika (slika 25).

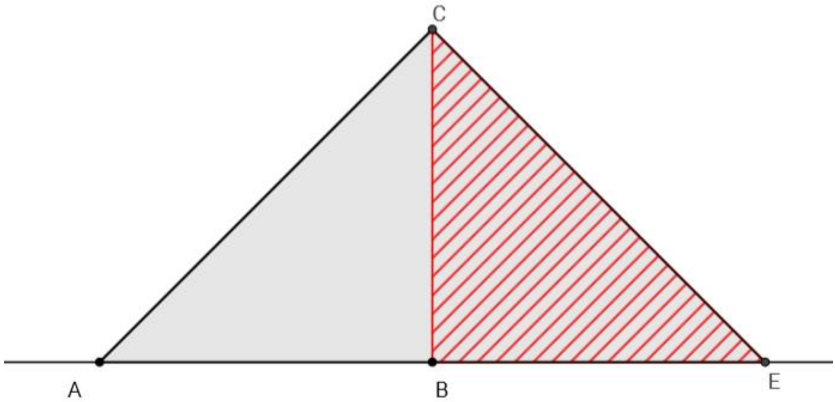



*Slika 25: Kvadrat ABCD z vrisano diagonalo AC (vir: avtor)*

Če bi kvadrat razrezali po narisani diagonali in trikotnika ustrezno znova sestavili, dobimo enakokraki trikotnik (sliki 26 in 27).




*Slika 26: Preoblikovanje kvadrata ABCD v ploščinsko enak trikotnik AEC (vir: avtor)*




*Slika 27: Trikotnik AEC, ki je ploščinsko enak prvotno danemu kvadratu (vir: avtor)*

Če je torej vprašanje, kako kvadrat preoblikujemo v ploščinsko enak trikotnik, problem sploh ni tako zelo zapleten. Načrtovalno to naredimo tako, da trikotnik $ABC$ prezrcalimo čez stranico $BC$. Ker točki $B$ in $C$ ležita na osi zrcaljenja, sta negibni (prezrcalita se sami vase). Torej moramo dejansko prezrcaliti le točko $A$ (v točko $E$) čez stranico $BC$. Tako dobimo enakokraki trikotnik $AEC$, ki je ploščinsko enak prvotnemu kvadratu.

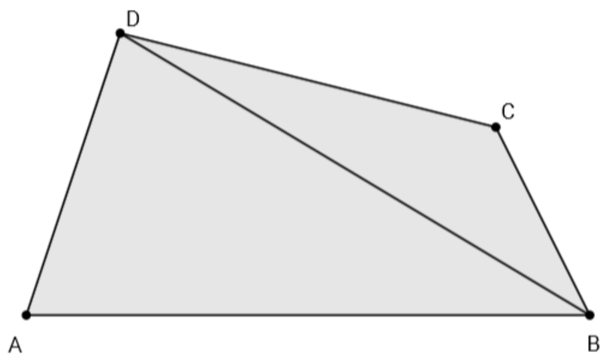
## 3.2 Poljubnemu štirikotniku ploščinsko enak trikotnik

Podobno, kot smo preoblikovali kvadrat, lahko preoblikujemo tudi pravokotnik v ploščinsko enak trikotnik. Razmislek je povsem enak. Kaj pa, če štirikotnik ni pravokotnik, kaj, če je štirikotnik trapezoid? Potem preoblikovanje na zgoraj opisan način ni mogoče.

Poljubni štirikotnik diagonala razdeli na dva trikotnika. Ta trikotnika v splošnem nista skladna, zagotovo imata sicer eno skupno, torej tudi skladno, stranico. Vendar nam vse navedeno še ne pomaga rešiti problema.

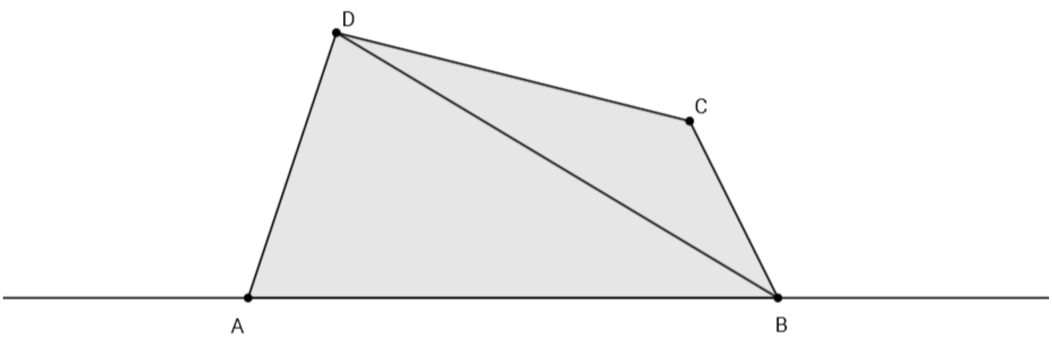
Poglejmo si, kako preoblikujemo poljubni štirikotnik v ploščinsko enak trikotnik.

Dan je trapezoid $ABCD$. Vrišimo mu diagonalo ($BD$).



