

**»Mladi za napredek Maribora 2017«**

**34. srečanje**

**JAJČASTE KRIVULJE**

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: MIHA ŠALAMUN, NEŽA DIVJAK  
Mentor: RENATA HVALA, BOJAN HVALA  
Šola: PRVA GIMNAZIJA MARIBOR

**Maribor, 2017**

**»Mladi za napredek Maribora 2017«**

**34. srečanje**

**JAJČASTE KRIVULJE**

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

**Maribor, 2017**

## KAZALO VSEBINE

Povzetek .....	1
Zahvala .....	2
1. Uvod .....	3
2. Najosnovnejše o krivuljah .....	4
3. Jajčaste krivulje s krožnimi loki.....	6
4. Parametri, ki opisujejo obliko jajca .....	12
5. Jajčaste krivulje z inverzijo .....	19
5.1. O inverziji.....	19
5.2. Jajce, narisano z uporabo inverzije.....	22
5.3. Radija $R_M$ in $R_m$ – polmera pritisnjenih krogov v skrajnih točkah jajca .....	24
5.4. Dolžina $L$ in debelina $B$ .....	27
5.5. Izračun parametrov $A$ , $T$ , $P$ .....	30
5.6. Analiza parametrov $A$ , $T$ in $P$ glede na vhodne podatke .....	34
6. Zaključek.....	40
Literatura .....	41

## KAZALO SLIK

Slika 1: Jajce s krožnimi loki .....	7
Slika 2: Kokošje jajce.....	13
Slika 3: Kokošje jajce, dobljeno z inverzijo.....	14
Slika 4: Kokošje jajce, dobljeno s krožnimi loki .....	14
Slika 5: Povprečno jajce, dobljeno z inverzijo .....	15
Slika 6: Zelo asimetrično in zašiljeno jajce, dobljeno z inverzijo.....	16
Slika 7: Zelo malo podolgovato jajce, dobljeno z inverzijo.....	16
Slika 8: Primeri jajc z ekstremnimi vrednostmi .....	17
Slika 9: Jajca z različnimi lastnostmi .....	18
Slika 10: Slika točke z inverzijo.....	20
Slika 11: Inverzija: krožnice se preslikajo v krožnice ali premice.....	21
Slika 12: Inverzija in krajevni vektorji.....	22
Slika 13: Inverzija: elipsa in jajce .....	22
Slika 14: Jajce s tangentama iz izhodišča in označenima L in B .....	28
Slika 15: Grafi A, T, P za kokošje jajce .....	35
Slika 16: Grafi A, T, P za povprečno jajce.....	36
Slika 17: Grafi A, T, P s sledmi .....	36
Slika 18: Grafi A, T, P za $T \geq 0$ .....	37
Slika 19: Grafi A, T, P za maksimalne in minimalne vrednosti.....	38

## POVZETEK

V literaturi obstaja več metod, kako narisati krivuljo, ki spominja na obliko ptičjega jajca. Pri večini teh metod gre za spretno sestavljene običajne krožne loke. Posebej zanimiva pa je povsem drugačna metoda, pri kateri jajčaste krivulje dobimo kot slike elips z v matematiki dobro poznano preslikavo, ki se imenuje *inverzija*. Pri tem glavne osi teh elips ležijo na premici skozi središče krožnice inverzije.

V raziskovalni nalogi obravnavamo na ta način dobljene jajčaste krivulje v odvisnosti od začetnih parametrov: abscise središča in obeh polosi elipse. Različne oblike ptičjih jajc bomo poskušali opisati s karakterističnimi količinami, te količine pa potem realizirati z izbiro ustreznih začetnih parametrov.

## ZAHVALA

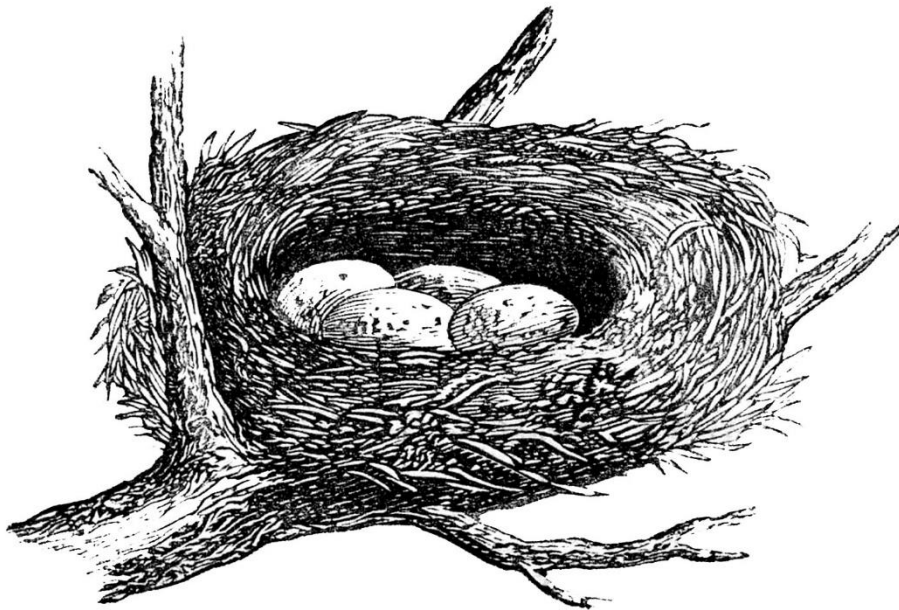
*Zahvaljujema se svojim mentorjema, ki sta naju zalagala ne le z znanjem, ampak tudi s spodbudami. Z njuno pomočjo sva poglobila znanje matematike in pridobila osnove, ki nama bodo pomagale pri delu na fakulteti. Zunanjemu mentorju se še posebej zahvaljujema za čas, ki ga je namenil srečevanju z nama. Posredoval nama je potrebne osnove, na katerih sva gradila najino raziskovalno nalogo.*

## 1. UVOD

Obliki jajca običajno ne posvečamo večje pozornosti. Jajca plazilcev, ribje ikre, jajčeca insektov in polžev ter jajca ptic so ne le po strukturi, sestavi in velikosti, temveč tudi po obliki precej različne, a zanimive strukture. Na prvi pogled oblika jajca ni preveč zahtevna, je pa evolucijsko uspešna, saj se je razvila in obdržala prav taka, kot je.

Ena od razlag za takšno obliko je, da preprečuje, da bi se jajca odvalila iz gnezda. Če bi bila popolnoma okrogla, bi se odkotalila, kot se odkotali žoga. Zašiljenost jajca na eni strani pa povzroči, da se jajce kotali v krogu in na ta način prepreči, da bi zapustilo gnezdo. Zanimivo je dejstvo, da so jajca ptic, ki gnezdijo visoko, oblikovana tako, da se vrtijo v krogih z veliko manjšim polmerom, kot so jajca ptic, ki gnezdijo pri tleh. Druga razlaga oblike jajca je, da ta predstavlja idealno obliko za valjenje.

Čeprav sva dejala, da oblika jajca na prvi pogled ni preveč zahtevna, jo je vseeno težko opisati. Prav to je tudi namen najine raziskovalne naloge – analizirati količine, ki opisujejo obliko določenega ptičjega jajca in potem na podlagi teh količin obliko tega jajca tudi tako ali drugače narisati.



## 2. NAJOSNOVNEJŠE O KRIVULJAH

To poglavje je namenjeno hitri razlagi osnovnih podatkov o parametrizaciji krivulj in pritisnjenih krogih, saj to potrebujemo v nadaljevanju.

Obstaja več načinov kako podati neko krivuljo. Podamo jo lahko z enačbo, tako lažje razberemo, kakšno krivuljo imamo. Podamo pa jo lahko tudi s parametrizacijo. Ta način je koristnejši za računanje s krivuljami.

Krivuljo parametriziramo tako, da nastavimo za koordinati  $x$  in  $y$  funkciji tretje spremenljivke, ki se imenuje parameter in ga pogosto označimo s  $t$ . Parameter  $t$  običajno teče po nekem intervalu  $[a, b]$ . Pogosto to napišemo kot vektor:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}.$$

Krivulja je torej slika intervala  $[a, b]$  s preslikavo  $\mathbf{r}$ . Če želimo parametrizirati krivuljo, ki je graf neke funkcije  $f$ , lahko enostavno definiramo  $x(t)=t, y=f(t)$ . To je le lep primer, v splošnem pa so parametrizacije krivulj zelo različne. Običajno je parametriziranje zahteven postopek, saj ni splošnega načina. Pri obratnem procesu pa le izrazimo  $t$  iz ene izmed enačb in ga vstavimo v drugo.

Oglejmo si nekaj parametrizacij krivulj. Začnimo z enotsko krožnico  $x^2 + y^2 = 1$ . Določimo  $x(\varphi) = \cos \varphi$  in  $y(\varphi) = \sin \varphi$ . Iz tega sledi  $(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1, \forall \varphi \in \mathbb{R}$ . Točke  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  torej ležijo na enotski krožnici. Ko  $\varphi$  preteče interval  $[0, 2\pi]$ , točke pretečejo celotno krožnico.

V nadaljevanju bomo parametrizirali elipso v osnovni legi z enačbo  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Določimo  $x(\varphi) = a \cos \varphi$  in  $y(\varphi) = b \sin \varphi$ . Iz tega sledi  $\frac{a^2 (\cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{b^2 (\sin \varphi)^2}{b^2} = 1$  in  $(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1 \forall \varphi \in \mathbb{R}$ . Velja podobno kot zgoraj: točke  $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$  ležijo na elipsi. Ko  $\varphi$  preteče interval  $[0, 2\pi]$ , točke pretečejo celotno elipso.

Elipso prestavimo v desno za  $t$ :  $\frac{(x-t)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  in jo parametriziramo.

Določimo  $x(\varphi) = a \cos \varphi + t$  in  $y(\varphi) = b \sin \varphi$ . Iz tega sledi  $\frac{(a \cos \varphi + t - t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin \varphi)^2}{b^2} = 1$

in  $\frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 (\sin \varphi)^2}{b^2} = 1$  ter  $(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1 \forall \varphi \in \mathbb{R}$ .



Osnovno o pritisnjenih krogih:

*Pritisnjeni krog* je krog, ki se najboljše ujema s krivuljo v okolici neke točke na krivulji. Obratna vrednost polmera pritisnjenega kroga je *ukrivljenost krivulje* in se označi s  $\kappa$ . Opazovali bomo polmere pritisnjenih krogov v skrajnih točkah jajca.

Polmeri pritisnjenih krogov se računajo po enačbi:

$$R = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}$$

V naslednjem poglavju bomo potrebovali enačbi za polmera pritisnjenih krogov v levem in desnem temenu elipse, torej pri vrednostih parametra  $\varphi = 0$  in  $\varphi = \pi$  radianov.

Opazovali bomo kar elipse v osnovni legi, saj polmera nista odvisna od lege elipse v koordinatnem sistemu. Računajmo:

$$x(\varphi) = a \cos \varphi \qquad y(\varphi) = b \sin \varphi$$

$$x' = -a \sin \varphi \quad x'' = -a \cos \varphi \quad y' = b \cos \varphi \quad y'' = -b \sin \varphi$$

$$x'(0) = 0 \quad x''(0) = -a \quad y'(0) = b \quad y''(0) = 0$$

$$R(0) = \frac{(b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}$$

$$x'(\pi) = 0 \quad x''(\pi) = a \quad y'(\pi) = -b \quad y''(\pi) = 0$$

$$R(\pi) = \frac{((-b)^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}$$

$$R(\pi) = R(0)$$

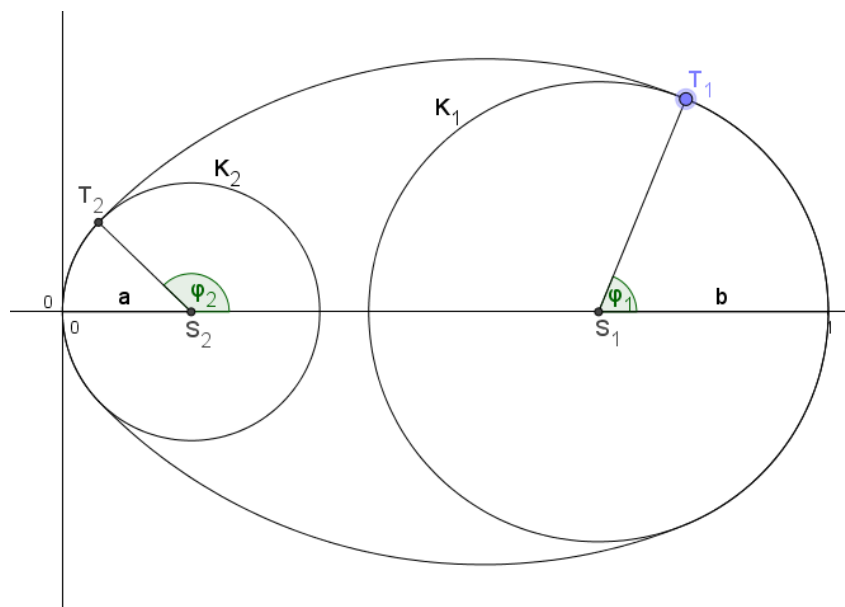
V kasnejših formulah se bosta pojavljala podatka  $L$  in  $B$ , ki predstavljata celotno dolžino ( $L$ ) in debelino ( $B$ ) elipse. Velja torej  $a = \frac{L}{2}$   $b = \frac{B}{2}$   $R = \frac{b^2}{a} = \frac{B^2}{2L}$ .

