Mladi za napredek Maribora 2017

34. srečanje

Včrtajmo kroge

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: NINO DJORDJEVIĆ, MIHA MLINARIČ

Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ

Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2017

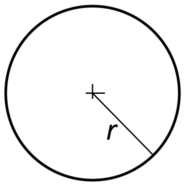
Kazalo

1. Povzetek

Vemo, da lahko v kvadrat včrtamo krog tako, da se dotika vseh stranic kvadrata. Primer takega problema je razporeditev pločevink, kjer pločevinke z okroglim dnom razporedimo tako, da je ploščina ploskve, na kateri stojijo, čim manjša. V raziskovalni nalogi nas je zanimalo, kako v enakostranični trikotnik in kvadrat včrtamo več kot en krog. Pri tem morajo biti polmeri vseh krogov enaki. Kakšna je razporeditev krogov in polmeri krogov, da pokrijejo največjo možno ploščino izbranega lika?

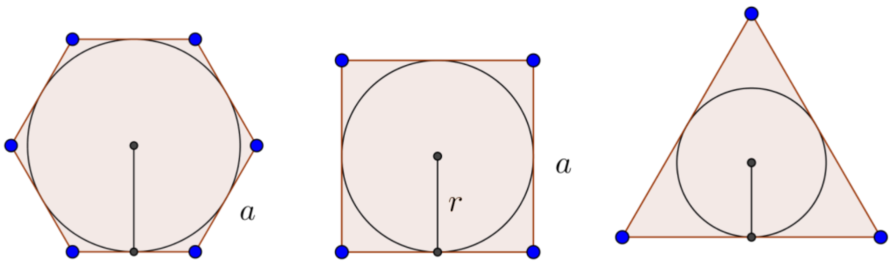
2. Uvod

Krog je lik, omejen s krožnico. Krog je določen s polmerom, r. Če poznamo polmer kroga, lahko izračunamo obseg, $o = 2\pi r$ in ploščino, $p = \pi r^2$ kroga (slika 1).



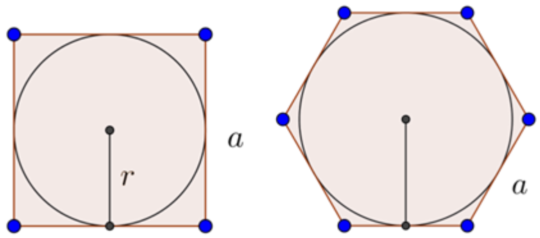
Slika 1

Včrtati krog v lik pomeni, da v dani lik načrtamo krog tako, da je središče kroga v liku in se krog s krožnico dotika stranic lika. Načrtamo največji možni krog. Vsakemu pravilnemu liku, ki ima skladne vse stranice in enake velikosti vseh notranjih kotov lahko vedno včrtamo krog (slika 2). Prikazani so primeri včrtanega kroga v enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik.



Slika 2

Polmer kroga, včrtanega v kvadrat je $\frac{a}{2}$, če je a dolžina stranice kvadrata. Polmer kroga včrtanega v pravilni šestkotnik z dolžino stranice a je $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, saj je polmer enak višini enakostraničnega trikotnika (slika 3).



Slika 3

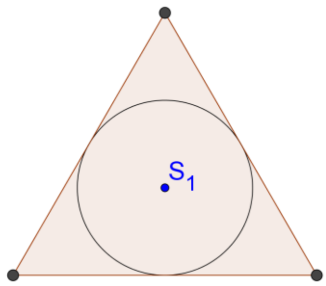
V nadaljevanju predstavimo, kako v enakostranični trikotnik in kvadrat včrtamo več skladnih krogov. Raziščimo možnosti in polmere teh krogov.

3. Krogi v enakostraničnem trikotniku

V nadaljevanju bomo skladne kroge včrtali v enakostranične trikotnike. Krogi imajo največjo možno ploščino, dotikajo se naj stranic trikotnika oziroma med seboj. Dolžina stranice trikotnika je *a*.

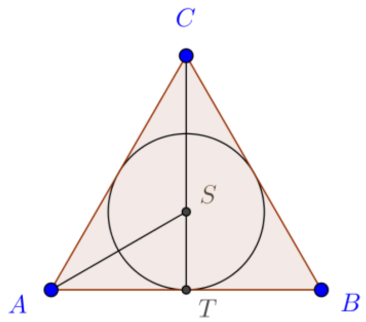
3.1 En krog

Na sliki 4 je prikazan enakostraničen trikotnik z enim včrtanim krogom s središčem S_1. Krog se dotika vseh stranic trikotnika.



Slika 4

V enakostraničnem trikotniku je polmer kroga enak tretjini višine enakostraničnega trikotnika. Kar lahko pokažemo z opazovanjem podobnih trikotnikov, v katerih so enakoležne stranice v enakem razmerju (slika 5).



Slika 5

Trikotnik *ATS* je podoben trikotniku *TCA*, saj imata oba skladne kote, en kot je pravi kot, en 60° in en 30°. Pari enakoležnih stranic so *AT* in *TC*, *TS* in *AT* ter *AS* in *AC*. Ker je $|AT| = \frac{a}{2}$, $|TS| = r$, $|TC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ zapišemo razmerje $|AT|:|TC| = |TS|:|AT|$, oziroma $\frac{a}{2}:\frac{a\sqrt{3}}{2} = r:\frac{a}{2}$. Ker je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov, je $r \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4}$. Izrazimo spremenljivko $r = \frac{a^2}{4}:\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Polmer kroga je zato $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2\sqrt{3}}} = \frac{\boldsymbol{a\sqrt{3}}}{\boldsymbol{6}}$.

Ploščino trikotnika zapišemo $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ali $\frac{a \cdot v_a}{2}$.

Obseg trikotnikazapišemo 3*a.*

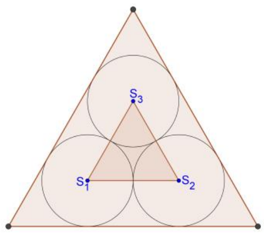
Ploščina kroga je $\pi r^2 = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2}{12}\pi$.

Obseg kroga je $2\pi r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot 2\pi = \frac{a\sqrt{3}}{3}\pi$.

Ploščina dela trikotnika, ki ga ne prekriva krog, je razlika med ploščino trikotnika in ploščino kroga $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{12} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{3a^2\sqrt{3} - \pi a^2}{12} = \frac{(3\sqrt{3}-\pi)\cdot a^2}{12}$. Velikost ploščine enega dela je tretjina te razlike, $\frac{(3\sqrt{3}-\pi)\cdot a^2}{36}$.

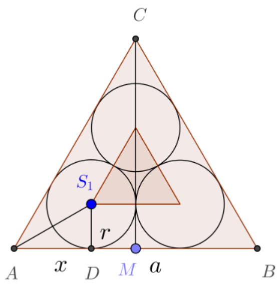
3.2 Trije krogi

V enakostranični trikotnik lahko včrtamo tri skladne kroge, z največjim možnim polmerom (slika 6), ki se dotikajo stranic trikotnika in med seboj. Zanima nas polmer enega izmed krogov. Središča včrtanih skladnih krogov so označena s S_1, S_2 in S_3. Če načrtamo lik $S_1S_2S_3$ dobimo manjši enakostranični trikotnik s stranico 2*r*.



Slika 6

Polmer kroga želimo zapisati z dolžino stranice trikotnika, *a*. Opazujemo trikotnik ADS_1, ki je podoben trikotniku *AMC*. Oba imata skladne kote (slika 7).