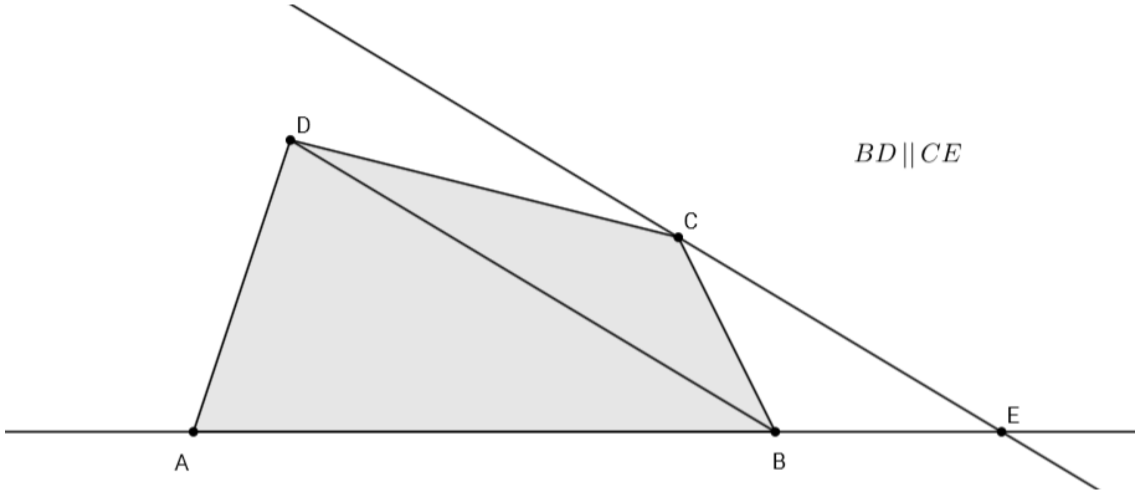

*Slika 28: Trapezoid ABCD z vrisano diagonalo BD (vir: avtor)*

Spomnimo se, da če se trikotnika ujemata v eni stranici in višini na to stranico, imata zagotovo enaki ploščini. To dejstvo bomo s pridom uporabili. Narišimo nosilko stranice $AB$.



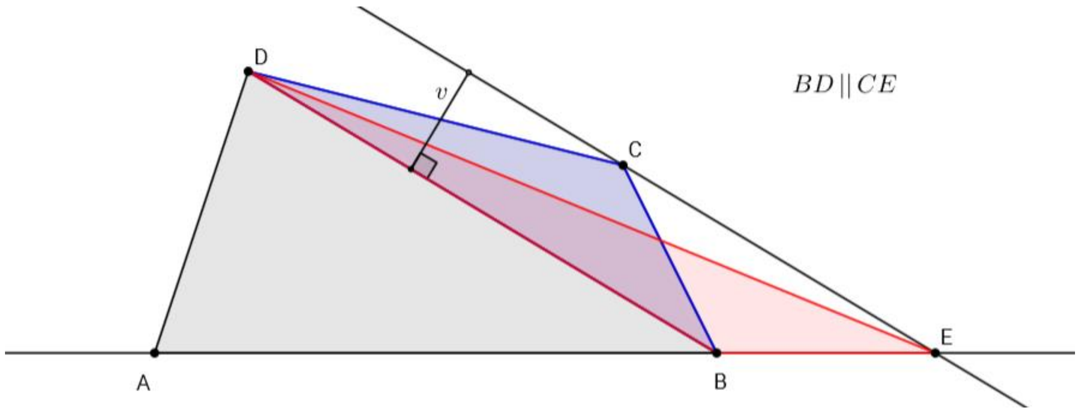

*Slika 29: Trapezoid ABCD z vrisano diagonalo BD in narisano nosilko stranice AB (vir: avtor)*

Če želimo ohraniti ploščino štirikotnika, ali lahko trikotnik $BCD$ preoblikujemo, ne da bi mu spremenili ploščino? Narišimo vzporednico z diagonalo $BD$ skozi oglišče $C$. Ploščina trikotnika $BCD$ se ne bo spremenila, ne glede na to, kje na narisani vzporednici leži točka $C$, saj se višina na stranico $BD$ v tem primeru ne spremeni, stranica $BD$ prav tako ostaja nespremenjena. Presečišče nosilke stranice $AB$ in vzporednice označimo z $E$.



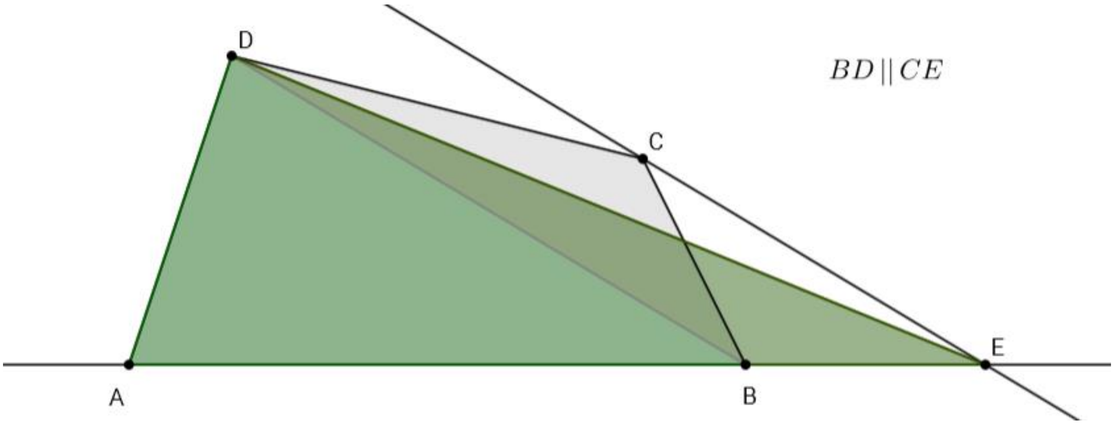

*Slika 30: Trapezoid ABCD z diagonalo BD, nosilko stranice AB, vzporednico k diagonali BD skozi C in presečiščem te vzporednice in nosilke stranice AB (vir: avtor)*

Trikotnika $BCD$ in $BED$ imata enaki ploščini, saj se ujemata v stranici $BD$ in višini na to stranico.