### 3. JAJČASTE KRIVULJE S KROŽNIMI LOKI

Želimo narisati krivuljo jajčaste oblike. To lahko poskusimo izvesti s štirimi krožnimi loki. Dva loka predstavljata sprednji in zadnji lok jajca, poskusili pa ju bomo čimbolj gladko povezati z dvema dodatnima simetričnima krožnima lokoma zgoraj in spodaj.

Denimo, da je jajce dolgo 1, da je njegova os simetrije abscisna os in da sta krajišči jajca točki  $(0,0)$  in  $(1,0)$ . Denimo, da sta radija sprednjega in zadnjega kroga enaka  $a$  in  $b$  (glej sliko 1). Torej sta uvodna dva loka dela krožnic z enačbama  $K_1: (x - 1 + b)^2 + y^2 = b^2$  in  $K_2: (x - a)^2 + y^2 = a^2$ . Lok krožnice  $K_1$  določimo z izbrano točko  $T_1$  oz. s kotom  $\varphi_1$ . Zanima nas, kako izbrati točko  $T_2$  oz. kot  $\varphi_2$ , ki bosta določila lok na drugi krožnici, tako da bo nastala dva loka možno čim lepše povezati v krivuljo jajčaste oblike z dvema simetričnima krožnima lokoma.

Tudi zgornji, tretji lok, bo del neke krožnice. Stik z obstoječima krožnicama mora biti čim bolj gladek, kar pomeni, da mora središče te krožnice ležati na presečišču poltrakov  $T_1S_1$  in  $T_2S_2$ . Presečišče poltrakov  $T_1S_1$  in  $T_2S_2$  mora biti enako oddaljeno od točk  $T_1$  in  $T_2$ , saj je tako to presečišče določeno kot središče krožnice loka, na katerem bosta ležali točki  $T_1$  in  $T_2$ . Zaradi tega želimo pri dani točki  $T_1$  (kotu  $\varphi_1$ ) določiti točko  $T_2$  (kot  $\varphi_2$ ), da bo torej presečišče enako oddaljeno od  $T_1$  in  $T_2$ , torej bo ležalo na simetrali daljice  $T_1T_2$ . Ugotovili bomo, da je pri danem kotu  $\varphi_1$  kot  $\varphi_2$  vedno možno najti. Izpeljana bo enačba za izračun tega kota. Na podlagi tega nam bo omogočeno narisati ustrezno jajčasto krivuljo pri izbranih parametrih  $a$ ,  $b$  in  $\varphi_1$ .



Slika 1: Jajce s krožnimi loki

Določimo središči in parametrizirajmo krožnici  $K_1$  in  $K_2$ :

$$S_1(1 - b, 0)$$

$$x_1 = b \cos \varphi_1 + 1 - b \quad y_1 = b \sin \varphi_1$$

$$S_2(a, 0)$$

$$x_2 = a \cos \varphi_2 + a \quad y_2 = a \sin \varphi_2$$

Krožnica  $K_1$  ima enačbo  $(x_1 - 1 + b)^2 + y_1^2 = b^2$ . Da bomo lahko izrazili  $x_1^2 + y_1^2$ , poračunamo levo stran. Dobimo  $x_1^2 + 2(b - 1)x_1 + 1 - 2b + b^2 + y_1^2 = b^2$ . Rezultat je:

$$x_1^2 + y_1^2 = 2b - 2x_1(b - 1) - 1.$$

Krožnica  $K_2$  ima enačbo  $(x_2 - a)^2 + y_2^2 = a^2$ . Ponovimo zgornji postopek:  $x_2^2 - 2ax + a^2 + y_2^2 = a^2$ . Rezultat je:

$$x_2^2 + y_2^2 = 2ax_2.$$

Izračunati je potrebno koordinati presečišča poltrakov  $T_1S_1$  in  $T_2S_2$ . Zaradi tega nas zanimajo enačbe nosilk poltrakov.

Enačba nosilke poltraka  $T_1S_1$  je:  $y = \tan \varphi_1 (x - 1 + b)$ .

Enačbe nosilke poltraka  $T_2S_2$  je:  $y = \tan \varphi_2 (x - a)$ .

Enačimo:  $\tan \varphi_1 (x - 1 + b) = \tan \varphi_2 (x - a)$ .

Preoblikujemo:  $x \tan \varphi_1 - x \tan \varphi_2 = (1 - b) \tan \varphi_1 - a \tan \varphi_2$  in izrazimo:

$$x = \frac{(1 - b) \tan \varphi_1 - a \tan \varphi_2}{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2}.$$

Zgoraj in spodaj pomnožimo s  $\sin \varphi_1 \sin \varphi_2$ . Dobimo:

$$x = \frac{(1 - b) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - a \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}.$$

V enačbo za nosilko poltraka  $T_2S_2$  vstavimo pravkar dobljen  $x$ . Dobimo:

$$y = \tan \varphi_2 \left( \frac{(1 - b) \tan \varphi_1 - a \tan \varphi_2}{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2} - a \right).$$

Damo na skupni imenovalec,

$$y = \frac{\tan \varphi_2}{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2} \left( (1 - b) \tan \varphi_1 - a \tan \varphi_2 - a \tan \varphi_1 + a \tan \varphi_2 \right).$$

Uredimo:  $y = \frac{\tan \varphi_2}{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2} \tan \varphi_1 (1 - b - a)$ . Ker se izraz  $(1 - b - a)$  velikokrat ponavlja,

ga označimo z novo spremenljivko  $k$ . Torej  $y = \frac{k \tan \varphi_2 \tan \varphi_1}{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2}$ . Spet zgoraj in spodaj množimo

s  $\sin \varphi_1 \sin \varphi_2$ :

$$y = \frac{k \sin \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}.$$

Presečišče imamo. Zdaj je potrebno izračunati še enačbo simetrale daljice  $T_1T_2$ .

Razdalja od poljubne točke na simetrali do točk  $T_1$  in  $T_2$  je vedno enaka. Nastavimo enačbo  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$ , računamo:  $x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$ . Na eno stran enačbe damo vsote že prej izračunanih kvadratov, na drugo stran pa vse ostalo  $2x(x_1 - x_2) + 2y(y_1 - y_2) = x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 + y_1^2)$ .

Vstavimo podatke in dobimo:  $2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) = 2ax_2 - 2b + 2x_1(b - 1) + 1$ .

Vstavimo prej izračunane  $x$  in  $y$  ter  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ . Dobimo:

$$\frac{(1-b) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - a \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1} (a \cos \varphi_2 + a - b \cos \varphi_1 - 1 + b) +$$

$$\frac{k \sin \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1} (a \sin \varphi_2 - b \sin \varphi_1) = a(a \cos \varphi_2 + a) - b + (b \cos \varphi_1 + 1 - b)(b - 1) + \frac{1}{2}.$$

Množimo s  $\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1$  in dobimo:

$$\begin{aligned} & ((1-b) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - a \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)(a \cos \varphi_2 + (-b \cos \varphi_1 - k)) \\ & + k \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 (a \sin \varphi_2 - b \sin \varphi_1) \\ & = (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \left( a^2 \cos \varphi_2 \right. \\ & \left. + \left( a^2 + b - b^2 - \frac{1}{2} + b^2 \cos \varphi_1 - b \cos \varphi_1 \right) \right). \end{aligned}$$

Množimo. Zaradi večje preglednosti sta v nadaljevanju  $\sin \varphi_2$  in  $\cos \varphi_2$  zapisana poudarjeno, saj sta obravnavana kot neznanke, vse ostalo pa kot konstanta.

$$\begin{aligned} & a(1-b) \sin \varphi_1 \mathbf{cos}^2 \varphi_2 - (b \cos \varphi_1 + k)(1-b) \sin \varphi_1 \mathbf{cos} \varphi_2 - a^2 \cos \varphi_1 \mathbf{sin} \varphi_2 \mathbf{cos} \varphi_2 \\ & + (b \cos \varphi_1 + k)a \cos \varphi_1 \mathbf{sin} \varphi_2 + ak \sin \varphi_1 \mathbf{sin}^2 \varphi_2 - bk \sin^2 \varphi_1 \mathbf{sin} \varphi_2 \\ & = a^2 \sin \varphi_1 \mathbf{cos}^2 \varphi_2 \\ & + \sin \varphi_1 \left( a^2 + b - b^2 - \frac{1}{2} + b^2 \cos \varphi_1 - b \cos \varphi_1 \right) \mathbf{cos} \varphi_2 \\ & - a^2 \cos \varphi_1 \mathbf{sin} \varphi_2 \mathbf{cos} \varphi_2 \\ & - \cos \varphi_1 \left( a^2 + b - b^2 - \frac{1}{2} + b^2 \cos \varphi_1 - b \cos \varphi_1 \right) \mathbf{sin} \varphi_2. \end{aligned}$$

Izpostavimo neznanke:

$$\begin{aligned} & (a(1-b) \sin \varphi_1 - a^2 \sin \varphi_1) \mathbf{cos}^2 \varphi_2 + ak \sin \varphi_1 \mathbf{sin}^2 \varphi_2 \\ & + ((b \cos \varphi_1 + k)(b - 1) \sin \varphi_1 \\ & - \sin \varphi_1 \left( a^2 + b - b^2 - \frac{1}{2} + b^2 \cos \varphi_1 - b \cos \varphi_1 \right)) \mathbf{cos} \varphi_2 \\ & + ((b \cos \varphi_1 + k)a \cos \varphi_1 - bk(1 - \cos^2 \varphi_1) \\ & + \cos \varphi_1 \left( a^2 + b - b^2 - \frac{1}{2} + b^2 \cos \varphi_1 - b \cos \varphi_1 \right)) \mathbf{sin} \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
 & (a(1 - b - a) \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + ak \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 + (b^2 \cos \varphi_1 + kb - b \cos \varphi_1 - k - a^2 \\
 & \quad - b + b^2 + \frac{1}{2} - b^2 \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_1) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
 & \quad + \left( \cos \varphi_1 \left( ab \cos \varphi_1 + ak + bk \cos \varphi_1 + a^2 + b - b^2 - \frac{1}{2} + b^2 \cos \varphi_1 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - b \cos \varphi_1 \right) - bk \right) \sin \varphi_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Vse damo na eno stran in izpostavimo neznanke:

$$\begin{aligned}
 & ak \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + ak \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \\
 & \quad + \left( b - b^2 - ab - 1 + b + a - a^2 - b + b^2 + \frac{1}{2} \right) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
 & \quad + (\cos \varphi_1 (ab \cos \varphi_1 + a - a^2 - ab + b \cos \varphi_1 - b^2 \cos \varphi_1 - ab \cos \varphi_1 \\
 & \quad + a^2 + b - b^2 - \frac{1}{2} + b^2 \cos \varphi_1 - b \cos \varphi_1) - bk) \sin \varphi_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Računamo in poenostavimo:

$$ak \sin \varphi_1 + \left( a - ab - a^2 + b - \frac{1}{2} \right) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + (\cos \varphi_1 (b - ab - b^2 + a - \frac{1}{2}) - bk) \sin \varphi_2 = 0$$

$$ak \sin \varphi_1 + \left( ak + b - \frac{1}{2} \right) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \left( (bk + a - \frac{1}{2}) \cos \varphi_1 - bk \right) \sin \varphi_2 = 0.$$

Uvedemo nove spremenljivke za izraze poleg neznank:

$$A = \left( ak + b - \frac{1}{2} \right) \sin \varphi_1 \quad B = \left( bk + a - \frac{1}{2} \right) \cos \varphi_1 - bk \quad C = -ak \sin \varphi_1.$$

Dobimo trigonometrično enačbo  $A \cos \varphi_2 + B \sin \varphi_2 = C$ . Zapišimo  $A \cos \varphi_2 = C - B \sin \varphi_2$  in kvadriramo  $A^2 (1 - \sin^2 \varphi_2) = C^2 - 2CB \sin \varphi_2 + B^2 \sin^2 \varphi_2$ . Vse člene damo na eno stran enačbe, dobimo kvadratno enačbo:

$$(A^2 + B^2) \sin^2 \varphi_2 - 2CB \sin \varphi_2 + C^2 - A^2 = 0.$$

Izračunamo diskriminanto:

$$D = 4C^2B^2 + 4A^4 + 4A^2B^2 - 4A^2C^2 - 4C^2B^2 = 4A^2(A^2 + B^2 - C^2)$$

in rešimo kvadratno enačbo:

$$\sin \varphi_2 = \frac{2CB \pm 2\sqrt{A^2(A^2 + B^2 - C^2)}}{2(A^2 + B^2)}.$$

Izkaže se, da je pred korenem potrebno vzeti predznak +. Rešitev s predznakom – smo dobili dodatno, ker smo v uvodu osnovno trigonometrijsko enačbo kvadrirali.

$$\sin \varphi_2 = \frac{CB + \sqrt{A^2(A^2 + B^2 - C^2)}}{(A^2 + B^2)} = M.$$

Od tod sledi

$\varphi_2 = \arcsin(M)$  ali  $\varphi_2 = \pi - \arcsin(M)$ . Izkaže se, da moramo pri ostrem kotu  $\varphi_1$  vzeti topi kot  $\varphi_2$ .