Slika 7

V podobnih trikotnikih je razmerje enakoležnih stranic (nasproti skladnim kotom) enako.

Tako je $x: |CM| = r: \frac{a}{2}$. Daljica *CM* je višina enakostraničnega trikotnika z višino $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Iz sorazmerja je $\frac{ax}{2} = \frac{ar\sqrt{3}}{2}$, po krajšanju je $x = r\sqrt{3}$.

Enakostranični trikotnik je osno simetrični lik, zato je

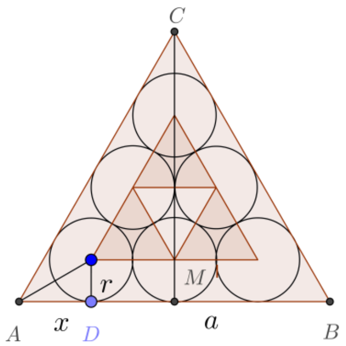
$$a = 2x + 2r = 2r\sqrt{3} + 2r = 2r\left(\sqrt{3} + 1\right).$$

Polmer enega izmed skladnih krogov je $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2(\sqrt{3}+1)}}$.

Z znanim polmerom lahko zapišemo ploščino enega kroga, $\frac{\pi a^2}{4(\sqrt{3}+1)^2}$.

3.3 Šest krogov

Po poskusih in razmisleku ugotovimo, da je naslednja možnost včrtanja šest skladnih krogov. Ob en stranici so trije, nad njimi dva in nato še en krog (slika 8).

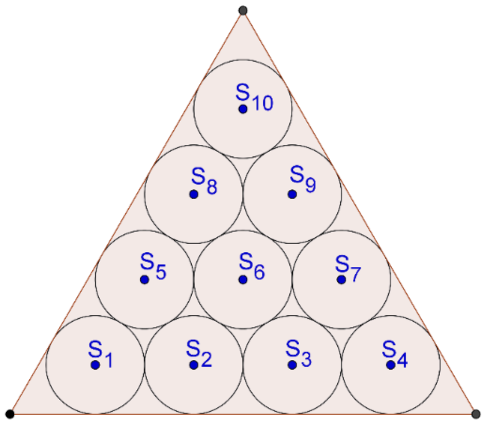


Slika 8

Spet je trikotnik *ADS*$_1$ podoben trikotniku *AMC*. Oba imata skladne kote (slika 8). Zapišemo sorazmerje enakoležnih stranic $x{:}\,|CM| = r{:}\,\frac{a}{2}$. Tako kot v primeru včrtanja treh krogov zapišemo $x = r\sqrt{3}$. Iz enakosti $a = 2x + 4r = 2r\sqrt{3} + 4r = 2r(\sqrt{3} + 2)$ je polmer včrtanega kroga $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2(\sqrt{3}+2)}}$.

3.4 Deset krogov

V nadaljevanju ob eni stranici načrtamo štiri skladne kroge, nad njimi tri skladne kroge, nato dva in še enega (slika 9). Skupaj je torej deset skladnih krogov v trikotniku. Glede na zgornje primere tudi v tem primeru po enakem razmisleku zapišemo dolžino $x = r\sqrt{3}$. Iz enakosti $a = 2x + 6r = 2r\sqrt{3} + 6r = 2r(\sqrt{3} + 3)$ izrazimo polmer $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2(\sqrt{3}+3)}}$.



Slika 9

3.5 Trikotniška števila

V enakostranični trikotnik lahko včrtamo 1, 3, 6, 10 krogov. Zapisano je zaporedje trikotniških števil. Zaporedje se začne s številom 1 (+2), 3 (+3), 6 (+4), 10 (+5), 15 (+6), 21 … Trikotniška števila so vsote prvih *n* naravnih števil. Peto trikotniško število je število 15. Je vsota prvih petih naravnih števil (1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15). Ob eni stranici načrtamo pet krogov, nad njimi štiri, nato tri, dva in en krog. Polmer tega kroga bi zapisali $r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+4)}$.

Dvajseto trikotniško število izračunamo z vsoto prvih dvajset naravnih števil (1 + 2 + 3 + … + 20), kar pa lahko izračunamo tudi s formulo $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{20\cdot 21}{2} = 210$. V enakostranični trikotnik lahko včrtamo 210 skladnih krogov, ob eni stranici je dvajset krogov. Kolikšen pa je polmer enega kroga? Zapišimo izračunane polmere v preglednico (tabela 1).

Zaporedno število, *n*	Število včrtanih krogov (trikotniška števila)	Polmer kroga
1	1	$\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$
2	3	$\frac{a}{2(\sqrt{3}+1)}$
3	6	$\frac{a}{2(\sqrt{3}+2)}$
4	10	$\frac{a}{2(\sqrt{3}+3)}$

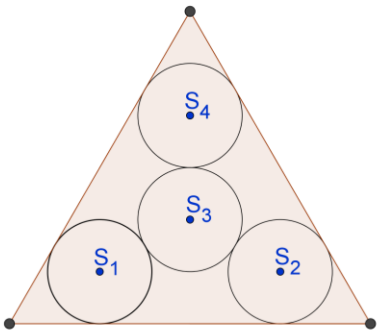
Tabela 1

Iz zapisov v tretjem stolpcu sklepamo, da ima vsak polmer kroga zapis oblike $\frac{a}{2(\sqrt{3}+k)}$, kjer s k označimo spremenljivko. Opazimo, da je k vedno za ena manjši kot je zaporedno število. Za dvajseto trikotniško število je polmer $r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+19)}$.

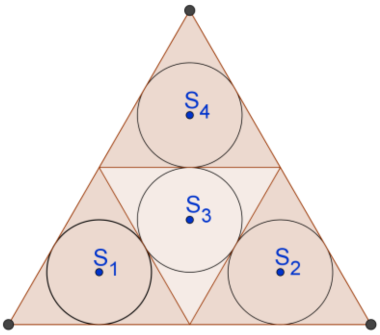
Za prvo trikotniško število je $\frac{a}{2(\sqrt{3}+0)} = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, kar je naša izračunana vrednost. Polmer enega izmed skladnih včrtanih krogov v enakostranični trikotnik izračunamo s formulo $\frac{a}{2(\sqrt{3}+(n-1))}$. Pri tem je a dolžina stranice trikotnika, n je izbrano trikotniško število. Izbrano trikotniško število določa, koliko skladnih krogov lahko včrtamo v enakostranični trikotnik.

3.6 Še o krogih v enakostraničnem trikotniku

V enakostranični trikotnik lahko včrtamo tudi dva največja skladna kroga, vendar sta to lahko dva od treh. Zanimivo je načrtovanje štirih skladnih krogov (slika 10).

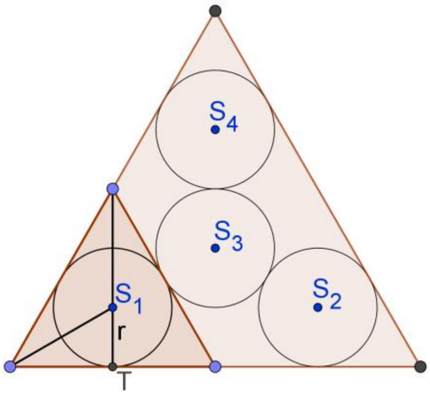


Slika 10



Slika 11

Krogi imajo središča S_1, S_2, S_3 in S_4. Vsakemu krogu lahko očrtamo enakostraničen trikotnik, ki se dotika vseh njihovih stranic (slika 11). Stranica enega manjšega trikotnika je dolga $\frac{a}{2}$. Torej lahko uporabimo enak postopek, kot za en krog v trikotniku (slika 12).