*Slika 31: Ploščinsko enaka trikotnika BCD in BED (vir: avtor)*

Takšno preoblikovanje nam že ponuja rešitev. Trikotnik $ABD$ je ostal povsem nespremenjen, trikotnik $BCD$ pa smo preoblikovali v ploščinsko enak trikotnik $BED$. Zdaj trikotnika $ABD$ in $BED$ sestavljata trikotnik $AED$, ki je ploščinsko enak prvotnemu štirikotniku $ABCD$.

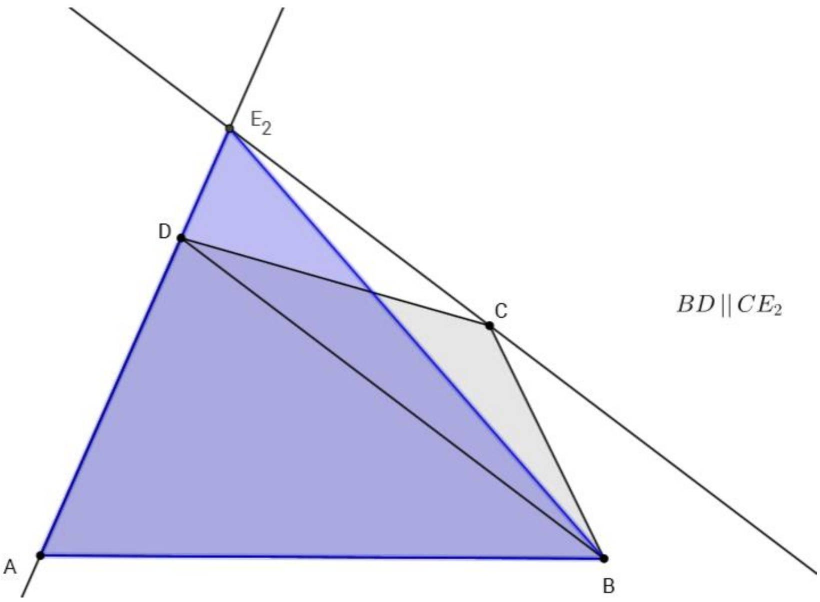



*Slika 32: Štirikotniku ABCD ploščinsko enak trikotnik AED (vir: avtor)*

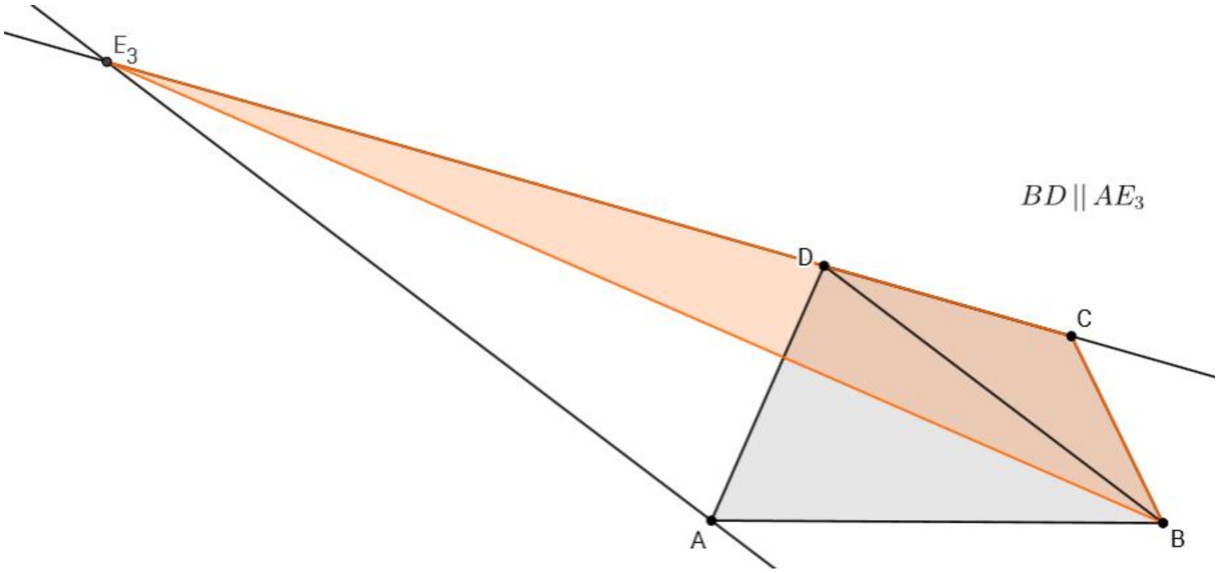
Na opisan način lahko preoblikujemo poljubni štirikotnik v ploščinsko enak trikotnik.

Zapisano in razloženo smo preverili tudi s pomočjo programa za dinamično geometrijo GeoGebra, v katerem smo narisali konstrukcijo po zgoraj opisanih korakih. V prikaz smo dodali še izpise ploščin in nato z metodo poskušanja spreminjali izhodiščni štirikotnik. Ploščini štirikotnika $ABCD$ in trikotnika $AED$ sta se pri tem, kot pričakovano, med seboj vedno ujemali.