Če v GeoGebri pri izbranem kotu  $\varphi_1$  izračunamo  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in kot  $\varphi_2$  na opisani način, dobimo točko  $T_2$  z željeno lastnostjo: poltraka  $T_2S_2$  in  $T_1S_1$  se sekata na simetrali daljice  $T_1T_2$ . To presečišče je tako središče tretjega krožnega loka. Četrti krožni lok narišemo simetrično glede na os  $x$ .

#### 4. PARAMETRI, KI OPISUJEJO OBLIKO JAJCA

Jajca v naravi so raznolikih oblik, glavne poteze teh oblik pa lahko opišemo z različnimi števili. Mi jih bomo opisovali z *asimetričnostjo* ( $A$ ), *podolgovatostjo* ( $P$ ) in *topostjo* ( $T$ ). To so tri števila, ki so odvisna dolžine ( $L$ ) in debeline ( $B$ ) jajca ter od polmerov  $R_m$  in  $R_M$  pritisnjenih krogov v obeh krajiščih jajca. Definicije, ki jih bomo spoznali v nadaljevanju, sva povzela po članku [1].

Podolgovatost je razmerje med dolžino in debelino jajca:

$$P = \frac{L}{B}.$$

Na podlagi množice meritev so orintologi ugotovili, da se te vrednosti običajno gibljejo med 1,19 in 1,64, s povprečjem pri 1,39.

Asimetričnost je parameter, ki opisuje razliko med obliko jajca v obeh krajiščih. Pri tem bo gotovo ključno vlogo igrala razlika ( $R_M - R_m$ ). Vendar pa je pri tem potrebno upoštevati tudi velikost jajca, torej količini  $L$  in  $B$ . To naredimo tako, da razliko ( $R_M - R_m$ ) primerjamo z dvakratnim radijem pritisnjenega kroga enako velike elipse. Ob koncu 2. poglavja smo izračunali, da je ta enak  $2R = \frac{B^2}{L}$ . Asimetričnost je potem kvocient teh dveh števil:

$$A = \frac{(R_M - R_m)L}{B^2}.$$

Te vrednosti se običajno gibljejo med 0,02 in 0,36, povprečna vrednost pa je 0,17.

Topost je podatek, ki govori o razmerju med povprečjem polmerov  $R_M$  in  $R_m$  jajca v primerjavi s povprečjem polmerov pri enako veliki elipsi. Kvocient  $\frac{(R_M + R_m)}{2R}$  bi bil pri elipsi enak 1, pri jajcu, ki bi bilo bolj topo kot ustrezna elipsa, večji od 1, pri bolj zašiljenem jajcu pa manjši od 1. Zato temu kvocientu odštejemo 1 in topost definiramo takole:

$$T = \frac{(R_M + R_m)L}{B^2} - 1.$$

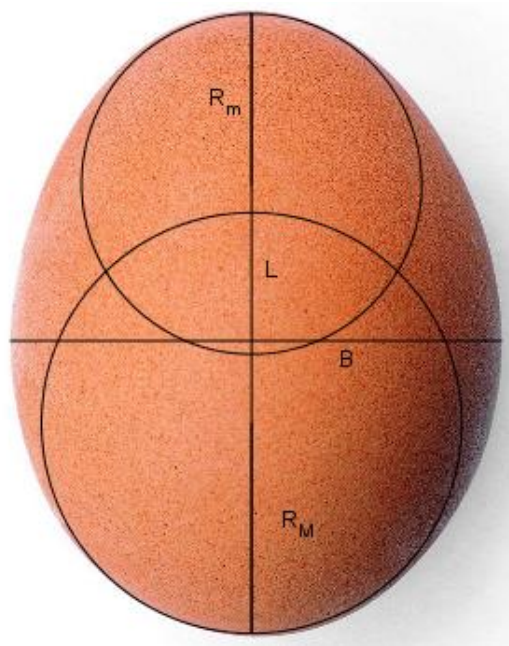


Če je topost manjša kot 0, je jajce bolj zašiljeno kot elipsa z enako dolžino in debelino. Če pa je topost večja od 0, je jajce bolj topo. Te vrednosti se običajno gibajo med -0,17 in 0,25, povprečje je pri -0,06.

Najprej si poglejmo, kako pri danem jajcu določili omenjene tri parametre. Naš primer bodo parametri pri navadnem kokošnjem jajcu.

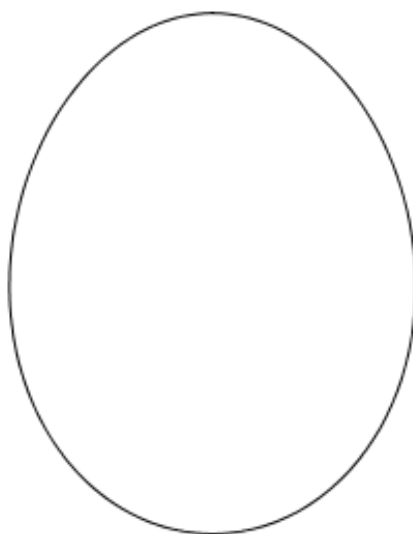
Jajce fotografiramo in sliko vnesemo v GeoGebro. Nato narišemo dve daljici, ki nam bosta izmerili dolžino in debelino jajca. Med sabo sta pravokotni. Nato poskusimo izmeriti radija  $R_M$  in  $R_m$ . To naredimo tako, da v skrajnih točkah jajca narišemo dva kroga in spreminjamo njuna polmera, dokler se najboljše ne ujemata s krivino jajca v skrajnih točkah na sliki. Na ta način odčitamo radija in na tej podlagi potem izračunamo parametre  $A$ ,  $T$ ,  $P$ .

Na sliki je primer nekega kokošnjega jajca, v resnici pa so si tudi kokošja jajca med seboj precej različna.



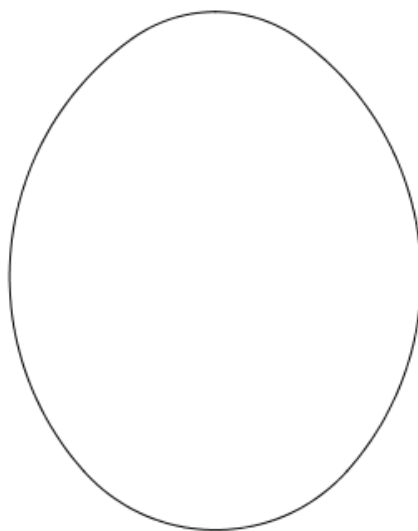
Slika 2: Kokošje jajce

Izmerili smo vrednosti:  $L = 6$ ,  $B = 4,76$ ,  $R_m = 1,65$ ,  $R_M = 2,04$ . Na tej osnovi izračunamo:  $A \doteq 0,09$ ,  $P \doteq 1,28$  in  $T \doteq -0,02$ . Vidimo, da je v primerjavi s povprečnimi vrednostmi to jajce podpovprečno asimetrično, podpovprečno podolgovato in nadpovprečno topo.



*Slika 3: Kokošje jajce, dobljeno z inverzijo*

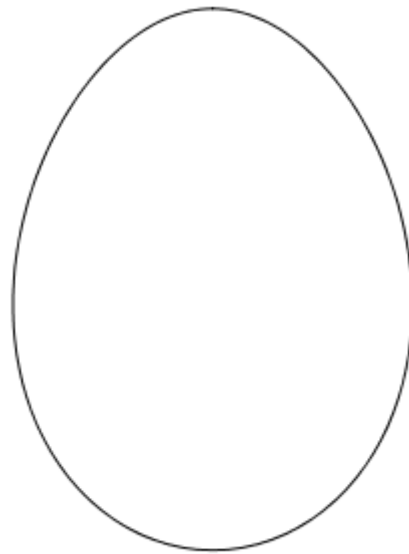
Vrednosti polmerov, dolžine in debeline, ki smo jih predhodno dobili v GeoGebri, smo uporabili, da smo narisali jajce s krožnimi loki (predstavljeno v 3. poglavju). Izmerili smo dolžino jajca  $L = 6$  enot, pri risanju jajc s krožnimi loki pa je bila dolžina jajca 1 enota. Zato izvedemo prehod z raztegom za faktor  $\frac{1}{L}$ . Vrednosti radijev bosta torej  $a = \frac{R_m}{L}$  in  $b = \frac{R_M}{L}$ . Kot  $\varphi_1$  izberemo tako, da se debelina približa vrednosti  $\frac{B}{L}$ .



*Slika 4: Kokošje jajce, dobljeno s krožnimi loki*

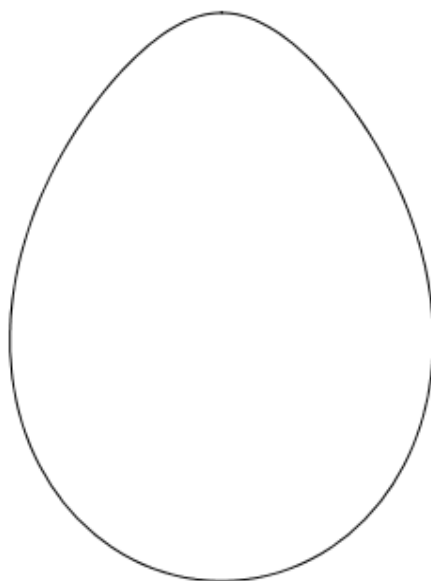
V 5. poglavju (v razdelku 5.6) se bomo ukvarjali z vprašanjem, kako z uporabo metode inverzije narisati jajce z danimi parametri  $A$ ,  $T$ ,  $P$ . Podrobnosti postopka bomo spoznali kasneje, že v tem trenutku pa si oglejmo nekaj na ta način narisanih slik.

Jajce s povprečnimi vrednostmi vseh treh parametrov. Ciljamo na vrednosti  $A = 0,17$ ,  $T = -0,06$  in  $P = 1,39$ , vendar s to metodo teh vrednosti ni mogoče točno zadeti. Vrednosti, ki sva jih dobila so zato približki  $A = 0,2$ ,  $T = -0,05$  in  $P = 1,35$ .



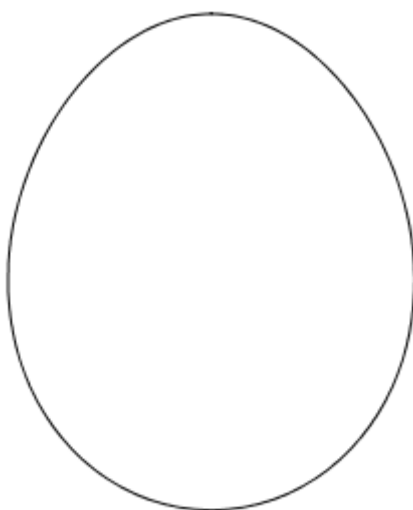
*Slika 5: Povprečno jajce, dobljeno z inverzijo*

Naslednje jajce je izrazito asimetrično  $A = 0,36$  in zašiljeno  $T = -0,17$ . Podolgovatost bi naj bila povprečna, a je zaradi približka nekoliko manjša  $P = 1,31$ .