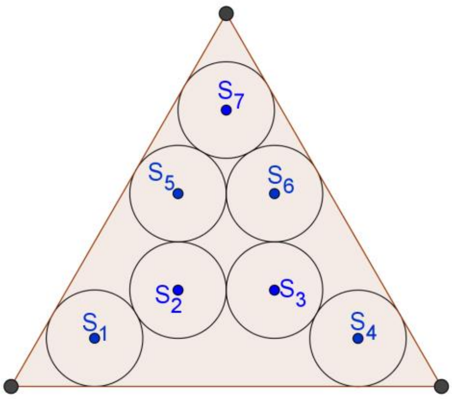


Slika 12

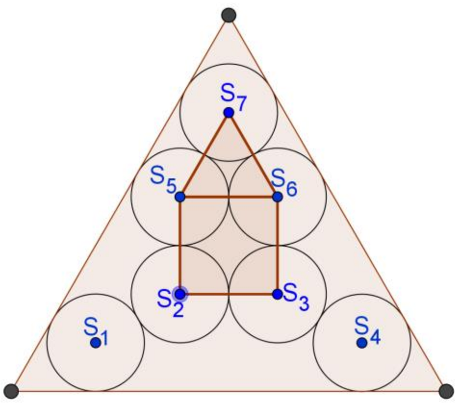
Torej izvemo, da je polmer enega kroga: $\frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Zato je ploščina enega kroga: $\pi(\frac{a}{4\sqrt{3}})^2$ in obseg: $2\pi(\frac{a}{4\sqrt{3}})$. Ploščino vseh delov trikotnika, ki jih krogi ne prekrivajo pa izračunamo tako da od ploščine trikotnika odštejemo ploščino vseh štirih krogov.

Na sliki 13 vidimo simetrično razporejenih sedem krogov v enakostraničnem trikotniku.

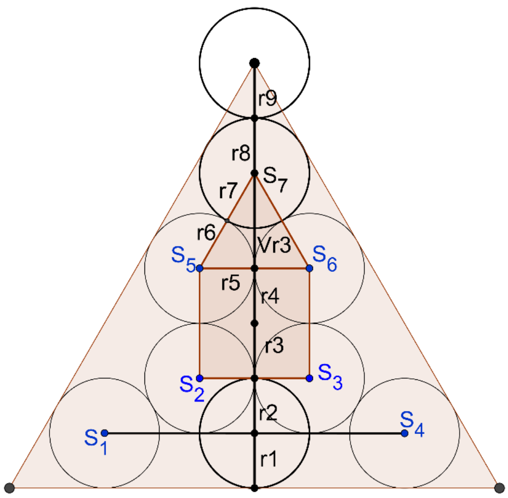


Slika 13



Slika 14

Krogi imajo središča S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 in S_7. Narisali smo jih s pomočjo kvadrata in manjšega enakostraničnega trikotnika (slika 14).



Slika 15

Višino trikotnika sestavlja šest polmerov in višina manjšega enakostraničnega trikotnika (slika 15). Da izrazimo polmer krogov s stranico *a*, smo najprej izračunali višino manjšega trikotnika, katerega stranice so enake dolžini dveh polmerov. Višino manjšega trikotnika *n*, zapišemo s Pitagorovim izrekom: $\sqrt{2r^2 - r^2} = n$ torej je $n = r\sqrt{3}$. Vemo, da se višina enakostraničnega trikotnika izračuna s formulo $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, kjer je z *a* označena dolžina stranice trikotnika. Ker je višina trikotnika vsota šestih polmerov (6*r*) in višine manjšega trikotnika ($r\sqrt{3}$), zapišemo enačbo $6r + r\sqrt{3} = r(6+\sqrt{3}) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Izrazimo polmer kroga

$$\boldsymbol{r} = \frac{\frac{\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{6}+\sqrt{\boldsymbol{3}}} = \frac{\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}(\boldsymbol{6}+\sqrt{\boldsymbol{3}})} = \frac{\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{12}+\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{3}}} = \frac{\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{3}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{12}+\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{3}})} = \frac{\boldsymbol{3a}}{\boldsymbol{12}\sqrt{\boldsymbol{3}}+\boldsymbol{6}} = \frac{\boldsymbol{3a}}{\boldsymbol{3}(\boldsymbol{4}\sqrt{\boldsymbol{3}}+\boldsymbol{2})} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}+\boldsymbol{4}\sqrt{\boldsymbol{3}}}.$$

3.7 Preglednica možnosti

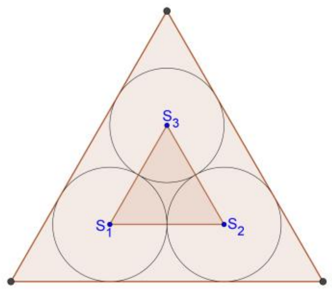
Prikažimo polmere včrtanih krogov v preglednici (tabela 2). Nekako med zaporedno zapisanimi polmeri krogov ne prepoznamo nobenega posebnega pravila.

Število včrtanih krogov	Polmer kroga
1	$\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$
3	$\frac{a}{2(\sqrt{3}+1)}$
4	$\frac{a\sqrt{3}}{12}$
6	$\frac{a}{2(\sqrt{3}+2)}$
7	$\frac{a}{2+4\sqrt{3}}$
10	$\frac{a}{2(\sqrt{3}+3)}$

Tabela 2

3.8 Ugotovitve

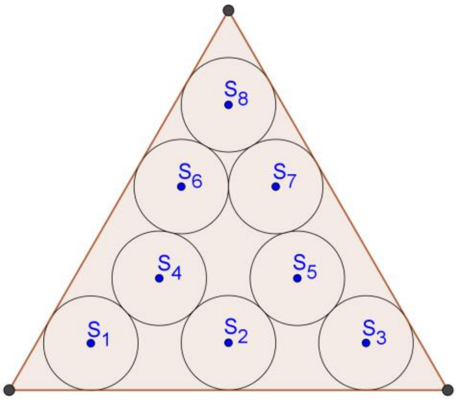
V enakostranični trikotnik lahko včrtamo izbrano število skladnih krogov z največjo ploščino. Če včrtamo katerokoli število krogov, ki je trikotniško (1, 3, 6, 10, 15…), lahko povežemo središča zunanjih krogov in dobimo manjši enakostranični trikotnik (slika 16).



Slika 16

Polmeri krogov se manjšajo s številom krogov, ki jih včrtamo v trikotnik. Pri trikotniških številih števila včrtanih krogov polmer kroga izračunamo $\frac{a}{2(\sqrt{3}+(n-1))}$, kjer je *n* zaporedno trikotniško število. Za *n* = 3 (tretje trikotniško število), včrtamo 6 krogov in je $r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+2)}$.

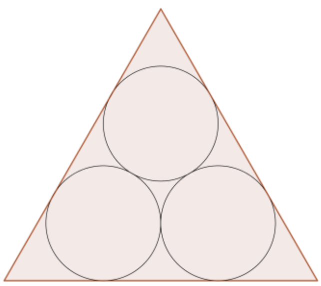
V trikotnik lahko včrtamo tudi tako število krogov, ki ne spada med trikotniška števila. Prikazali smo primera za štiri in sedem skladnih krogov. Včrtamo pa lahko tudi 8 krogov (slika 17) , 11 krogov, 12 krogov ,13 krogov, 16 krogov itd.