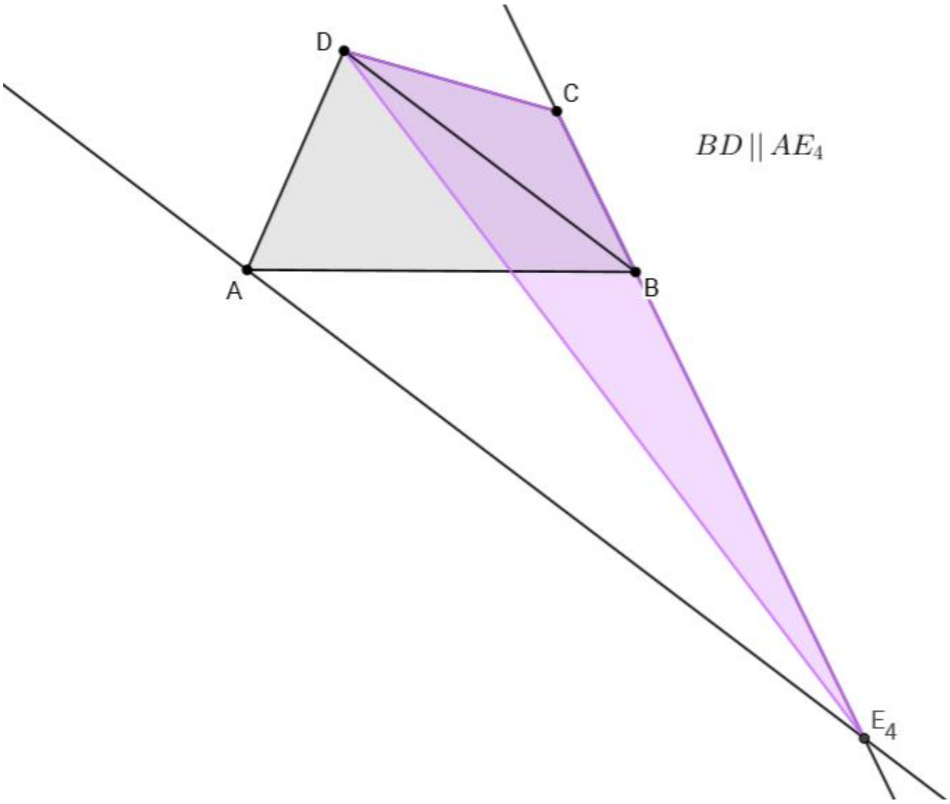
Rešitev našega problema ni enolična, pač pa nas enak postopek pripelje do osmih različnih, ploščinsko enakih trikotnikov. Prva rešitev je prikazana zgoraj (slika 32), vse ostale pa na slikah spodaj.