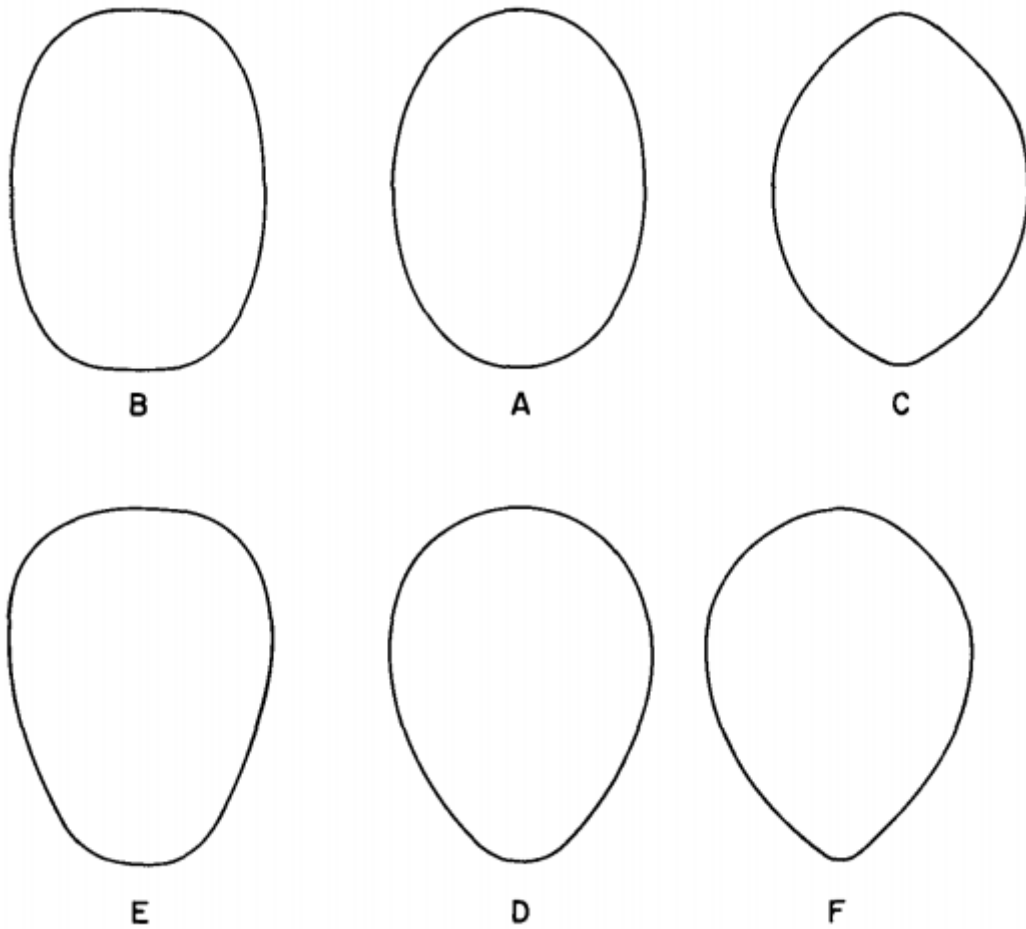
*Slika 6: Zelo asimetrično in zašiljeno jajce, dobljeno z inverzijo*

Sledeče jajce je zelo malo podolgovato  $P = 1,19$ . Asimetričnost in topost pa sta povprečni  $P = 0,17$  in  $T = -0,06$ .



*Slika 7: Zelo malo podolgovato jajce, dobljeno z inverzijo*

Kot bomo spoznali v razdelku 5.6, vseh oblik na ta način ne moremo narisati. Zato si oglejmo sliko 8, ki lepo ilustrira pojma asimetričnost in topost. Slika je povzeta po članku [1]. Pri vseh jajcih je podolgovatost enaka, močno pa se ta razlikujejo v parametrih A in T.



*Slika 8: Primeri jajc z ekstremnimi vrednostmi*

A: Elipsa s topostjo 0 in brez asimetrije.

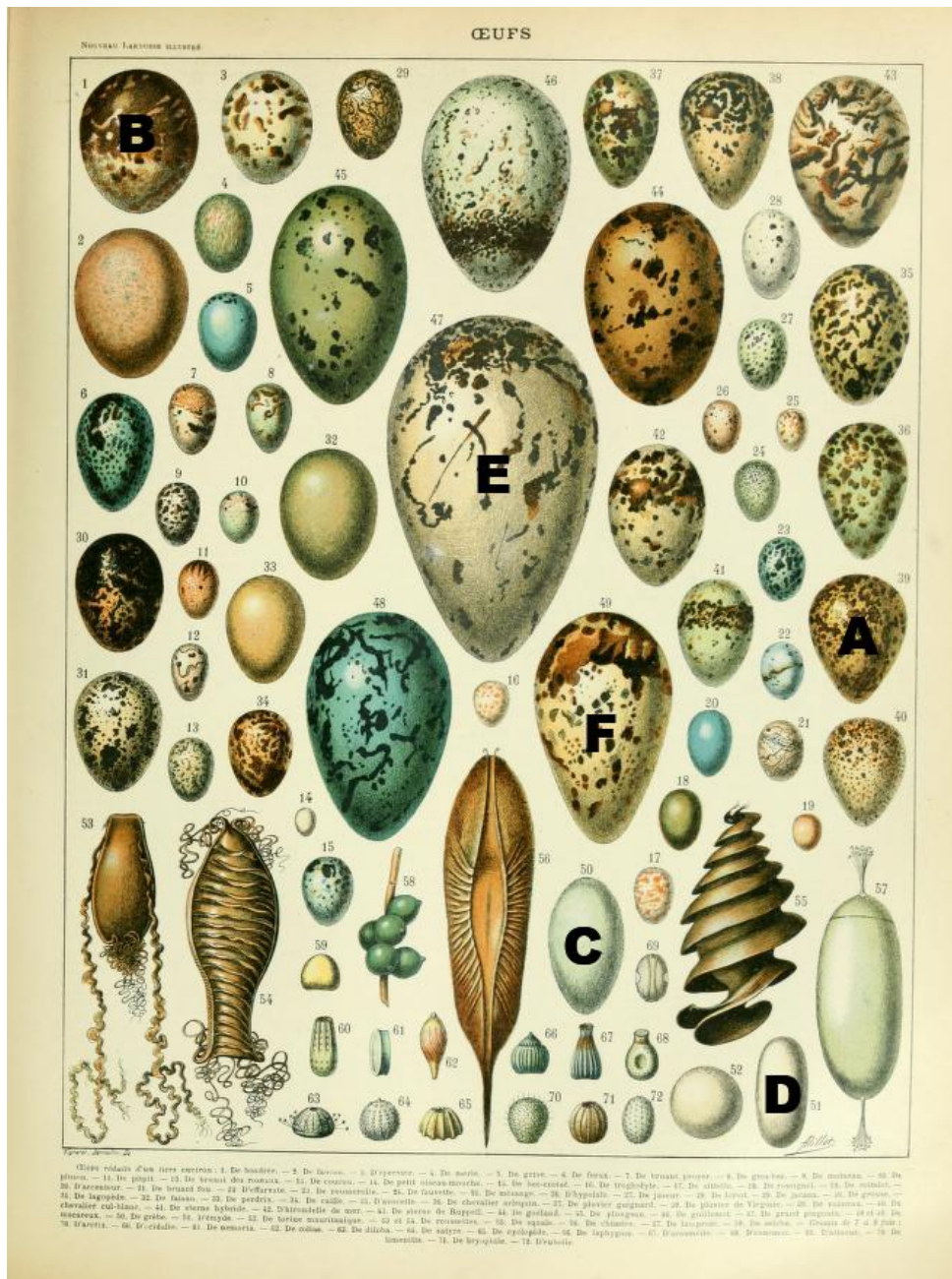
B: Asimetrije ni, topost je pozitivna.

C: Asimetrije ni, topost je negativna.

D: Asimetrija je, topost je 0.

E: Asimetrija je, topost je pozitivna.

F: Asimetrija je, topost je negativna.



Slika 9: Jajca z različnimi lastnostmi

Slika iz enciklopedije Larousse prikazuje jajca z vsemi mogočimi lastnostmi, ki sva jih predstavila zgoraj. Je dober način, da se lahko preizkusimo v razumevanju zgoraj predstavljenih lastnosti. Poglejmo si na primer jajca A, E in F, ki so izrazito asimetrična. Jajce B je zelo malo podolgovato, tudi asimetrija je majhna. Primer zašiljenega jajca je jajce C. Podolgovati sta jajci F in D.

## 5. JAJČASTE KRIVULJE Z INVERZIJO

### 5.1. O inverziji

Naj bo  $K$  krivulja v ravnini s središčem  $S$  in radijem  $R$ . Inverzija glede na krožnico  $K$  je preslikava, ki vsaki točki  $T$  v ravnini  $\Pi$  (z izjemo središča  $S$ ) priredi točko  $T'$ , ki leži na poltraku  $ST$  in zanjo velja:  $|ST||ST'| = R^2$ . Inverzija torej slika iz množice  $\Pi - \{S\}$  v množico  $\Pi$ . Oglejmo si nekaj lastnosti te preslikave.

1. Če točka  $T$  leži na krožnici  $K$ , se z inverzijo preslika sama vase.

$$T \in K \Leftrightarrow T = T'$$

Dokaz:

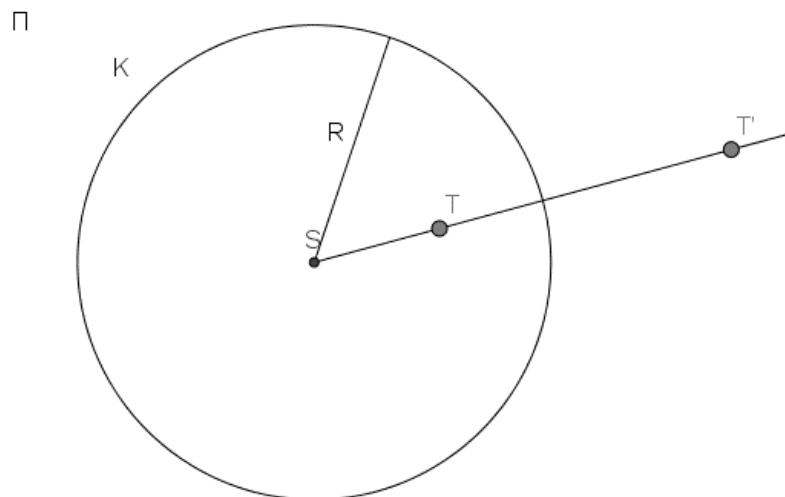
Iz definicije vemo, da je  $|ST||ST'| = R^2$ , ker pa točka  $T$  leži na krožnici, je  $|ST|$  enak  $R$  in zato  $R|ST'| = R^2$ . Delimo z  $R$  in dobimo  $|ST'| = R$ .

Ker morata točki  $T$  in  $T'$  ležati na poltraku  $ST$ , je jasno, da je  $T=T'$ .

2. Če bo točka  $T$  ležala znotraj kroga, bo točka  $T'$  zunaj. V primeru, da točka  $T$  leži zunaj kroga, točka  $T'$  leži znotraj kroga.

Dokaz:

Vemo  $|ST||ST'| = R^2$ . Delimo z  $|ST|$ , ki je več kot  $R$ , zato je  $|ST'| < R$ . Obraten sklep je podoben.



Slika 10: Slika točke z inverzijo.

3. Če preslikamo preslikano točko  $T'$ , dobimo prvotno točko  $T$ .

Dokaz:

Iz definicije vemo, da velja  $|ST||ST'| = R^2$  in  $|ST'||ST''| = R^2$ .

Izraza enačimo  $|ST||ST'| = |ST'||ST''|$ . Delimo s  $|ST'|$  in dobimo  $|ST| = |ST''|$ .

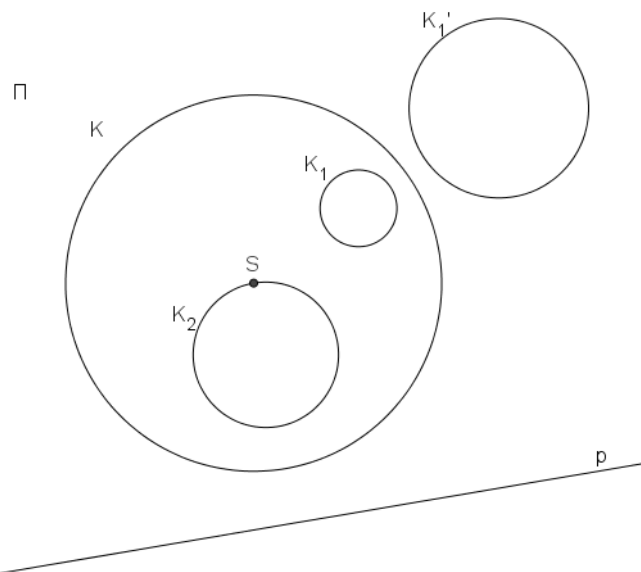
Ker točke  $T, T', T''$  ležijo na istem poltraku  $ST'$ , je jasno, da je  $T=T''$ .

Kot zanimivost in brez dokazov navedimo še informacijo o tem, kako se z inverzijo preslikajo premice in krožnice v ravnini.

Krožnica  $K_1$ , ki jo preslikujemo z inverzijo glede na krožnico  $K$ , se bo preslikala v drugo krožnico  $K_1'$ , če  $K_1$  ne poteka skozi središče  $S$  krožnice  $K$ . Krožnica  $K_2$ , ki pa poteka skozi središče  $S$ , se z inverzijo preslika v premico  $K_2'$ .

Inverzija je uporabna za poenostavljanje nekaterih kompleksnejših geometrijskih problemov, saj določene krožnice preslika v premice.