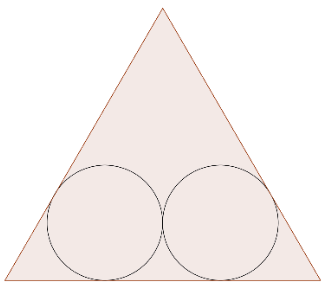


Slika 17

Za vsakega izmed teh primerov je potrebno polmer kroga, zapisan s stranico trikotnika *a*, posebej izračunati. Ne moremo vnaprej napovedati, kako je polmer izražen s stranico.

V enakostraničen trikotnik pa sicer lahko včrtamo tako število krogov, ki je za ena manjše od poljubnega trikotniškega števila, vendar vedno preostane prostor za še en krog (sliki 18 in 19). Polmer največjega možnega kroga pri včrtanih dveh krogih je tako enak polmeru včrtanega kroga pri treh včrtanih krogih.


slika 18

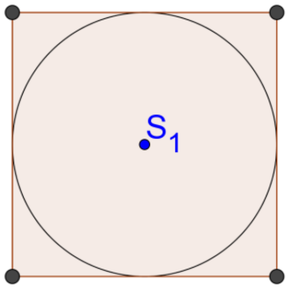

slika 19

4. Krogi v kvadratu

V nadaljevanju bomo skladne kroge včrtali v kvadrat. Krogi imajo največjo možno ploščino, dotikajo se naj stranic kvadrata oziroma med seboj. Dolžina stranice kvadrata je a.

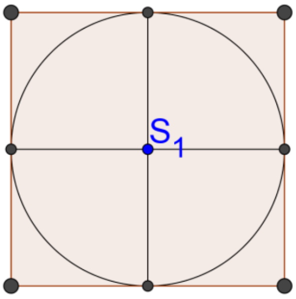
4.1 En krog

Na sliki 20 je prikazan kvadrat z enim včrtanim krogom s središčem S_1. Krog se dotika vseh stranic kvadrata.

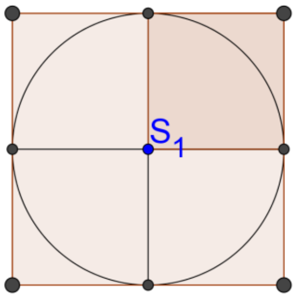


Slika 20

V kvadratu je polmer enega kroga enak polovici dolžine stranice kvadrata. To lahko dokažemo tako, da stranicam kvadrata narišemo simetrale. Tako kvadrat razdelimo na štiri enako velike kvadrate, katerih stranice so dolge $\frac{a}{2}$ (slika 21, 22). Ker je stranica kvadrata enaka polmeru včrtanega kroga, je $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}$.



Slika 21



Slika 22

Ko smo dobili polmer kroga, pa lahko izračunamo tudi njegovo ploščino in obseg.

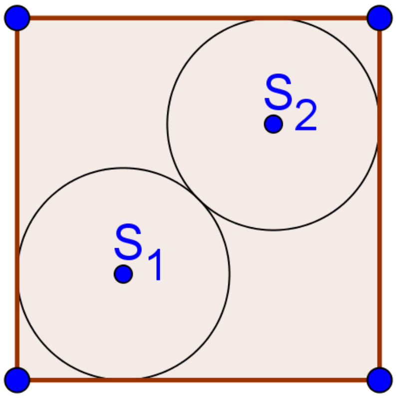
Ploščina kroga: $\pi(\frac{a}{2})^2$, obseg kroga: $2\frac{a}{2}\pi$. Z izračunano ploščino kroga in kvadrata lahko izračunamo tudi ploščino vseh delov v kvadratu, ki jih krog ne pokriva.

Ploščina vseh delov: $a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{4a^2 - \pi a^2}{4}$.

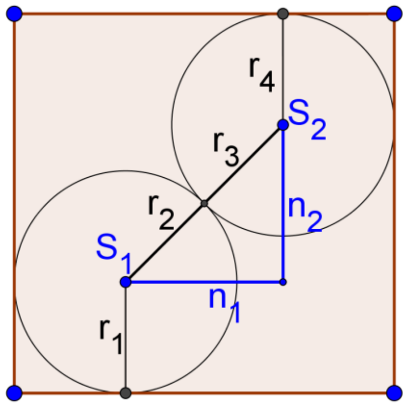
Ploščina enega dela: $\frac{a^2 - \frac{\pi a^2}{4}}{4} = \frac{4a^2 - \pi a^2}{16}$.

4.2 Dva kroga

Na sliki 23 je kvadrat z dvema največjima možnima krogoma v njem, kroga sta enake velikosti in imata središči S_1 ter S_2.

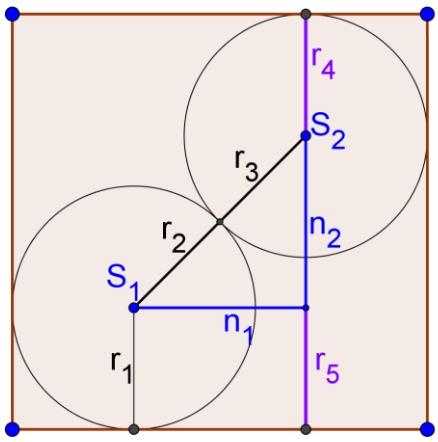


Slika 23



Slika 24

Na sliki 24 vidimo štiri polmere krogov označene s črko *r* ($r = r_1 = r_2 = r_3 = r_4$). Daljica S_1S_2 ima dolžino 2*r* in je hipotenuza enakokrakega pravokotnega trikotnika s kateto *n* ($n_1 = n_2 = n$).



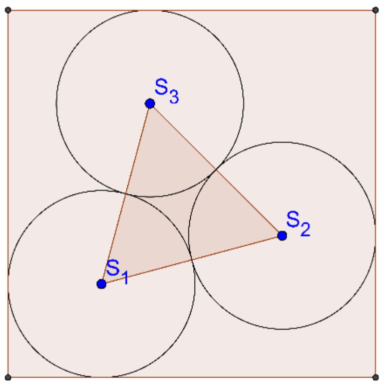
Slika 25

Na sliki 25 prikažemo, da dolžino stranice kvadrata lahko zapišemo z vsoto, *a* = *r* + *n* + *r*. Zapišemo Pitagorov izrek za enakokraki pravokotni trikotnik s kateto *n*, $n^2 + n^2 = (2r)^2$. Iz zapisane enakosti je $2n^2 = 4r^2$, oziroma $n^2 = 2r^2$. Izrazimo $n = r\sqrt{2}$. Ko vemo kako se izračuna *n* iz polmera, uporabimo enakost *a* = *r* + *n* + *r*. Dolžina stranice kvadrata se izraža s polmerom kroga, $a = 2r + r\sqrt{2} = r(2 + \sqrt{2})$.

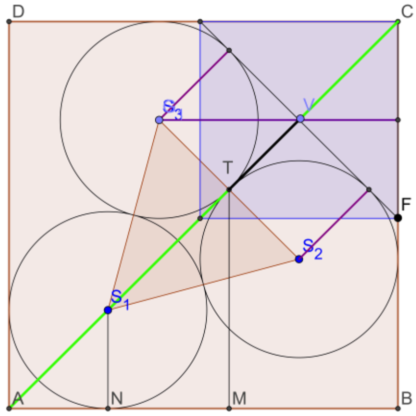
Potem je polmer kroga $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2+\sqrt{2}}}$.