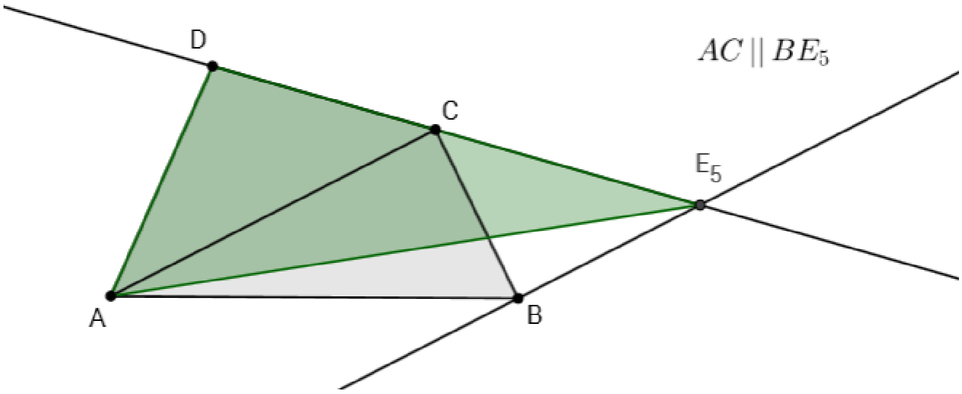

*Slika 33: Štirikotniku ABCD ploščinsko enak trikotnik $ABE_2$ (vir: avtor)*



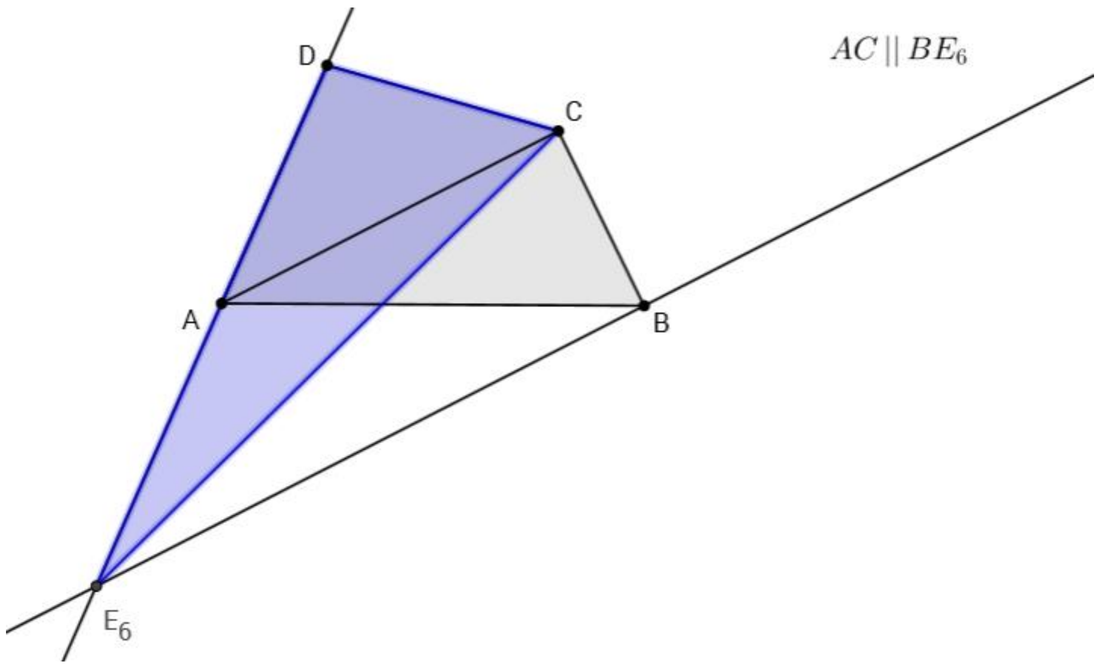

*Slika 34: Štirikotniku ABCD ploščinsko enak trikotnik $BCE_3$ (vir: avtor)*



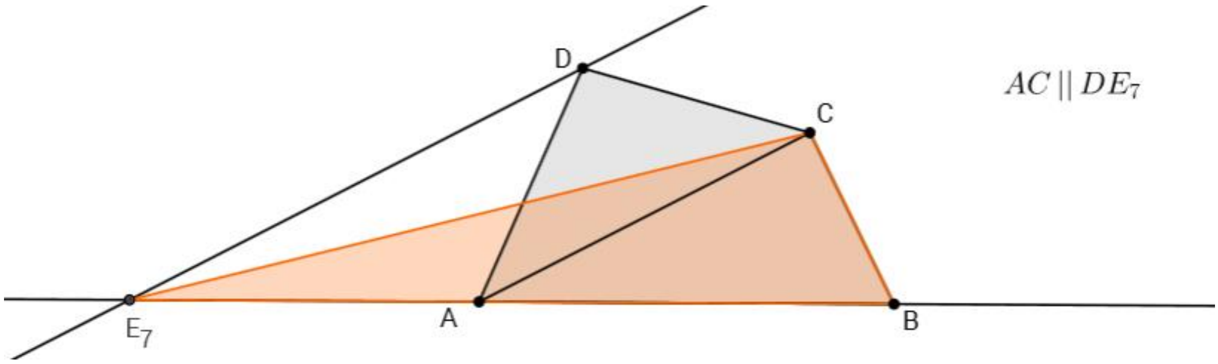

*Slika 35: Štirikotniku ABCD ploščinsko enak trikotnik CDE₄ (vir: avtor)*



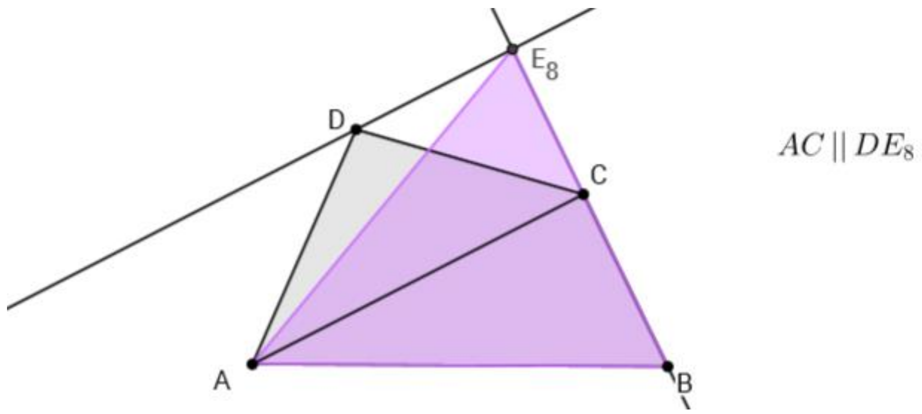

*Slika 36: Štirikotniku ABCD ploščinsko enak trikotnik DAE₅ (vir: avtor)*




*Slika 37: Štirikotniku ABCD ploščinsko enak trikotnik CDE$_6$ (vir: avtor)*




*Slika 38: Štirikotniku ABCD ploščinsko enak trikotnik BCE$_7$ (vir: avtor)*

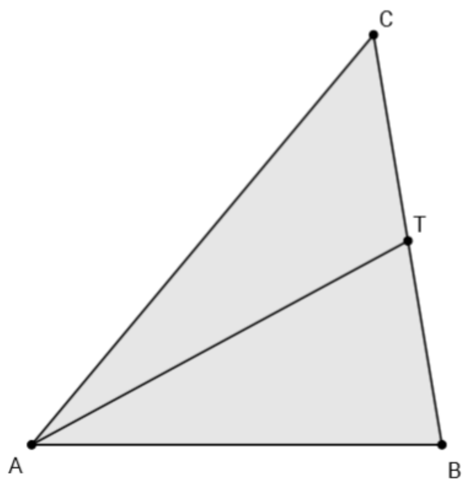



*Slika 39: Štirikotniku ABCD ploščinsko enak trikotnik ABE$_8$ (vir: avtor)*

### 3.3 Poljubnemu trikotniku ploščinsko enak štirikotnik

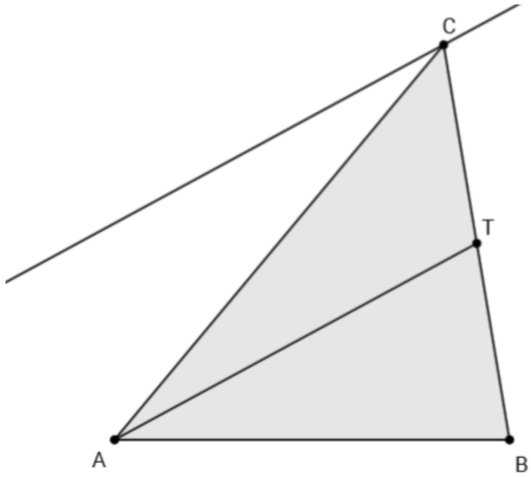
Pri preoblikovanju poljubnega trikotnika v ploščinsko enak štirikotnik smo hitro ugotovili, da bo rešitev v tem primeru zagotovo več. Zakaj? Poglejmo si, kako poljuben trikotnik preoblikujemo v ploščinsko enak štirikotnik. Pri tem si pomagamo z razmislekom o preoblikovanju, ki smo ga opisali v prejšnjem poglavju.

Naj bo dan trikotnik $ABC$. Na eni od stranic si izberemo točko $T$ in jo povežemo z nasprotnim ogliščem. Mi smo izbrali točko $T$ na stranici $BC$, tako bosta oglišči našega nastajajočega štirikotnika oglišči $A$ in $B$, tretje oglišče je pravkar izbrana točka $T$.



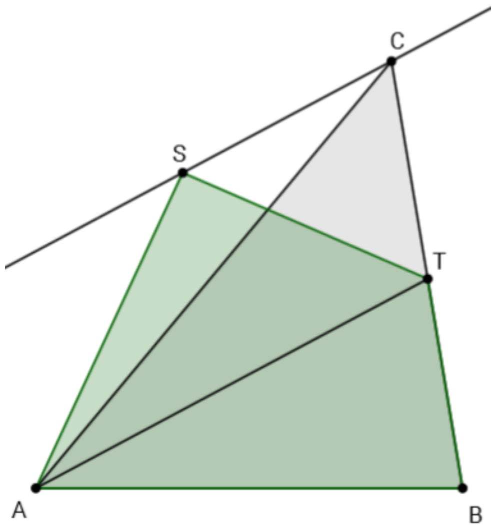

*Slika 40: Trikotnik ABC s poljubno izbrano točko T na stranici BC in daljico, ki točko T povezuje z nasprotnim ogliščem (vir: avtor)*

Nato narišemo vzporednico k daljici $AT$ skozi oglišče $C$.




*Slika 41: Trikotnik ABC z vrisano daljico AT in vzporednico s to daljico skozi oglišče C (vir: avtor)*