Slika 11: Inverzija: krožnice se preslikajo v krožnice ali premice

V nadaljevanju bomo za krožnico  $K$  izbrali krožnico z enačbo  $x^2 + y^2 = 1$ , torej krožnico s središčem v izhodišču, koordinatnega sistema in z radijem  $R=1$ . Kjerkoli v ravnini izberimo točko  $T(x,y)$ . Naj bo  $T'(x',y')$  slika točke  $T$  z inverzijo glede na krožnico  $K$ . Poskusimo določiti koordinati  $x'$  in  $y'$  v odvisnosti od  $x$  in  $y$ .

Naredimo krajevna vektorja:  $\mathbf{r}$  do točke  $T$  in  $\mathbf{r}'$  do točke  $T'$ . Ker sta  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{r}'$  na istem poltraku, pomeni, da lahko  $\mathbf{r}'$  izrazimo kot  $\mathbf{r}$  pomnožen z nekim skalarjem, ki je večji kot nič:  $\mathbf{r}' = \lambda \mathbf{r}$ .

Vzamemo absolutno vrednost leve in desne strani, torej  $|\mathbf{r}'| = |\lambda \mathbf{r}|$  ali  $|\mathbf{r}'| = |\lambda| |\mathbf{r}|$ . Ker vemo, da je  $\lambda > 0$ , lahko zapišemo  $|\mathbf{r}'| = \lambda |\mathbf{r}|$ . Vemo:  $|ST| = |\mathbf{r}|$  in  $|ST'| = |\mathbf{r}'|$ .

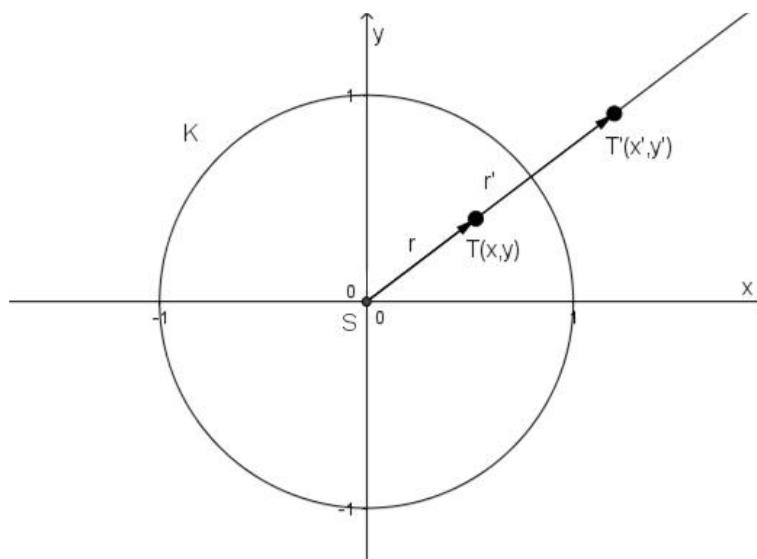
Iz definicije inverzije sledi, da je  $|ST|/|ST'| = R^2$ , od koder dobimo:  $|\mathbf{r}'| |\mathbf{r}| = R^2$ . Vemo, da je  $R = 1$ . Zapišemo lahko torej, da je  $|\mathbf{r}'| |\mathbf{r}| = 1$  oziroma  $\lambda |\mathbf{r}| |\mathbf{r}| = 1$  ali  $\lambda |\mathbf{r}|^2 = 1$ . Če izrazimo lambda dobimo, da  $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}$  in preko dolžine krajevnega vektorja dobimo  $\lambda = \frac{1}{x^2 + y^2}$ . V začetni izraz vstavimo lambda in dobimo  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \frac{1}{x^2 + y^2}$ . Krajevni vektor do neke točke je enak kot koordinate te točke, torej  $(x', y') = (x, y) \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

$$(x', y') = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

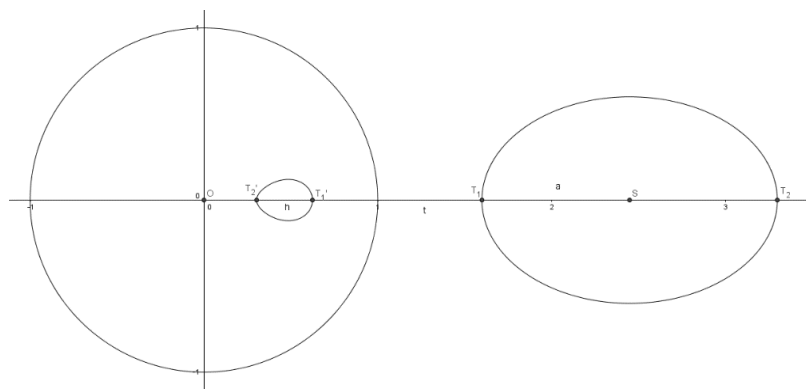


Slika 12: Inverzija in krajevni vektorji

## 5.2. Jajce, narisano z uporabo inverzije

V koordinatno izhodišče postavimo enotsko krožnico in v koordinatni sistem elipso z enačbo

$$\frac{(x-t)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Slika 13: Inverzija: elipsa in jajce

Nato elipso z inverzijo preslikamo preko enotske krožnice in dobimo krivuljo, ki jo bomo opazovali v nadaljevanju.

Za razliko od risanja s krožnimi loki pri tej metodi nastane krivulja, ki je bolj gladka, brez motečih točk, kjer smo lepili različne krožne loke.

V nadaljevanju bomo izpeljali parametrizacijo omenjene jajčaste krivulje, torej slike elipse z inverzijo glede na enotsko krožnico s središčem v izhodišču.

Najprej bomo parametrizirali elipso in jo potem preslikali z inverzijo preko enotske krožnice.

$$\text{Elipsa: } \mathbf{r}(\varphi) = (a \cos \varphi + t)\hat{i} + b \sin \varphi \hat{j}$$

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$x' = \frac{a \cos \varphi + t}{(a \cos \varphi + t)^2 + (b \sin \varphi)^2}$$
$$y' = \frac{b \sin \varphi}{(a \cos \varphi + t)^2 + (b \sin \varphi)^2}$$

$$\mathbf{r}(\varphi) = \frac{a \cos \varphi + t}{(a \cos \varphi + t)^2 + (b \sin \varphi)^2} \hat{i} + \frac{b \sin \varphi}{(a \cos \varphi + t)^2 + (b \sin \varphi)^2} \hat{j}$$

### 5.3. Radija $R_M$ in $R_m$ – polmera pritisnjenih krogov v skrajnih točkah jajca

V tem razdelku bomo izračunali polmera pritisnjenih krogov v skrajnih točka jajca, narisane s pomočjo inverzije.

Koordinate točk na elipsi bomo označevali z  $x_0, y_0$ , koordinate točk na jajcu pa z  $x$  in  $y$ .

Začnemo s parametrizirano elipso in jo dvakrat odvedemo, saj bomo kasneje potrebovali prvi in drugi odvod koordinat elipse.

$$x_0 = a \cos \varphi + t \qquad x'_0 = -a \sin \varphi \qquad x''_0 = -a \cos \varphi$$

$$y_0 = b \sin \varphi \qquad y'_0 = b \cos \varphi \qquad y''_0 = -b \sin \varphi$$

Koordinate jajca oz. inverzirane elipse pa so:  $x = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}$  in  $y = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}$ . Da poenostavimo problem, vpeljemo novo spremenljivko  $\omega = x_0^2 + y_0^2$ .

Odvedemo še koordinatni funkciji jajčaste krivulje.

$$x = \frac{x_0}{\omega} \qquad x' = \frac{x'_0 \omega - x_0 \omega'}{\omega^2} \qquad x'' = \frac{(x''_0 \omega - \omega'' x_0) \omega^2 - (x'_0 \omega - x_0 \omega') 2 \omega \omega'}{\omega^4}$$

$$y = \frac{y_0}{\omega} \qquad y' = \frac{y'_0 \omega - y_0 \omega'}{\omega^2} \qquad y'' = \frac{(y''_0 \omega - \omega'' y_0) \omega^2 - (y'_0 \omega - y_0 \omega') 2 \omega \omega'}{\omega^4}$$

$$\omega = x_0^2 + y_0^2 \quad \omega' = 2x_0 x'_0 + 2y_0 y'_0 \qquad \omega'' = 2x_0'^2 + 2x_0 x_0'' + 2y_0'^2 + 2y_0 y_0''$$

$$* (x'_0 \omega - x_0 \omega')' = x''_0 \omega + x'_0 \omega' - x'_0 \omega' - x_0 \omega'' = x''_0 \omega - x_0 \omega''$$

Najprej izračunamo polmer pritisnjenega kroga za  $\varphi = 0$ .

$$\begin{array}{lll} x_0 = a + t & x'_0 = 0 & x''_0 = -a \\ y_0 = 0 & y'_0 = b & y''_0 = 0 \\ \omega = (a + t)^2 & \omega' = 0 & \omega'' = -2a(a + t) + 2b^2 \end{array}$$

Za izračun polmera pri  $\varphi = 0$  potrebujemo vrednosti prvega in drugega odvoda za  $x$  in  $y$ . Uporabimo zgornje izračune. Najprej dobimo  $x' = 0$ .

Drugi odvod  $x'' = \frac{(x_0''\omega - \omega''x_0)\omega^2 - (x_0'\omega - x_0\omega')2\omega\omega'}{\omega^4}$ , vstavimo podatke,  $\frac{(-a(a+t)^2 - (-2a(a+t) + 2b^2)(a+t))(a+t)^4}{(a+t)^8}$ , krajšamo  $(a+t)^4$  ter dobimo  $\frac{(-a(a+t)^2 - (-2a(a+t) + 2b^2)(a+t))}{(a+t)^4}$ . Izpostavimo  $(a+t)$ :  $\frac{(a+t)((-a^2 - at) - (-2a^2 - 2at + 2b^2))}{(a+t)^4}$ . Za tem okrajšamo  $(a+t)$  in poračunamo. Rezultat je  $x'' = \frac{a^2 + at - 2b^2}{(a+t)^3}$ .

Izračunamo še  $y'$ . Vstavimo podatke  $\frac{b(a+t)^2}{(a+t)^4}$  in okrajšamo, dobimo:  $\frac{b}{(a+t)^2}$ . Računa za  $y''$  ne potrebujemo, ker je v enačbi pomnožen z  $x'$ , ki je v tem primeru enak 0.

Za izračun radija pri  $\varphi = 0$ , uporabimo enačbo  $R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|}$ . Najprej v enačbo vstavimo podatke, ki so enaki 0. Dobimo:  $\frac{(0 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|0y'' - x''y'|}$ . Zdaj vstavimo še druge vrednosti  $\frac{|\frac{b}{(a+t)^2}|^3}{|\frac{(a^2 + at - 2b^2)}{(a+t)^3} \frac{b}{(a+t)^2}|}$ .

Odpravimo absolutno vrednost in delimo ulomka. Dobimo:  $\frac{b^3(a+t)^5}{b(a+t)^6(a^2 + at - 2b^2)}$ , rezultat za radij pri  $\varphi = 0$  je

$$R_m = \frac{b^2}{(a+t)(a^2 + at - 2b^2)}$$

Sedaj pa izračunamo polmer pritisnjenega kroga še v drugem krajišču jajca, torej za  $\varphi = \pi$ .

$$\begin{array}{lll} x_0 = t - a & x'_0 = 0 & x''_0 = a \\ y_0 = 0 & y'_0 = -b & y''_0 = 0 \\ \omega = (t - a)^2 & \omega' = 0 & \omega'' = 2a(t - a) + 2b^2 \end{array}$$

Za izračun polmera pri  $\varphi = \pi$  potrebujemo vrednosti prvega in drugega odvoda za  $x$  in  $y$ . Z zgornjimi izračuni dobimo, da  $x' = 0$ .

Računamo še drugi odvod,  $x'' = \frac{(x_0''\omega - \omega''x_0)\omega^2 - (x_0'\omega - x_0\omega')2\omega\omega'}{\omega^4}$ , vstavimo podatke pri kotu  $\pi$ ,

$$\frac{(a(t-a)^2 - (2a(t-a) + 2b^2)(t-a))(t-a)^4}{(t-a)^8}. \text{ Krajša se } (t-a)^4, \text{ dobimo } \frac{(a(t-a)^2 - (2a(t-a) + 2b^2)(t-a))}{(t-a)^4}.$$

Izpostavimo  $(t-a)$ , in računamo  $\frac{(t-a)((at-a^2) - (-2a^2 + 2at + 2b^2))}{(t-a)^4}$ . Krajšamo s  $(t-a)$ , računamo v oklepaju in dobimo rezultat  $\frac{a^2 - at - 2b^2}{(t-a)^3}$ .

Izračunamo še  $y'$ . Vstavimo podatke  $\frac{-b(t-a)^2}{(t-a)^4}$  in okrajšamo, dobimo:  $-\frac{b}{(t-a)^2}$ . Računa za  $y''$  ne potrebujemo, ker je v enačbi pomnožen z  $x'$ , ki je v tem primeru enak 0.