Ploščino in obseg dveh krogov izračunamo s formulama πr^2 in $2r\pi$. Ploščina delov v kvadratu, ki jih krog ne prekriva pa tako, da od ploščine kvadrata odštejemo ploščino obeh krogov, $a^2 - 2\pi r^2$.

4.3 Trije krogi



Slika 26



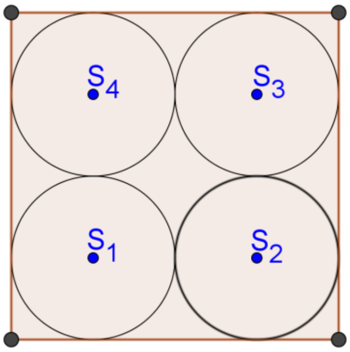
Slika 27

V kvadrat smo včrtali tri kroge enake velikosti s središči v točkah S_1, S_2 in S_3 (slika 26). Da bi lahko izračunali polmer krogov, smo najprej označili oglišča kvadratov s točkami *A*, *B, C, D* in narisali diagonalo skozi točki *A* in *C* (slika 27). Diagonalo kvadrata razdelimo na štiri dele: $|AS_1|$, $|TS_1|, |TV|\ in\ |VC|$. Dolžina daljice TV je enaka polmerom kroga $|TV| = r$, dolžino daljice $|AS_1|$ lahko izračunamo s Pitagorovim izrekom. Stranici $|AN|\ in\ |NS_1|$ sta polmera, uporabimo formulo za računanje dolžine diagonale v kvadratu, vendar namesto stranice *a* uporabimo *r*, $|AS_1| = r\sqrt{2}$. Dolžino stranice $|TS_1|$ tudi izračunamo s Pitagorovim izrekom, vemo, da je hipotenuza trikotnika S_1S_2T enaka 2*r* in da je kateta *r* oz. polmer lahko izračunamo tretji del diagonale kvadrata. Zapišemo enačbo in iskani del označimo z *n*, $n = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}$. Ostala nam je še samo dolžina daljice $|VC|$. Najprej načrtamo tangento na krožnici s središčema S_2 in S_3 ki seka stranici največjega kvadrata in nato kvadrat, ki ima za oglišči dve novo nastali točki in točko *C*. Dolžina stranice novega kvadrata je 2*r*. S Pitagorovim izrekom izračunamo diagonalo kvadrata in jo delimo z 2, saj upoštevamo samo polovico. Tako je $\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{(2r^2)+(2r)^2}}{2} = \frac{\sqrt{8r^2}}{2} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$.

Lahko zapišemo enakost $a\sqrt{2} = r + r\sqrt{2} + r\sqrt{3} + r\sqrt{2} = r(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Izrazimo polmer r, $\boldsymbol{r} = \frac{a\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}+4+\sqrt{6}} = \frac{a}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}}$. Če bi hoteli izračunati ploščino krogov in nepokritega dela kvadrata, bi najprej izračunali ploščino vseh krogov in jo odšteli od ploščine kvadrata.

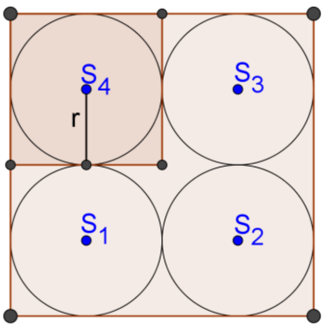
4.4 Štirje krogi

Na sliki 28 je prikazan kvadrat s stranico a v katerem so včrtani štirje največji možni skladni krogi. Središča krogov so S_1, S_2, S_3 in S_4 . Vsak od njih se dotika dveh stranic kvadrata in dveh krožnic sosednjih krogov.

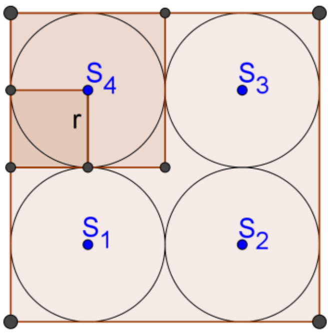


Slika 28

Ugotovili smo, da lahko enega od teh krogov včrtamo v manjši kvadrat s stranico, dolgo $\frac{a}{2}$. Ker poznamo dolžino stranice, lahko izračunamo obseg, $4 \cdot \frac{a}{2} = 2a$ in ploščino, $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$ (slika 29). V kvadratu s stranico $\frac{a}{2}$ načrtamo še manjši kvadrat (slika 30), ki ima stranice dvakrat manjše od kvadrata s stranico $\frac{a}{2}$. Stranice še manjšega kvadrata so dolge natanko $\frac{a}{4}$. Stranica manjšega tega kvadrata je enaka polmeru enega kroga, torej je $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{4}}$.



Slika 29



Slika 30

Zdaj, ko imamo polmer kroga, lahko izračunamo njegovo ploščino in obseg.

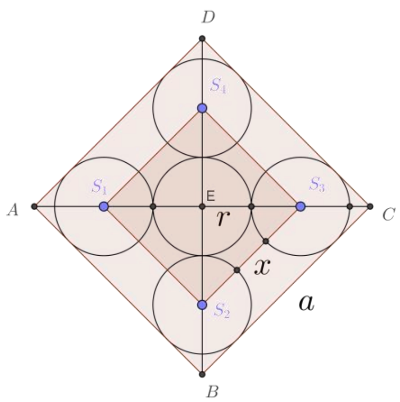
Ploščina kroga je $\pi(\frac{a}{4})^2$, obseg kroga je $2 \cdot \frac{a}{4}\pi = \frac{a\pi}{2}$.

Če od ploščine kvadrata odštejemo ploščino vseh krogov, dobimo ploščino dela kvadrata, ki ni prekrit s krogi.

Ploščina: $a^2 - 4\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{4a^2-\pi a^2}{4} = \frac{(4-\pi)a^2}{4}$.

4.5 Pet krogov

V kvadrat *ABCD* s stranico *a* lahko razporedimo tudi pet skladnih krogov s polmerom *r* (slika 31).



Slika 31

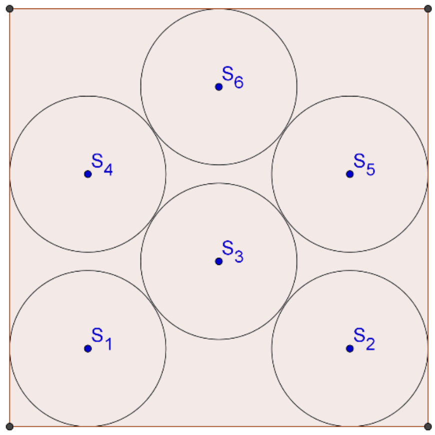
Stranica kvadrata $S_1 S_2 S_3 S_4$ je $2r + x$. Diagonala tega kvadrata je $4r$ (štirje polmeri včrtanih krogov). Diagonalo kvadrata lahko po Pitagorovem izreku zapišemo tudi $(2r + x)\sqrt{2} = 4r$. Iz enačbe izrazimo *x*, $2r \cdot \sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4r$ in $x\sqrt{2} = 4r - 2r\sqrt{2}$,

tako je $x = \frac{4r}{\sqrt{2}} - 2r = 2r\sqrt{2} - 2r = 2r(\sqrt{2} - 1)$.