Na vrisani vzporednici si izberemo poljubno točko $S$, različno od točke $C$. Točka $S$ prav tako ne sme biti presečišče med narisano vzporednico in nosilko daljice $AB$. Izbrana točka je četrto oglišče štirikotnika $ABTS$, ki je ploščinsko enak trikotniku $ABC$.




*Slika 42: Trikotnik ABC in njemu ploščinsko enak štirikotnik ABTS (vir: avtor)*

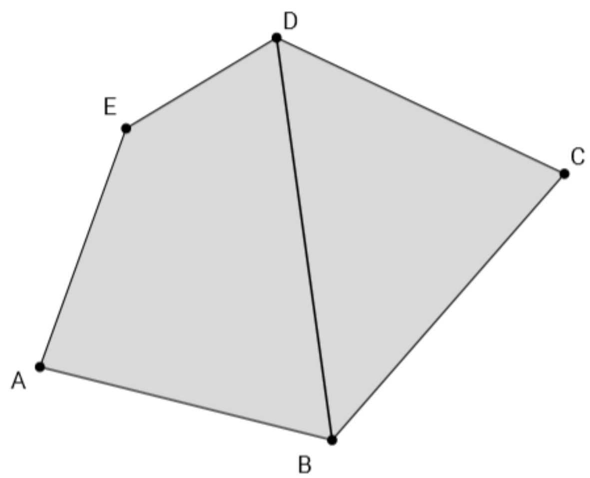
Ker si točko $T$ izberemo kjerkoli na eni od stranic trikotnika, so možnosti za njen izbor neskončne. Podobno je s točko $S$, ki mora ležati na vzporednici k daljici, ki točko $T$ povezuje z nasprotnim ogliščem, le z ogliščem trikotnika, skozi katero gre vzporednica, ne sme sovpadati in ne sme ležati na presečišču vzporednice z nosilko stranice trikotnika (stranice, ki leži nasproti oglišču skozi katerega gre vzporednica). Rešitev je tako neskončno dosti.

Zakaj moramo izločiti možnost, da bi točka $S$ sovpadala s točko $C$ oziroma presečiščem nosilke stranice $AB$ in vzporednice k daljici $AT$ skozi točko $C$? V obeh primerih bi sicer dobili trikotnik. V prvem primeru trikotnik $ABS$, ki je skladen s prvotnim trikotnikom $ABC$, v drugem primeru pa trikotnik $BTS$, ki je sicer ploščinsko enak prvotnemu trikotniku, ni pa z njim skladen.

### 3.4 Poljubnemu petkotniku ploščinsko enak trikotnik

Kaj pa, če je dan poljuben petkotnik, ali bi znali le-tega preoblikovati v ploščinsko enak trikotnik? Seveda, to zdaj ni več težava. Razmislek je precej podoben kot pri preoblikovanju štirikotnika, le da je potrebno zdaj postopek dvakrat ponoviti. Najprej petkotnik preoblikujemo v ploščinsko enak štirikotnik, potem pa po že opisanem postopku še dobljeni štirikotnik v ploščinsko enak trikotnik.