Za izračun radija pri  $\varphi = \pi$ , uporabimo enačbo  $R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|}$ . Najprej v enačbo vstavimo

podatke, ki so enaki 0. Dobimo:  $\frac{(0 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|0y'' - x''y'|}$ . Zdaj vstavimo še druge vrednosti,

$\frac{|\frac{-b}{(t-a)^2}|^3}{|\frac{(-2b^2 + at - a^2)}{(t-a)^3} \frac{(-b)}{(t-a)^2}|}$ . Odpravimo absolutno vrednost in delimo ulomka. Dobimo:

$\frac{b^3(t-a)^5}{b(t-a)^6(2b^2 + at - a^2)}$ . Rezultat za radij pri  $\varphi = \pi$  je

$$R_M = \frac{b^2}{(t-a)(2b^2 + at - a^2)}.$$

#### 5.4. Dolžina L in debelina B

Izračunajmo najprej dolžino  $L$ . Najprej izračunamo koordinate skrajnih točk jajčaste krivulje, to sta točki  $T'_1$  in  $T'_2$ , kamor se z inverzijo preslikata temeni elipse  $T_1$  in  $T_2$ .

$$T_1(t - a, 0)$$

$$T_2(t + a, 0)$$

Prej smo izpeljali, da je  $T'(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ . Ker leži točka na abscisni osi, je  $y = 0$ , kar pomeni  $T'(\frac{1}{x}, 0)$ . Iz tega sledi  $T'_1(\frac{1}{t-a}, 0)$  in  $T'_2(\frac{1}{t+a}, 0)$ . Razdalja med tema točkama je  $\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a} = L$ .

Izračunamo  $L = \frac{t+a-t+a}{t^2-a^2}$  in torej

$$L = \frac{2a}{t^2 - a^2}.$$

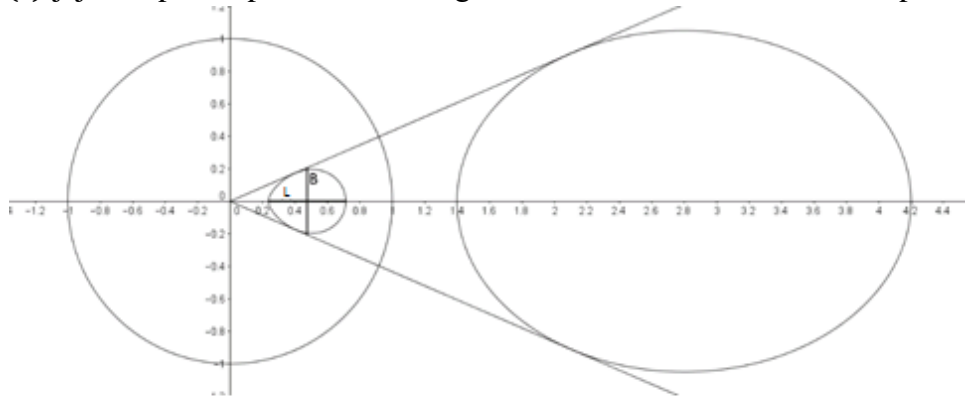
Opazovati želimo jajčaste krivulje različnih oblik. Iz zgornje formule izhaja, da se nam bo s spreminjajočimi vrednostmi  $a$ ,  $b$ ,  $t$  spreminjala tudi dolžina jajca. Tako je možno, da bomo dobili različno velika jajca enakih oblik. Da bi se temu izognili, poskusimo doseči, da bodo vsa opazovana jajca imela isto dolžino  $L$  (npr.  $L=0.5$ ). Izrazimo  $t$  iz formule za  $L$ , dobimo  $t^2 = \frac{2a}{L} + a^2$ . Rezultat je  $t = \sqrt{\frac{2a}{L} + a^2}$ . Za  $L$  vstavimo 0,5 in dobimo:

$$t = \sqrt{4a + a^2}.$$

V nadaljevanju bomo za  $t$  jemali to vrednost in v tem primeru bo dolžina našega jajca enaka  $L = 0.5$ .

Zdaj pa izračunajmo še (vsaj približek za) širino  $B$  našega jajca.

Ugotovimo, da bi bilo natančno izračunavanje širine jajca preveč zahtevno, saj bi morali najprej odvesti  $y(t)$  jajca in potem poiskati ničlo tega odvoda. Pri tem bi dobili ničle polinoma tretje



Slika 14: Jajce s tangentama iz izhodišča in označenima  $L$  in  $B$

stopnje, ki jih je mogoče natančno izračunati, a je izračun zahteven in dolgotrajen. Zato se bomo zadovoljili s približkom.

Na elipso z enačbo  $\frac{(x-t)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  iz izhodišča potegnemo tangento. To je hkrati tudi tangenta na jajce. Predpostavimo, da je približna največja debelina dosežena na sredini jajca, pri  $x_s$ , za katerega velja naslednje:  $x_s = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a} \right)$ . V tej točki bi morali izračunati drugo koordinato na jajčasti krivulji. Na tem mestu pa naredimo še drugo aproksimacijo: namesto do krivulje pri tej abscisi gremo do na sliki 14 narisane tangente. Napaka ne bo velika in bo celo zmanjšala napako prejšnje aproksimacije. Omenjena tangenta ima enačbo  $y=hx$ . Izračunajmo ustrezni koeficient  $h$ . Zapišimo sistem dveh enačb:

$$\frac{(x-t)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = hx$$

in določimo  $h$  tako, da bo rešitev ena sama.

Enakost  $\frac{(x-t)^2}{a^2} + \frac{(hx)^2}{b^2} = 1$  na obeh straneh množimo z  $a^2b^2$ . Uporabimo distributivnostni zakon in damo vse člene na levo stran enačbe. Dobimo kvadratno enačbo in jo oblikujemo v smiselno obliko,  $(b^2 + a^2h^2)x^2 + (-2b^2t)x + (b^2t^2 - a^2b^2) = 0$ . Diskriminanta za dobljeno kvadratno enačbo mora biti enaka 0, saj imata v tem primeru graf linearne funkcije in elipsa natanko eno dotikališče:



$$4b^4t^2 - 4(b^2 + a^2h^2)(b^2t^2 - a^2b^2) = 0.$$

Delimo s  $4b^2$  in uredimo. Dobimo enačbo  $a^2b^2 - a^2t^2h^2 + a^4h^2 = 0$ . Delimo jo lahko z  $a^2$ .

Dobimo  $b^2 - t^2h^2 + h^2 = 0$ . Izrazimo  $h^2$ , torej  $h^2 = \frac{b^2}{t^2 - a^2}$ . Vemo, da je  $t^2 = a^2 +$

$4a$ . Podatek uporabimo in dobljen  $h^2$  je naslednji:  $h^2 = \frac{b^2}{4a}$  oz.  $h = \frac{b}{2\sqrt{a}}$ .

Enačba naše premice je torej  $y = \frac{b}{2\sqrt{a}}x$ . Približno največjo vrednost v jajcu pa bo zasedel pri

$x_s = \frac{1}{2}(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a})$ . Torej je  $y = \frac{b}{2\sqrt{a}}\frac{1}{2}(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a})$ . Ta vrednost je polovica širine jajca oziroma

$\frac{B}{2}$ . Velja torej  $\frac{B}{2} = \frac{b}{2\sqrt{a}}\frac{1}{2}(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a})$  oziroma  $B = \frac{b}{2\sqrt{a}}(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a})$ . Računamo v oklepaju in

dobimo, da je  $B = \frac{b}{2\sqrt{a}}(\frac{2t}{t^2 - a^2})$ . Spet zapišemo  $t^2 = a^2 + 4a$  in dobimo, da je  $B = \frac{b}{\sqrt{a}}(\frac{t}{4a})$ .

Poenostavimo in imamo približek za B

$$B \doteq \frac{tb}{4a^{\frac{3}{2}}}.$$

## 5.5. Izračun parametrov A, T, P

Zaradi lažjega opazovanja, bomo parametre izrazili najprej z  $a$ ,  $b$  in  $t$ . Za tem pa bomo  $b$  nadomestili s  $k$ , pri čemer je  $k$  definiran kot podolgovatost elipse  $k = \frac{a}{b}$  oz.  $b = \frac{a}{k}$ . Parameter  $t$  bomo pa zaradi konstantne dolžine  $L = 0.5$  zamenjali s prej izpeljano formulo  $t = \sqrt{a^2 + 4a}$ . Tako bomo v nadaljevanju uporabljali le vhodni spremenljivki  $a$  in  $k$ . Pri računih bomo upoštevali tudi v razdelku 5.3 izpeljane polmere pritisnjenih krogov jajca v obeh krajiščih.

Podolgovatost:

Vemo:  $P = \frac{L}{B}$ . Za  $L$  smo določili vrednost 0,5, za  $B$  pa smo že prej izračunali formulo za približek:

$$P = \frac{1}{2} \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{tb} = \frac{2\sqrt{a}a}{\sqrt{a}\sqrt{a+4b}} = \frac{2k}{\sqrt{a+4}}$$

$$\boxed{P = \frac{2k}{\sqrt{a+4}}}$$

Asimetričnost:

Vemo:  $A = \frac{(R_M - R_m)L}{B^2}$ . Za polmera smo že prej izračunali formuli, za  $L$  določili vrednost 0,5, za  $B$  pa smo že prej izračunali formulo za približek.

Vstavimo znane formule:

$$\frac{16a^3}{2t^2b^2} \left( \frac{b^2}{(t-a)(2b^2+at-a^2)} - \frac{b^2}{(a+t)(a^2+at-2b^2)} \right)$$

Za  $t^2$  vstavimo znano formulo, izpostavimo  $b^2$ , ulomka pa damo na najmanjši skupni imenovalec:

$$\frac{8a^3}{a(a+4)b^2} b^2 \left( \frac{a^3 + a^2t - 2ab^2 + a^2t + at^2 - 2b^2t + 2ab^2 + a^2t - a^3 - 2b^2t - at^2 + a^2t}{(t-a)(t+a)(at+(2b^2-a^2))(at-(2b^2-a^2))} \right)$$

Računamo:

$$\frac{8a^2(4a^2t - 4b^2t)}{(a+4)(t^2 - a^2)(a^2t^2 - (2b^2 - a^2)^2)}$$

Izpostavimo in pomnožimo:

$$\frac{32ta^2(a^2 - b^2)}{(a + 4)(a^2 + 4a - a^2)(a^2(a^2 + 4a) - 4b^4 + 4a^2b^2 - a^4)} =$$

$$= \frac{32ta^2(a^2 - b^2)}{(a + 4)4a(a^4 + 4a^3 - 4b^4 + 4a^2b^2 - a^4)}.$$

Krajšamo in odštejemo:

$$\frac{2ta(a^2 - b^2)}{(a + 4)(a^3 - b^4 + a^2b^2)}.$$

Za  $t$  in  $b$  uporabimo znane formule:

$$\frac{2\sqrt{a(a + 4)}a\left(a^2 - \frac{a^2}{k^2}\right)}{(a + 4)\left(a^3 + a^2\frac{a^2}{k^2} - \frac{a^4}{k^4}\right)}.$$

Zgoraj in spodaj množimo s  $k^4$  in krajšamo:

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{a + 4}} \frac{k^4 2a\left(a^2 - \frac{a^2}{k^2}\right)}{a^3(k^4 + ak^2 - a)}}{a^2(k^4 + ak^2 - a)} = \frac{\sqrt{\frac{a}{a + 4}} \frac{2(a^2k^4 - a^2k^2)}{a^2(k^4 + ak^2 - a)}}{a^2(k^4 + ak^2 - a)}.$$

Izpostavimo in dobimo končni rezultat:

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{a + 4}} \frac{2a^2k^2(k^2 - 1)}{a^2(k^4 + ak^2 - a)}}{a^2(k^4 + ak^2 - a)} = 2\sqrt{\frac{a}{a + 4}} \frac{k^2(k^2 - 1)}{k^4 + a(k^2 - 1)}.$$

$$A = 2\sqrt{\frac{a}{a + 4}} \frac{k^2(k^2 - 1)}{k^4 + a(k^2 - 1)}$$

Topost:

Vemo:  $T = \frac{(R_M + R_m)L}{B^2} - 1$ . Za polmera smo že prej izračunali formuli, za  $L$  določili vrednost 0,5, za  $B$  pa smo že prej izračunali formulo za približek.