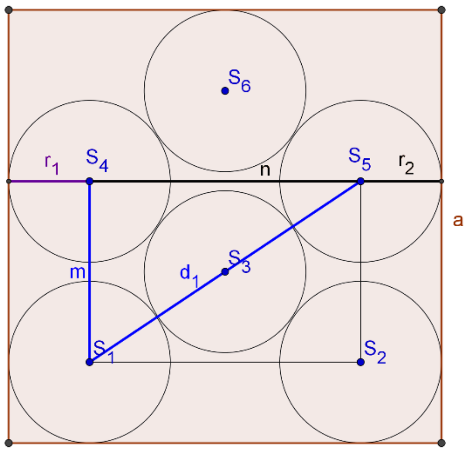
Upoštevamo, da je $a = 4r + x = 4r + 2r\sqrt{2} - 2r = 2r + 2r\sqrt{2} = 2r(1 + \sqrt{2})$. Tako je polmer včrtanega kroga $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2+2\sqrt{2}}}$.

4.6 Šest krogov

Poglejmo, kako v kvadrat *ABCD* razporedimo šest skladnih krogov (slika 32).



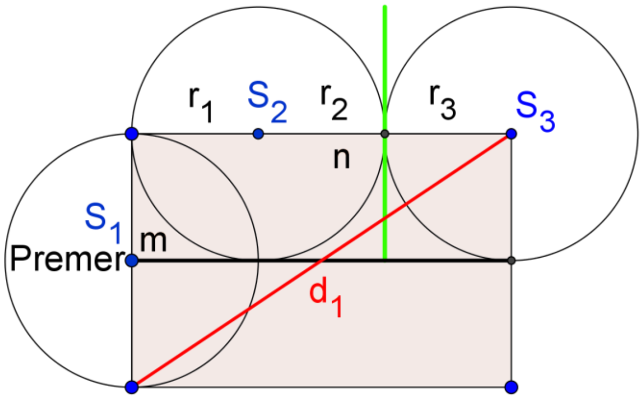
Slika 32



Slika 33

Opazujemo pravokotnik z oglišči $S_1S_2S_4S_5$ (slika 33). Dolžino stranice kvadrata *a* bomo izrazili z daljšo stranico pravokotnika n in dvema polmeroma $r = r_1 = r_2$. Zapišemo enačbo $a = 2r + n$. Uporabimo Pitagorov izrek, $n = \sqrt{{d_1}^2 - m^2}$. Vemo, da je diagonala pravokotnika $d_1 = 4r$. Tako je $n = \sqrt{4r^2 - m^2}$.

Stranico pravokotnika *m* moramo prav tako izraziti s polmerom krogov *r*. Poglejmo pravokotnik $S_1S_2S_4S_5$ nekoliko bolj natančno (slika 34).



Slika 34

Najprej narišemo krožnico, ki ima središče v razpolovišču stranice m in poteka skozi obe oglišči krajše stranice pravokotnika (oznake središč novih krogov niso enake oznakam središč na sliki 32). Načrtamo krožnico s središčem v enem oglišču (krožnico z enakim pomerom kot prvotna krožnica), ki seka daljšo stranico, nato lahko načrtamo še eno krožnico s središčem na daljši stranici n, ki se dotika kročice s središčem S_3 in poteka skozi oglišče pravokotnika. Ugotovimo, ker so vsi trije načrtani krogi skladni, da je dolžina krajše stranica m enaka dvema dolžinama polmerov: $m = 2r$, daljša stranica n je enaka trem dolžinam polmerov krožnic $n = 3r$. Zapišemo razmerje $n: m = 3r: 2r \Rightarrow n: m = 3: 2$. Iz razmerja izrazimo eno dolžino stranice z drugo, $2n = 3m$, $n = \frac{3m}{2}$, $m = \frac{2n}{3}$. Uporabimo Pitagorov izrek za diagonalo pravokotnika, kjer je $m = \frac{2n}{3}$ in $d_1 = 4r$. Tako je

$$4r = \sqrt{n^2 + (\frac{2n}{3})^2} = \sqrt{n^2 + \frac{4n^2}{9}} = \sqrt{\frac{9n^2+4n^2}{9}} = \sqrt{\frac{13n^2}{9}} = \frac{n\sqrt{13}}{3}$$

Iz enačbe $4r = \frac{n\sqrt{13}}{3}$ izrazimo n:

$$4r = \frac{n\sqrt{13}}{3}$$

$$12r = n\sqrt{13}$$

$$\frac{12r}{\sqrt{13}} = n$$

Ker je $a = 2r + n$ (slika 32), vstavimo $n = \frac{4r\sqrt{13}}{3}$. Tako je $a = 2r + \frac{12r}{\sqrt{13}}$.

Izrazimo polmer kroga r: $a = 2r + \frac{12r}{\sqrt{13}}$

$$a = r(2 + \frac{12}{\sqrt{13}})$$

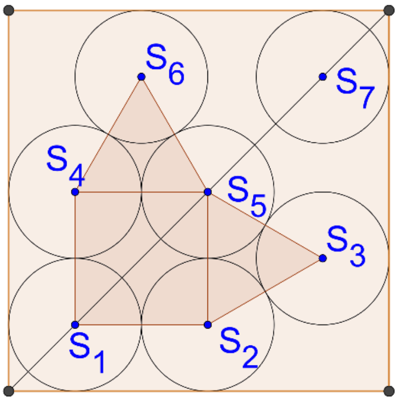
$$\frac{a}{2 + \frac{12}{\sqrt{13}}} = r$$

$$\boldsymbol{r = \frac{a}{2 + \frac{12}{\sqrt{13}}}}$$

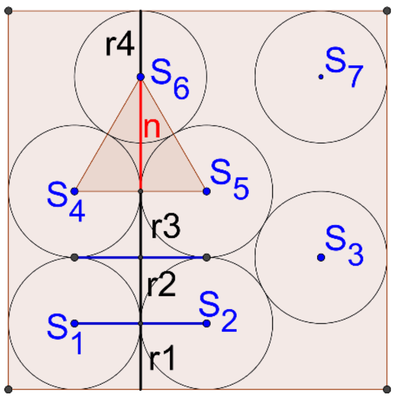
S tem lahko sedaj izračunamo ploščino krogov v odvisnosti od stranice *a*.

4.7 Sedem krogov

V kvadrat s stranico *a* lahko razporedimo tudi sedem skladnih, največjih možnih krogov (slika 35).



Slika 35

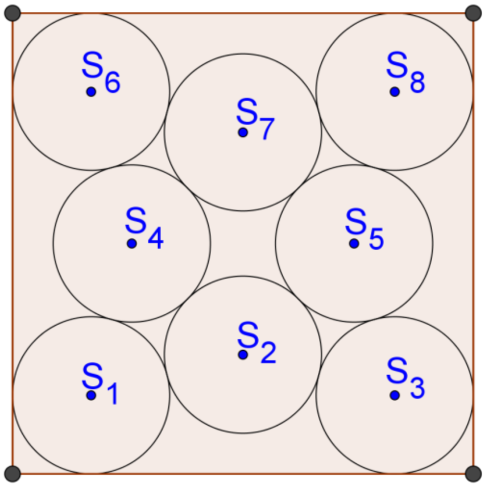


Slika 36

Krogi so v kvadratu razporejeni simetrično. Središča krogov S_1 S_2 S_4 S_5 so oglišča kvadrata s stranico 2*r*. Na sliki prav tako opazimo dva skladna enakostranična trikotnika, $S_2S_3S_5$ in $S_4S_5S_6$. Krog s središčem S_7 ima središče na diagonali kvadrata, vendar se lega središča lahko spreminja (lahko se dotika stranic kvadrata ali kroga s središčem S_3). Za izračun polmera lahko razdelimo višino kvadrata, ki je enaka stranici *a*, na štiri polmere in višino manjšega enakostraničnega trikotnika (slika 36). Najprej izračunamo višino *n* manjšega trikotnika, $n = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$. Ko imamo izračunano višino *n* manjšega trikotnika, zapišemo enačbo za stranico *a*, $a = 4r + r\sqrt{3} = r(4 + \sqrt{3})$. Izrazimo polmer, $\boldsymbol{r = \frac{a}{4+\sqrt{3}}}$.

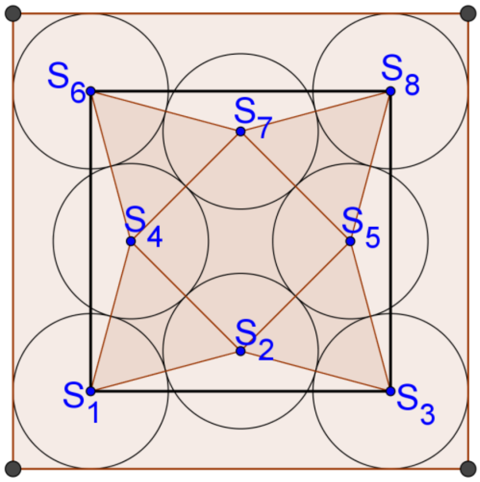
4.8 Osem krogov

V kvadrat lahko načrtamo tudi osem skladnih krogov, s polmerom *r* (slika 37).



Slika 37

Zapisati želimo polmer enega kroga (slika 38).



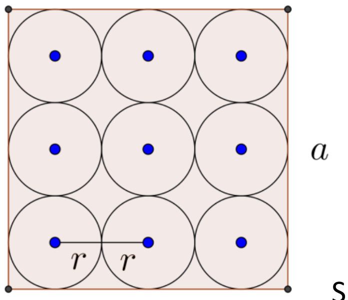
Slika 38

Vse daljice, ki imajo krajišča v središčih krogov, ki se dotikajo so skladne, njihovo dolžino označimo z $x = 2r$. Središča krogov so tako oglišča enakostraničnih trikotnikov in kvadratov. Stranico kvadrata $S_1S_3S_8S_6$ označimo z y. Diagonala tega kvadrata S_1S_8 je $y\sqrt{2}$. Dolžina te diagonale je vsota dveh dolžin višin enakostraničnih trikotnikov ($S_1S_2S_4$ in $S_7S_5S_8$) in ene dolžine stranice kvadrata $S_1S_5S_7S_4$. Tako je $y\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} + x = x(\sqrt{3}+1)$. Izrazimo dolžino $y = \frac{2r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$. Po racionalizaciji je $y = r(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$.

Dolžina stranice $a = 2r + y = 2r + r(\sqrt{3}+1)\sqrt{2} = r(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})$. Polmer kroga v kvadratu je zato $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

4.9 Devet krogov

V kvadrat s stranico *a* lahko včrtamo tudi devet skladnih krogov s polmerom *r* (slika 39).



Slika 39

Dolžina stranice je vsota dolžin šestih polmerov. Tako je $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{6}}$.

4.10 Preglednica možnosti

Zberimo podatke o številu krogov in polmeru enega kroga v preglednici (tabela 3).

Število včrtanih krogov	Polmer kroga
1	$\frac{a}{2}$
2	$\frac{a}{2+\sqrt{2}}$
3	$\frac{a}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}}$
4	$\frac{a}{4}$
5	$\frac{a}{2+2\sqrt{2}}$
6	$\frac{a}{2+\frac{12}{\sqrt{13}}}$
7	$\frac{a}{4+\sqrt{3}}$
8	$\frac{a}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$
9	$\frac{a}{6}$

Tabela 3

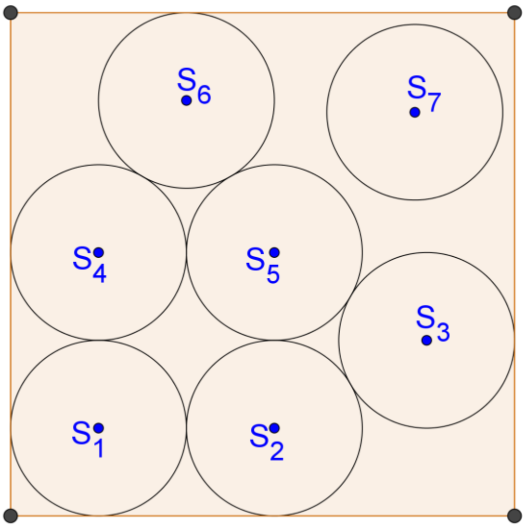
Z opazovanjem polmerov pri številu včrtanih krogov 1, 4, 9 opazimo, da so polmeri $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4}$ in $\frac{a}{6}$. Ker so števila 1, 4, 9 kvadratna števila ($1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$) predvidevamo, da bi za naslednje kvadratno število $16 = 4^2$ polmer kroga bil $\frac{a}{8}$. Kar tudi drži, saj pri načrtovanju osmih skladnih krogov v kvadrat ležijo štirje ob eni stranici, pri tem je $a = 8r$.

V kvadratu, v katerem je *n*-to kvadratno število skladnih krogov (n^2), je polmer kroga $\frac{a}{2n}$.

V ostalih možnostih včrtovanja skladnih krogov očitnega pravila za izračun polmera kroga nismo mogli ugotoviti.

4.11 Ugotovitve

V kvadrat lahko včrtamo katerokoli število skladnih krogov, ki se dotikajo med seboj in stranic kvadrata. Izjema je pri nekaterih krogih npr. 7 krogih, saj lahko središče kroga v desnem zgornjem kotu premikamo po diagonali kvadrata, tako da se ne dotika niti stranice kvadrata niti katerega koli drugega kroga včrtanega v kvadrat (slika 40).



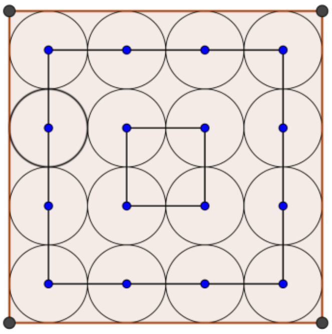
Slika 40

V primeru, ko je včrtano število krogov kvadratno število, izračunamo polmer kroga $r = \frac{a}{2n}$. Pri tem *n* predstavlja zaporedno kvadratno število (tabela 4).

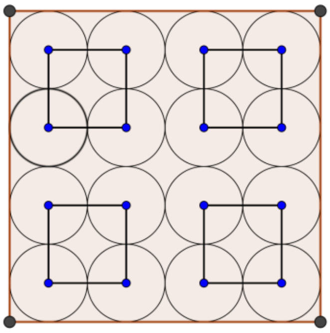
Kvadratno število (zaporedno)	Število včrtanih krogov	Polmer kroga
1	1	$\frac{a}{2}$
2	4	$\frac{a}{4}$
3	9	$\frac{a}{6}$
4	16	$\frac{a}{8}$
5	25	$\frac{a}{10}$
6	36	$\frac{a}{12}$

Tabela 4

Pri kvadratnem številu včrtanih krogov lahko središča krogov povežemo z daljicami in oblikujemo nove kvadrate (slika 41 in 42).

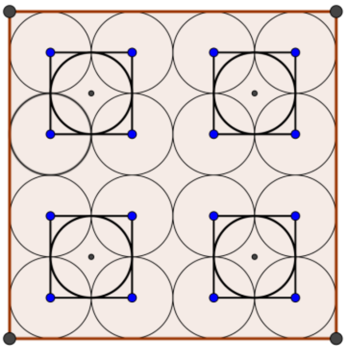


Slika 41



Slika 42

Če včrtamo krog v kvadrate, povezane s štirimi središči dotikajočih krogov, dobimo kroge, ki imajo enak polmer kot že prej včrtani krogi (slika 43).



Slika 43

5. Družbena odgovornost

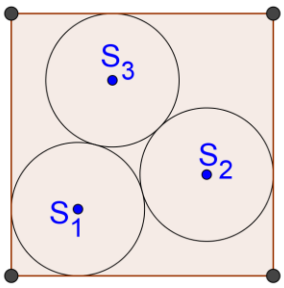
Razporejanje izbranega števila skladnih krogov (z največjim možnim polmerom) v kvadrat je na prvi pogled zabavna matematična naloga. Smo pa ugotovili, da najbrž razporejanje uporabljajo tudi v industriji, kjer oblikujejo embalažo. Prav gotovo morajo izračunati, kako čim bolj učinkovito v embalažo (škatla) zložiti izdelke (recimo pločevinke). Enostaven primer je vprašanje, kolikšna naj bo dolžina stranice kvadrata (recimo dna kvadratne škatle), da vanjo položimo dve pločevinki. Recimo, da imata pločevinki polmer 46 mm. Ker torej poznamo podatek za krog, izračunamo dolžino stranice kvadrata:

$$a = r\left(2+\sqrt{2}\right) = 46\ \mathrm{mm}\cdot\left(2+\sqrt{2}\right) \approx 157.1\mathrm{mm}\ .$$

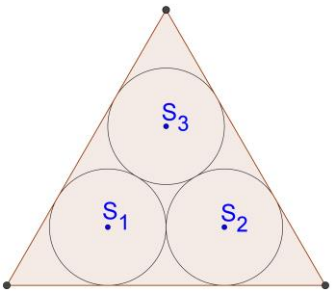
Ugotavljamo, da nam znanja, pridobljena v procesu raziskovanja lahko pomagajo tudi pri reševanju vsakdanjih, življenjskih problemov.

6. Zaključek

V raziskovalni nalogi smo v kvadrat in enakostranični trikotnik včrtali skladne kroge z največjim možnim polmerom. Raziskali smo možnosti glede na število in razporeditev krogov. Krogi so se dotikali med seboj in s stranicami kvadrata oziroma enakostraničnega trikotnika (primer slika 44 in 45). Pri večjem številu krogov so se nekateri krogi dotikali le drugih krogov.



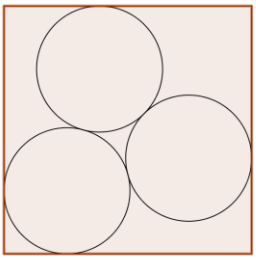
Slika 44

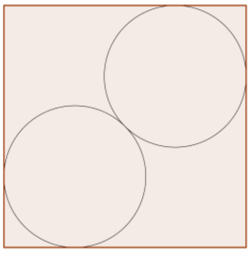


Slika 45

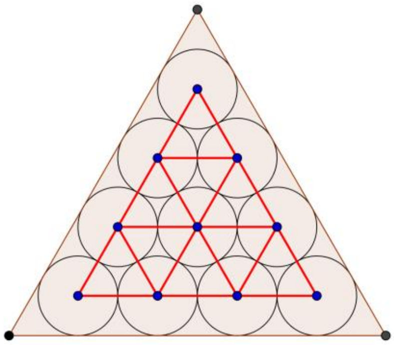
Pri enakostraničnem trikotniku smo ugotovili, če je vanj včrtano trikotniško število (1, 3, 6, 10, 15 …) krogov, polmer kroga izrazimo s dolžino stranice trikotnika $r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+(n-1))}$, kjer *n* predstavlja zaporedno trikotniško število. V trikotnik lahko včrtamo tudi druga števila krogov kot so samo trikotniška števila (recimo štiri ali sedem). Če pa včrtamo v trikotnik za ena manj krogov, kot je poljubno trikotniško števil, vedno ostane prostor še za dodaten krog.

V kvadrat lahko včrtamo kvadratno število krogov (1, 4, 9, 16, 25 …). Polmer takega kroga izrazimo $r = \frac{a}{2n}$, kjer je *n* zaporedno kvadratno število. V kvadrat lahko včrtamo katerokoli število skladnih krogov in nikoli ne ostane prostora za še en enako velik krog, kot pri enakostraničnem trikotniku (slika 46 in 47).

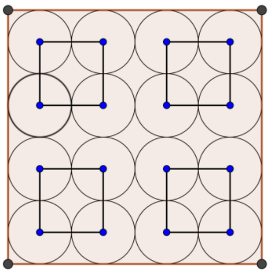

Slika 46

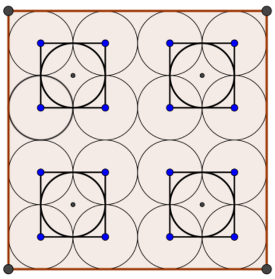

Slika 47

Če povežemo središča včrtanih krogov v enakostraničnem trikotniku in je število včrtanih krogov trikotniško število, oblikujemo nove enakostranične trikotnike (slika 48).

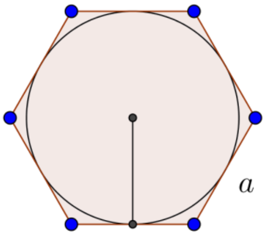

Slika 48

Če povežemo središča včrtanih krogov v kvadratu in je število včrtanih krogov kvadratno število, oblikujemo nove kvadrate (slika 49). Načrtanim kvadratom lahko včrtamo kroge z enakim polmerom, kot so že načrtani krogi (slika 50).

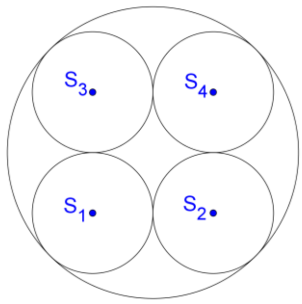

Slika 49


Slika 50

V nadaljevanju raziskovalne naloge bi se lahko lotili drugih pravilnih mnogokotnikov npr. šestkotnika (slika 51), ali pa koliko enakih največjih možnih krogov lahko včrtamo v krog (slika 52).

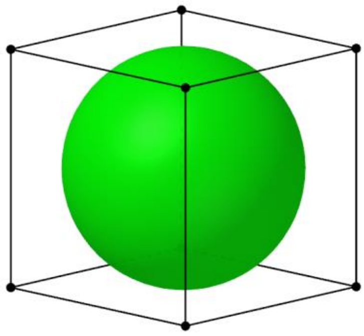


Slika 51



Slika 52

Lotili bi raziskovali podoben problem z včrtovanjem krogle v kocko, torej s telesi. Na primer: « Koliko največjih možnih krogel lahko včrtamo v platonska telesa (platonska telesa so telesa, ki imajo vse ploskve enake)?« (slika 53).


Slika 53

Tako je možnosti za raziskovanje še zelo veliko.

7. Viri

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Circle_packing_in_a_square (20.1.2017)

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Circle_packing_in_an_equilateral_triangle (24.1.2017)

[3] http://mathworld.wolfram.com/CirclePacking.html (4.2.2017) Slika 55

[4] http://www2.stetson.edu/~efriedma/cirintri/ (4.2.2017)