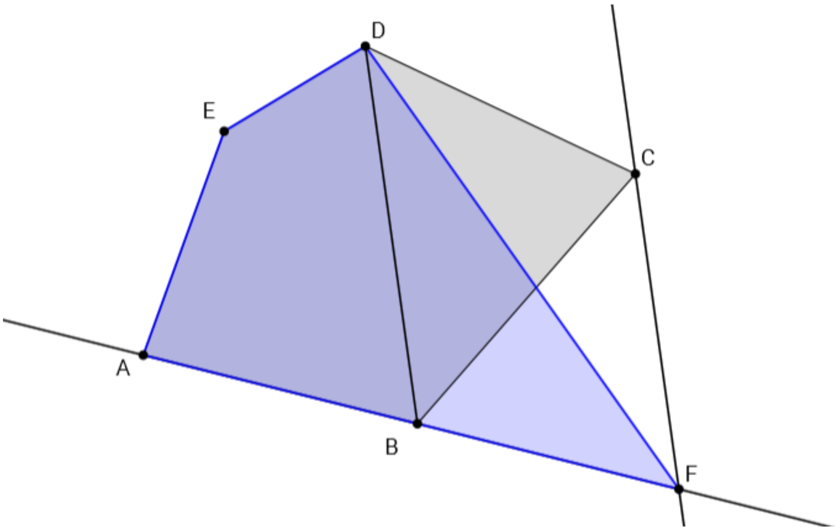
Naj bo dan poljuben petkotnik $ABCDE$. Danemu petkotniku vrišemo eno diagonalo[1], mi smo vrisali diagonalo $BD$.




*Slika 43: Petkotnik ABCDE in vrisana diagonala BD (vir: avtor)*

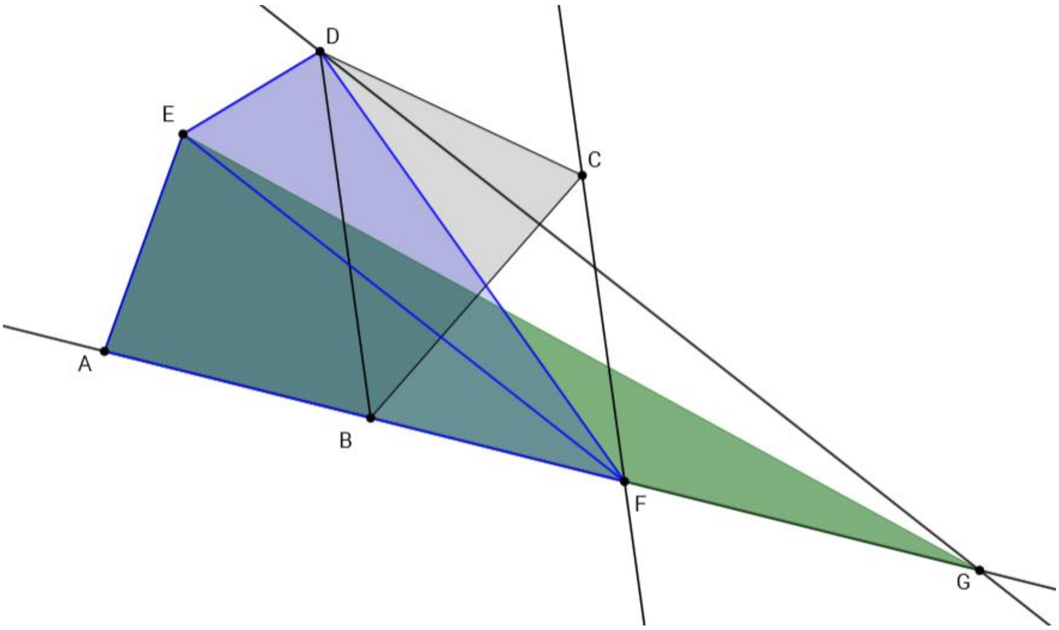
[1] Rešitev je več, ker lahko postopek analogno prenesemo glede na to, katero diagonalo narišemo.

Z vrisom diagonale smo petkotnik razdelili na štirikotnik in trikotnik. Ker vemo, da imata trikotnika s skladnima osnovnicama in višinama na ti osnovnici enaki ploščini, lahko trikotnik $BCD$ preoblikujemo v ploščinsko enak trikotnik $BFD$ in dani petkotnik v ploščinsko enak štirikotnik $AFDE$.




*Slika 44: Petkotnik ABCDE in njemu ploščinsko enak štirikotnik AFDE (vir: avtor)*

Zdaj po že opisanem postopku dobljeni štirikotnik preoblikujemo v ploščinsko enak trikotnik.




*Slika 45: Petkotnik ABCDE, njemu ploščinsko enak štirikotnik AFDE in njemu ploščinsko enak trikotnik AGE (vir: avtor)*

Povsem analogno lahko razmišljamo, če je dan poljuben šestkotnik. V tem primeru najprej šestkotnik preoblikujemo v ploščinsko enak petkotnik (1. korak), tega nato v ploščinsko enak štirikotnik (2. korak) in le-tega še v ploščinsko enak trikotnik (3. korak). Za preobrazbo šestkotnika potrebujemo torej 3 korake.

Podobno lahko razmislimo, da bi za preobrazbo poljubnega sedemkotnika v ploščinsko enak trikotnik potrebovali štiri korake. Za poljubni $n$-kotnik bi potrebovali $(n-3)$ korakov.