Vstavimo znane formule:.

$$\frac{16a^3}{2t^2b^2} \left( \frac{b^2}{(t - a)(2b^2 + at - a^2)} + \frac{b^2}{(a + t)(a^2 + at - 2b^2)} \right) - 1.$$

Za  $t^2$  vstavimo znano formulo, izpostavimo  $b^2$ , ulomka pa damo na najmanjši skupni imenovalec:

$$\frac{8a^3b^2}{a(a+4)b^2} \left( \frac{a^3 + a^2t - 2ab^2 + a^2t + at^2 - 2b^2t - 2ab^2 - a^2t + a^3 + 2b^2t + at^2 - a^2t}{(t-a)(t+a)(at + (2b^2 - a^2))(at - (2b^2 - a^2))} \right) - 1.$$

Računamo:

$$\frac{8a^2}{(a+4)} \left( \frac{2a^3 - 4ab^2 + 2at^2}{(t^2 - a^2)(a^2t^2 - (2b^2 - a^2)^2)} \right) - 1.$$

Izpostavimo in pomnožimo:

$$\begin{aligned} & \frac{8a^2 2a(a^2 - 2b^2 + t^2)}{(a+4)(a^2 + 4a - a^2)(a^2(a^2 + 4a) - 4b^4 + 4a^2b^2 - a^4)} - 1 = \\ & = \frac{16a^3(a^2 - 2b^2 + a^2 + 4a)}{(a+4)4a(a^4 + 4a^3 - 4b^4 + 4a^2b^2 - a^4)} - 1. \end{aligned}$$

Krajšamo, vstavimo izraz za  $t$ :

$$\frac{4a^2(2a^2 + 4a - 2b^2)}{(a+4)(4a^3 - 4b^4 + 4a^2b^2)} - 1.$$

Izpostavimo:

$$\frac{8a^2(a^2 + 2a - b^2)}{(a+4)4(a^3 - b^4 + a^2b^2)} - 1.$$

Krajšamo in vstavimo izraz za  $b$ :

$$\frac{2a^2(a^2 + 2a - \frac{a^2}{k^2})}{(a+4)(a^3 - \frac{a^4}{k^4} + a^2 \frac{a^2}{k^2})} - 1.$$

Izpostavimo:

$$\frac{2a^3(a + 2 - \frac{a}{k^2})}{(a+4)a^3(1 - \frac{a}{k^4} + \frac{a}{k^2})} - 1.$$

Spodaj in zgoraj pomnožimo s  $k^4$  in dobimo rezultat:

$$T = \frac{2k^2(ak^2 + 2k^2 - a)}{(a + 4)(k^4 - a + ak^2)} - 1.$$

## 5.6. Analiza parametrov A, T in P glede na vhodne podatke

Naš cilj je narisati jajce z metodo inverzije, ki bo imelo predpisane vrednosti asimetričnosti A, toposti T in podolgovatosti P. Sprva smo poskušali to jajce dobiti s poskušanjem, tako da smo v GeoGebri spreminjali drsnika za  $a$  in  $k$ . To se je izkazalo za počasen in nezanesljiv postopek. S spreminjanjem enega izmed drsnikov so se spreminjale vse tri lastnosti. Do približkov pa smo v nekaterih primerih le prišli.

V tem razdelku bomo predstavili bolj sistematičen pristop, temelječ na prej izračunanih formulah za količine A, T, P. Pri risanju jajca lahko variramo parametra  $k$  in  $a$ , pri čemer je  $k > 1$  in  $a > 0$ . Denimo, da želimo narisati jajce, katerega asimetričnost znaša A, ki je neka konkretna vrednost. Glede na formule iz prejšnjega razdelka to lahko dosežemo, če izberemo spremenljivki  $a$  in  $k$  tako, da velja

$$A_0 = 2 \sqrt{\frac{a}{a+4}} \frac{k^2(k^2-1)}{k^4 + a(k^2-1)}.$$

Ustrezne pare točk  $(k, a)$  bomo ponazorili s točkami v ravnini. Da bomo kot običajno uporabljali osi  $x$  in  $y$ , in da bo program GeoGebra lažje zaznal, kaj imamo v mislih, odslej spremenljivko  $k$  nadomestimo z  $x$ , spremenljivko  $a$  pa z  $y$ . Pri izbrani vrednosti A nas torej zanimajo točke v ravnini, za katere velja

$$A = 2 \sqrt{\frac{y}{y+4}} \frac{x^2(x^2-1)}{x^4 + y(x^2-1)}.$$

To je neka krivulja, ki jo lahko narišemo v GeoGebri. Podobno dobimo tudi krivulje za izbrano podolgovatost P in topost T:

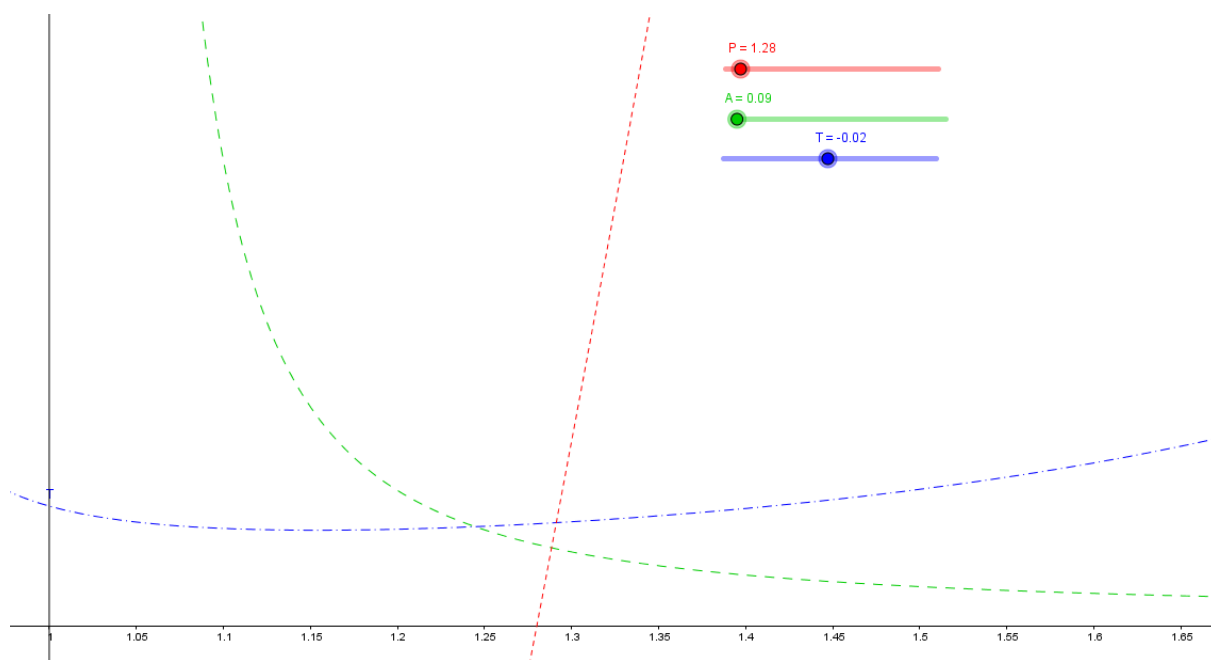
$$P = \frac{2x}{\sqrt{y+4}},$$

$$T = \frac{2x^2(yx^2 + 2x^2 - y)}{(y+4)(x^4 - y + yx^2)} - 1.$$

Dobili smo tri družine krivulj. Če bi se te sekale v eni točki, bi to pomenilo, da obstaja jajce s točno takšnimi  $A$ ,  $T$ ,  $P$ , kot smo si jih izbrali. Običajno pa se to ne zgodi, ampak dobimo tri presečišča. Za najboljši približek smo poiskali točko, ki bi bila vsem trem optimalnim krivuljam najbližje. Razbrali smo koordinate te točke, ki sta bili vrednosti  $a$  in  $k$  ter z njima narisali jajce.

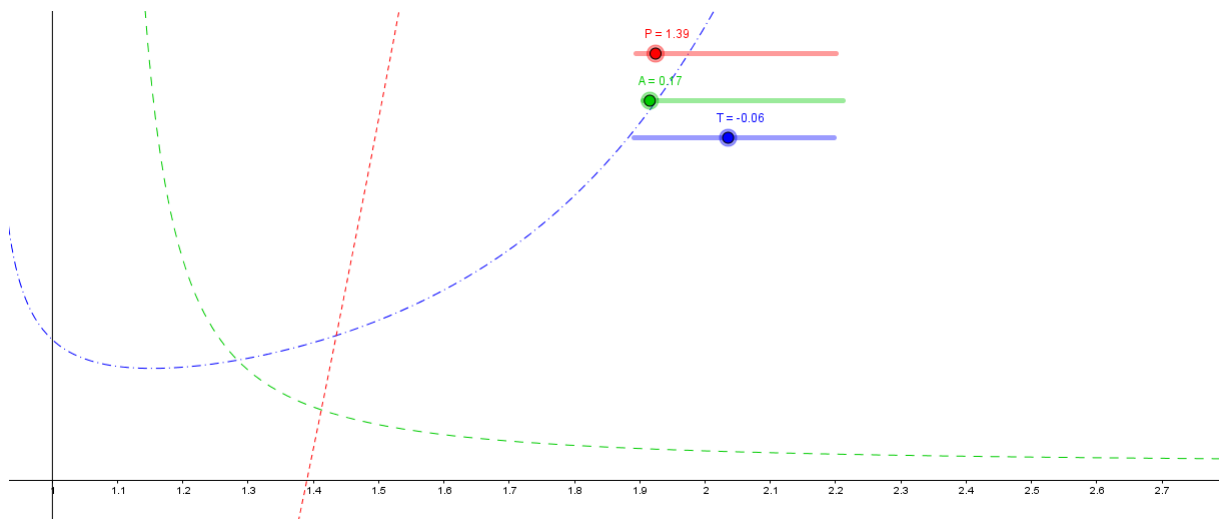
Kot primer si oglejmo, kako smo narisali kokošje jajce na sliki 3 v poglavju 4. Želimo torej narisati jajce s podatki  $A = 0,09$ ,  $P = 1,28$  in  $T = -0,02$ .

Idealno bi bilo, če bi se vsi trije grafi sekali v eni točki. V večini primerov pa ni tako in je natančnost odvisna od velikosti trikotnika, ki ga tri presečišča določajo. Vidimo, da je trikotnik, ki ga tvorijo presečišča, relativno majhen, kar pomeni, da lahko narišemo dober približek željenega jajca. Znotraj »trikotnika« izberimo neko točko in za  $k$  dobimo približno 1,285 in za  $a$  približno 0,062.



Slika 15: Grafi  $A$ ,  $T$ ,  $P$  za kokošje jajce

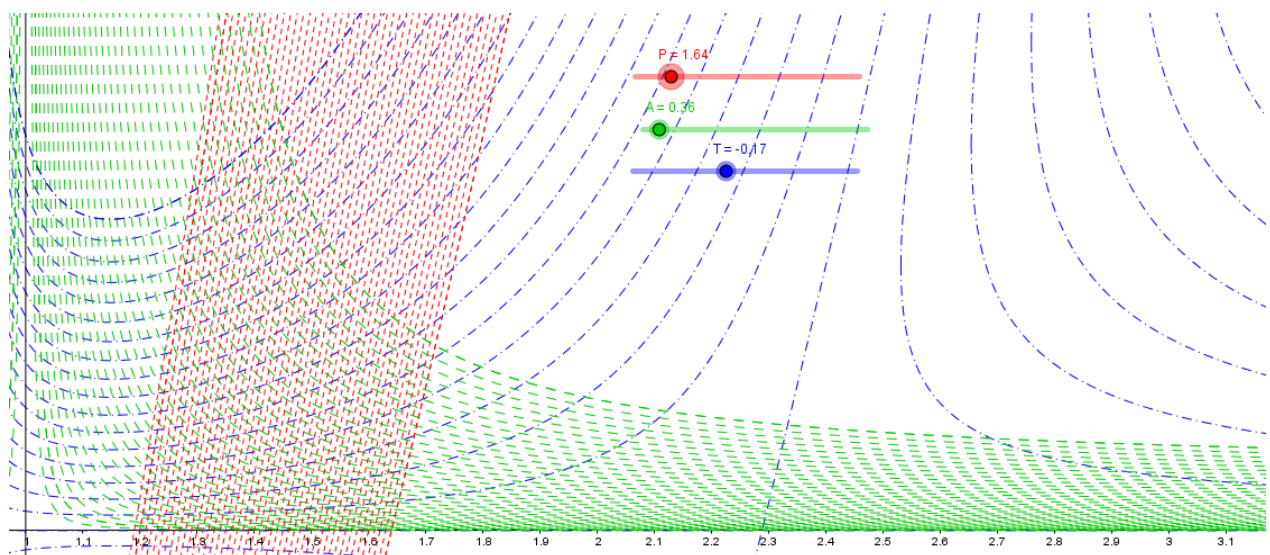
Podobno je pri primeru jajca s povprečnimi vrednostimi. Za  $a$  dobimo približno 0,201 in za  $k$  približno 1,384.



Slika 16: Grafi  $A$ ,  $T$ ,  $P$  za povprečno jajce

Vidimo:

Ugotovitev 1: Z našo metodo je možno kar dobro narisati jajce, ki ima povprečne vrednosti vseh treh parametrov  $A$ ,  $T$ ,  $P$ .



Slika 17: Grafi  $A$ ,  $T$ ,  $P$  s sledmi

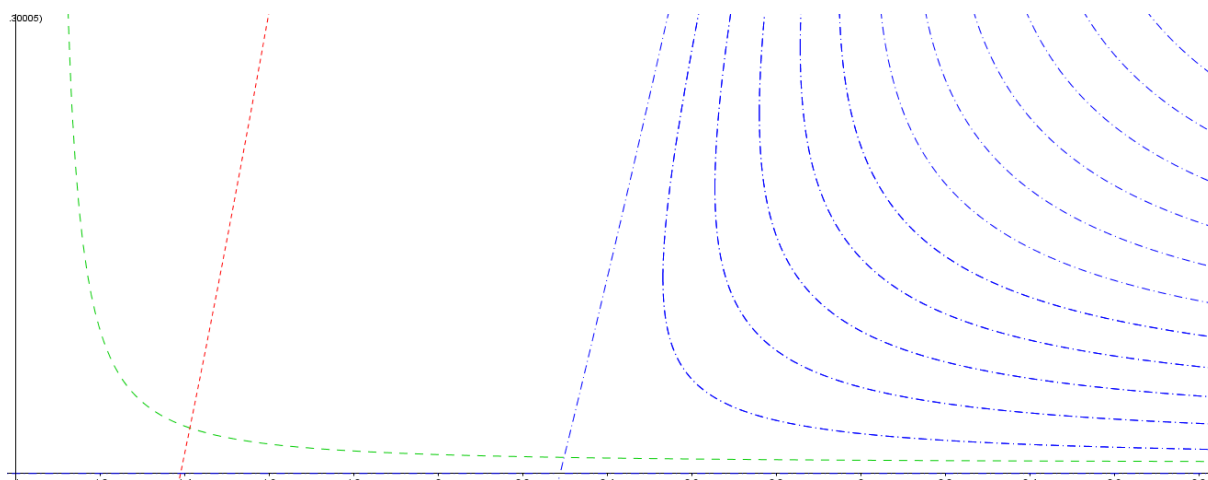


Za boljšo predstavo sva v GeoGebri grafom vklopila sled in vrednosti parametrov  $A$ ,  $T$ ,  $P$  spreminjala za 0,01 od spodnje do zgornje meje vsakega od parametrov, torej za  $A$  z intervala  $[0.02, 0.36]$ ,  $T$  z intervala  $[-0.17, 0.25]$  in  $P$  z intervala  $[1.19, 1.64]$ . Tako sva dobila modre črte za  $T$ , rdeče za  $P$  in zelene za  $A$ .

Tako sva dobila območje, kjer se trije grafi sekajo. Glede na to lažje določimo območje, kjer moramo izbirati smiselne vrednosti vhodnih parametrov  $a$  in  $k$ . V tem območju pa moramo še vedno izbirati smiselne vrednosti, še vedno smo pri izbiri vrednosti kar omejeni. Z določitvijo ene izmed vrednosti dobimo krivuljo. S tem se omejimo na pas okoli te krivulje, širina tega pasu pa je odvisna od željene natančnosti tega parametra. Z izbiro druge vrednosti, se izbira omeji na presek dveh takih pasov. Tretjo vrednost pa moramo izbrati tako, da bo imel pas te krivulje presek s presekom pasov prejšnjih dve krivulji.

Z opazovanjem opisanih krivulj lahko pridemo do dodatnih ugotovitev glede tega, pri katerih podatkih  $A$ ,  $T$ ,  $P$  je možno ustrezno jajce narisati z našo metodo z uporabo inverzije. Poglejmo si še nakaj tovrstnih ugotovitev.

Ugotovitev 2: Z našo metodo ne moremo narisati jajc, katerih  $A \in [A_{min}, A_{max}]$ ,  $P \in [P_{min}, P_{max}]$  in  $T \geq 0$ .

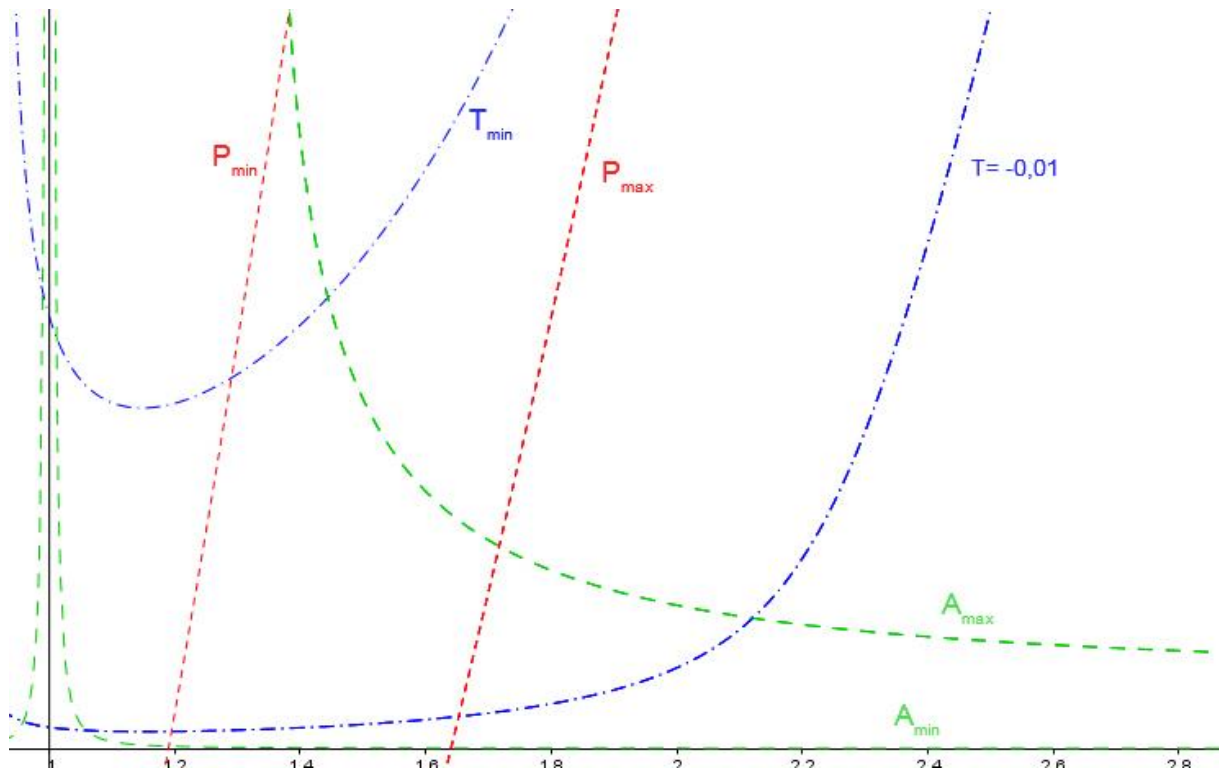


Slika 18: Grafi  $A$ ,  $T$ ,  $P$  za  $T \geq 0$

Graf toposti v tem primeru niti nima presečišč z drugima dvema grafoma v prvem kvadrantu. Grafi so daleč od prej opazovanega območja s smiselnimi vrednostmi. Torej lahko za topost

odmislimo vse pozitivne vrednosti. Zato bomo v nadaljevanju opazovali samo situacije, ko se  $T$  giblje na intervalu med  $T_{min}$  in 0.

Ugotovitev 3: Na omenjeni način ne moremo dobro narisati jajc s parametri  $P \approx P_{max}$ ,  $T \approx T_{min}$  in  $A \in [A_{min}, A_{max}]$ .



Slika 19: Grafi  $A$ ,  $T$ ,  $P$  za maksimalne in minimalne vrednosti

Poglejmo grafa za omenjena parametra. Vidimo, da sta grafa precej oddaljena med seboj v območju s smiselnimi parametri. Ni takšnega  $A$ , da bi bil manjši kot maksimalna vrednost in da bi bil približek smiseln za vse parametre hkrati. Povedano drugače: če bi želeli narisati jajce s parametri  $P \approx P_{max}$  in  $T \approx T_{min}$ , bi to pomenilo, da bi morali zaiti v območje, kjer je asimetričnost  $A$  nad maksimalno  $A_{max}$ .

Podobno je v primeru vrednosti  $T_{min}$  in  $A_{min}$ .

Ugotovitev 4: Za vse kombinacije maksimalnih in minimalnih vrednosti (razen primera ugotovitve 3) lahko najdemo takšno tretjo vrednost, da je približek še smiseln. Ponekod so sicer približki dokaj nenatančni in v večini smo zelo omejeni pri izbiri tretje vrednosti.

Na primer, če imamo vrednosti blizu  $P_{min}$  in  $A_{max}$ , mora biti  $T$  blizu  $T_{min}$ . Podobno je v primeru vrednosti blizu  $A_{max}$  in  $T \approx 0$ , kjer mora biti  $P$  blizu  $P_{max}$ . Ta dva primera sta tudi najmanj natančni kombinaciji med temi, kjer je še mogoče najti smiselne vrednosti.

S spreminjanjem vrednosti  $T$ -ja, se graf hitro oddalji od izhodišča, pomeni, da smo pri izbiri vrednosti  $T$ -ja zelo omejeni.

Asimetričnost je manj problematična kot topost, ampak ne more biti zelo velika. Asimetričnost ima lokalni maksimum, in se za neki  $k$  ne spreminja veliko glede na  $a$ . Tudi pri velikih  $k$ -jih ne doseže velikih vrednosti.

Najmanj problematična je podolgovatost. Pri spreminjanju  $P$ -ja, se graf ne spreminja tako zelo, kot se druga dva.

## 6. ZAKLJUČEK

Namen raziskovalne naloge je bil raziskati oblike in lastnosti jajc ter risanje le-teh z inverzijo. Med delom pa se je pojavilo novo območje raziskovanja, konstruiranje jajc s krožnimi loki. Delo je večinoma potekalo gladko. Težave pa so se pojavile proti koncu, pri načrtovanju risanja jajc, saj sva ugotovila, da je ta postopek precej omejen.

Definicije za lastnosti jajc (podolgovatost, asimetričnost in topost), številske vrednosti (maksimumi, minimumi in povprečne vrednosti lastnosti) ter sliko 8 sva povzela po člankih [1,2].

Na podlagi teh definicij [1,2] sva sama izpeljala formule za količine, povezane z jajci, nastalimi s pomočjo inverzije.

Idejo za načrtovanje jajca s krožnimi loki sva dobila v knjigi [3], formulo za izračun kota pri konstrukciji jajca s krožnimi loki pa sva izpeljala sama.

Našla sva sliko iz [5], na njej je veliko primerov različnih jajc, na katerih so dobro vidne lastnosti, ki sva jih opazovala.

Pri izračunu polmerov pritisnjenih krogov jajca v skrajnih točka, sva si pomagala s [6], pri inverziji pa s [7].

Večina najinega dela je temeljila na podlagi uporabe programa GeoGebra, ki nama je pomagal pri risanju grafov in konstrukciji jajc. S pomočjo GeoGebre sva prišla tudi do nekaterih, za nadaljevanje potrebnih vrednosti.

Obravnavana tema je še vedno precej odprta za nadaljnje raziskovanje. Raziskovali bi lahko še druge metode risanja jajc, s katerimi bi lahko ustvarili več kombinacij vrednosti parametrov. Skratka, našli bi metodo, ki bi bila še bolj učinkovita in univerzalna, kot je bila naša.

## LITERATURA

- [1] Preston, F. W. The Auk: Ornithological Advances, Vol. 85. *The Shapes of Birds' Eggs: Mathematical Aspects*. July 1968. str. 454-463.
- [2] Preston, F. W. The Auk: Ornithological Advances, Vol. 86. *The Shapes of Birds' Eggs: Extant North American Families*. April 1969. str. 246-264.
- [3] Dixon, Robert. *Mathographics*. Dover Publications, Inc. 1987. str. 3-72. ISBN 0-486-26639-7.
- [4] *Why are Eggs Egg-Shaped?* Mental Floss. Dostopno na spletni strani: <http://mentalfloss.com/article/54073/why-are-eggs-egg-shaped>. Povzeto dne: 4. 1. 2017.
- [5] Adolphe Millot: *Oefs (Jajca)*. Ilustracija iz enciklopedije *Nouveau Larousse Illustré* [1897-1904]. Dostopno na spletni strani (povzeto 31.1.2017): [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Adolphe\\_Millot\\_oeufs-fixed.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Adolphe_Millot_oeufs-fixed.jpg)
- [6] *Ukrivljenost*, Wikipedija, prosta enciklopedija, dostopno na spletu (povzeto 31.1.2017): <https://sl.wikipedia.org/wiki/Ukrivljenost>
- [7] *Geometric inversion*. Spletna stran Xah Math. Dostopno na spletu (povzeto 1.2.2017): [http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves\\_dir/Inversion\\_dir/inversion.html](http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/Inversion_dir/inversion.html)