# 4 ZAKLJUČEK

Celotno nalogo smo »izpeljali« iz preprostega vprašanja, ki se nam je utrnilo med poukom matematike: »Ali lahko štirikotnik preobrazimo v njemu ploščinsko enak trikotnik?«. To nas je na začetku strašilo, saj se nam je zdelo, da naloga zgolj na enem preprostem vprašanju ne more »stati«. Zato smo še posebej ponosni na končni izdelek, ki dokazuje naš napredek in potrjuje naša novo pridobljena znanja.

Izmed vej matematike, ki smo jih do sedaj spoznali, sta nam računanje oziroma aritmetika in algebra najmanj pri srcu. Tudi zato smo upali, da bomo pri reševanju zastavljenega problema našli pot, ki bo zaobšla računsko delo.

Skozi raziskovalno pot smo ugotovili, da je štirikotnik mogoče preobraziti v ploščinsko enak trikotnik in s tem potrdili našo prvo hipotezo, ki pravi, da je poljuben štirikotnik mogoče preoblikovati v ploščinsko enak trikotnik. To smo naredili povsem geometrijsko. Pri tem smo upoštevali številna, nam že prej znana, dejstva o lastnostih trikotnikov in štirikotnikov ter njihovih ploščin. Še najbolj pomembno za našo rešitev je dejstvo, da imata trikotnika s skladnima osnovnicama in skladnima višinama na ti osnovnici tudi enaki ploščini.

Preden smo začeli resno iskati rešitev zastavljenega problema, smo predvideli, da bo rešitev ena sama. Predvidevali smo, da, če štirikotnik že lahko preobrazimo v ploščinsko enak trikotnik, lahko to storimo na en sam način, ki vrne le eno samo rešitev. To hipotezo smo ovrgli, saj se je izkazalo, da je različnih rešitev kar osem.

Kmalu smo se začeli spraševati, ali bi v »obratnem« postopku lahko preobrazili trikotnik v njemu ploščinsko enak štirikotnik. S premislekom smo prišli do rešitve; še več, prišli smo do neskončno veliko rešitev. Tako smo potrdili hipotezo 3, ki pravi, da lahko tudi poljubni trikotnik preobrazimo v ploščinsko enak štirikotnik.

Seveda nas je kmalu začelo zanimati, kaj bi se zgodilo, če izhodiščni poljubni štirikotnik nadomestimo s poljubnim večkotnikom. Ugotovili smo, da je na podoben način možno preobraziti katerikoli večkotnik v ploščinsko enak trikotnik. Postopek, ki smo ga uporabili pri preobrazbi poljubnega štirikotnika v ploščinsko enak trikotnik, smo morali le večkrat ponoviti.

Tako smo postopoma zmanjševali število oglišč izhodiščnega večkotnika, v vsakem koraku za eno oglišče. Za preobrazbo poljubnega $n$-kotnika potrebujemo $(n-3)$ ponovitev analognega postopka. S tem smo ovrgli našo peto hipotezo, ki pravi, da poljubnega večkotnika ni možno preobraziti v ploščinsko enak trikotnik.

# 5 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Družbeno odgovornost razumemo kot možnost izboljšanja našega okolja ter družbe, v kateri živimo in delujemo. Namen celotnega ustvarjanja raziskovalnih nalog je, po našem mnenju, širjenje naših obzorij, znanja ter sprejemanju vseh odgovornosti, ki jih zahteva potek dela. Z našim raziskovanjem želimo mladino ter tudi odrasle ljudi spodbuditi h globljem razmišljanju o matematiki. Seveda je naš glavni namen raziskovanja širjenje lastnih obzorij. Ni pa zanemarljivo tudi dejstvo, da s prenašanjem znanja na ljudi okoli nas širimo tudi obzorja le-teh. Zgolj učenje z radovednostjo ter željo po znanju se sčasoma spremni v raziskovanje, ki bogati naše znanje z novimi dognanji, do katerih pri rednem pouku običajno ne pridemo.

Z raziskovalno nalogo smo želeli naše novo pridobljeno znanje deliti tudi z našimi sovrstniki, zato smo jim raziskovalno nalogo tudi predstavili. S tem smo dosegli razpravljanje o matematiki tudi med našimi sošolci. Seveda pa ne smemo pozabiti tudi na našo osebno rast, ki smo jo skozi raziskovanje obogatili z novimi spoznanji o odgovornosti, organiziranosti ter strasti do raziskovanja in odkrivanja novih stvari.

# 6 VIRI

Ildiko M. *Matematični priročnik.* Maribor: Merta & CO, 1996.

Vorderman C. in Jeffrey A. *Matematika: po korakih do odličnega znanja*. Ljubljana: Mladinska knjiga, 2014.

Pavlič G. *Slikovni pojmovnik. Matematika.* Ljubljana: Tehniška založba Slovenije, 1998.

Berk J., Draksler J., Robič M. *Skrivnosti števil in oblik 7*. Ljubljana: Rokus, 2003.

## 6.1 Spletni viri

Piramide v Egiptu (slika 1) - *https://sl.wikipedia.org/wiki/Piramida*

Tales (slika 2) - *https://sl.wikipedia.org/wiki/Tales*

Evklid (slika 3) - *https://sl.wikipedia.org/wiki/Evklid*

Arhimed (slika 4) - *https://velikimatematicari.wordpress.com/2014/03/08/arhimed/*

David Hilbert (slika 5) - *https://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert*