Mladi za napredek Maribora 2017

34. srečanje

SEMAFORIZIRANJE KRIŽIŠČ S POMOČJO BARVANJA GRAFOV

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor:	GAJA ĐUKANOVIĆ BABIČ
Mentor:	MAJA JAKOVAC
Šola:	OŠ FRANCA ROZMANA-STANETA MARIBOR

Maribor, februar 2017

Mladi za napredek Maribora 2017

34. srečanje

SEMAFORIZIRANJE KRIŽIŠČ S POMOČJO BARVANJA GRAFOV

Matematika

Raziskovalna naloga

Maribor, februar 2017

KAZALO

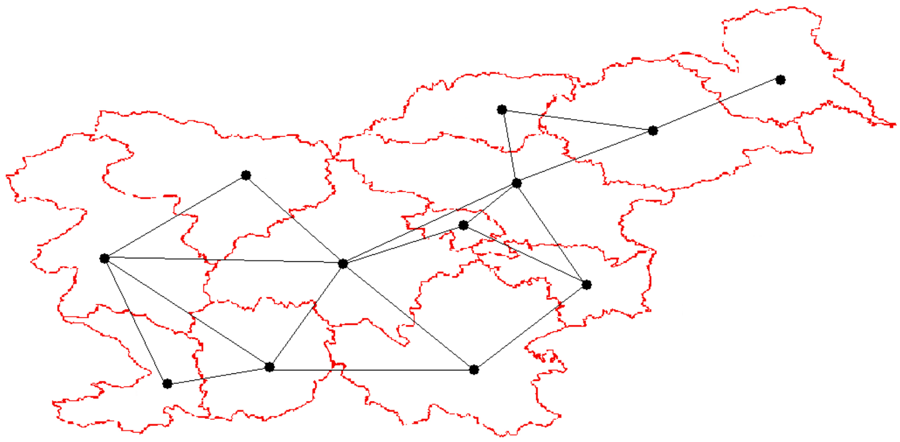
1 POVZETEK

V raziskovalni nalogi je predstavljen postopek semaforiziranja križišč, ki se navezuje na matematično področje teorije grafov, natančneje na barvanje grafov. Definirano je barvanje grafov in kromatično število, vrednost kromatičnega števila pa je izračunana za nekatere družine grafov. V zaključku naloge sledi rešitev problema semaforiziranja križišča s tremi oziroma štirimi cestami.

2 UVOD

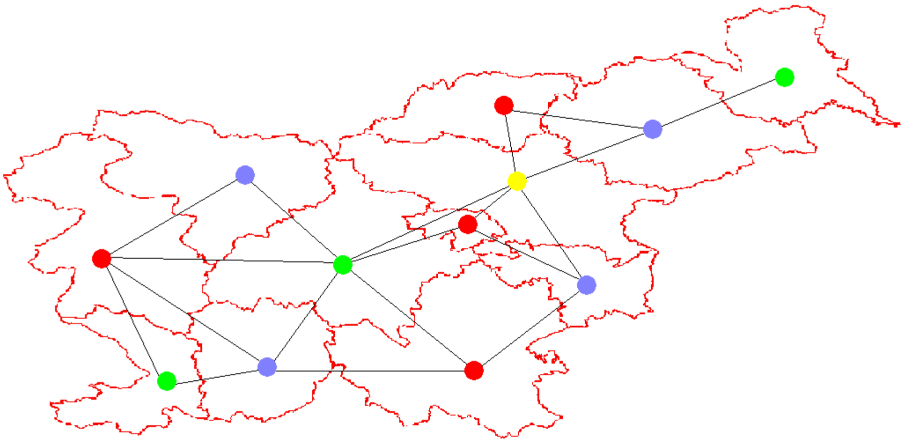
Pri vožnji skozi križišče sem se spraševala ali so semaforji nastavljeni optimalno (ali je razpored zelenih luči najboljši možen). Zanimalo me je kako to doseči. Učiteljica mi je povedala, da lahko takšne tipe nalog rešujemo s pomočjo teorije grafov. Pričelo me je zanimati, kaj sploh teorija grafov je, zato sem pobrskala po literaturi.

Teorija grafov je široko matematično področje kamor spada tudi barvanje grafov [3], ki si ga bomo v tej nalogi natančneje ogledali. Najstarejši problem barvanja grafov je tako imenovani problem štirih barv iz leta 1852, ko je Francis Guthrie barval zemljevid angleških grofij. Zemljevid je želel pobarvati tako, da bosta sosednji regiji pobarvani z različnima barvama, pri tem pa uporabiti najmanjše možno število različnih barv. Poglejmo si ta problem na zemljevidu Slovenije (slika 1).



Slika 1: Zemljevid regij (vir: [3])

Regije upodobimo s točkami. Če sta regiji sosednji, njuni točki povežemo. Sedaj je naša naloga pobarvati točke z najmanjšim možnim številom različnih barv tako, da nobeni dve sosednji točki ne bosta imeli enake barve. Tako imamo boljši pregled nad reševanjem problema.



Slika 2: Pobarvan zemljevid regij (vir: [3])

Ta postopek lahko uporabimo na zemljevidih različnih velikosti in ugotovimo, da za barvanje vedno potrebujemo največ štiri različne barve. Problem je na videz preprost, vendar je bil dolgo časa nedokazan. Dokazala sta ga Appel in Haken leta 1976 s pomočjo računalnika.

Po pregledu literature sem zapisala osnovne pojme teorije grafov [1, 2], nato pa definirala različne družine grafov. V nadaljevanju sem predstavila barvanje grafov [4, 5], definirala kromatično število grafa in navedla kromatična števila nekaterih znanih grafov. Nato je sledilo reševanje problema križišča na treh in na štirih cestah. Ugotavljala sem kolikšno je najmanjše število intervalov zelene luči v določenem križišču, da lahko skozi križišče spustimo vozila vseh smeri, ne da bi se pri vožnji ovirala.

3 OSNOVNI POJMI TEORIJE GRAFOV

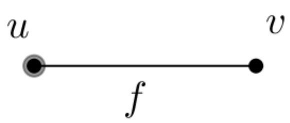
Zapišimo nekaj osnovnih pojmov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Graf je diagram, ki ga sestavljajo vozlišča. Vozlišča so povezana s črtami, ki jih imenujemo povezave.

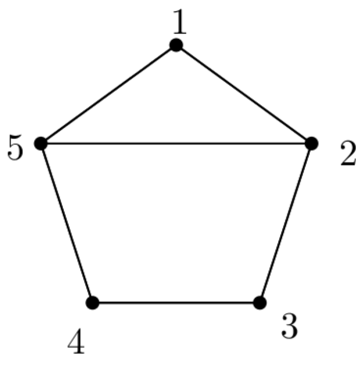
Zapišimo natančneje.

Graf G je urejen par $(V(G),\ E(G))$, kjer je $V(G)$ **množica vozlišč** oziroma točk grafa in $E(G)$ **množica povezav** grafa. Množica povezav grafa je sestavljena iz neurejenih parov vozlišč.

Če med vozliščema u in v poteka povezava, pravimo, da sta vozlišči u in v **sosednji ali povezani**. Če si dve povezavi delita isto vozlišče, ju imenujemo **incidentni povezavi**.



Slika 3: Primer povezave med vozliščema (vir: avtor)

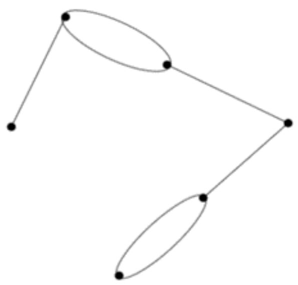


Slika 4: Primer grafa G (vir: avtor)

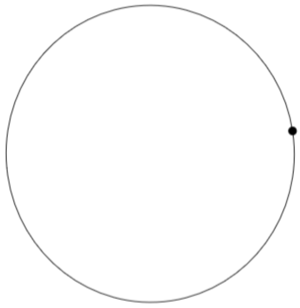
Na sliki 4 vidimo primer grafa, ki ga lahko zapišemo tudi kot:

$$G = (\{1,2,3,4,5,\}\ , \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{1,5\}, \{2,5\}\})$$

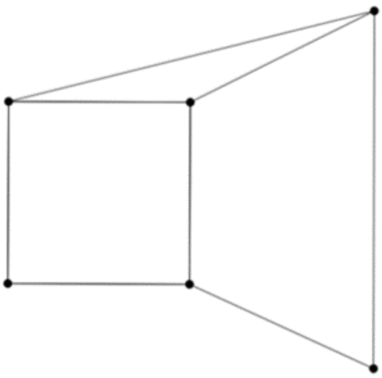
Dve ali več povezav, ki povezujejo isti par vozlišč, imenujemo **vzporedne povezave**. Povezava, ki povezuje neko vozlišče s samim seboj, je **zanka ali povratna povezava**. Graf brez zank in večkratnih povezav poimenujemo **enostavni graf**.



Slika 5: Povezan graf (vir: avtor)



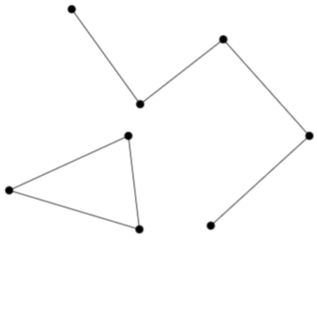
Slika 6: Zanka (vir: avtor)

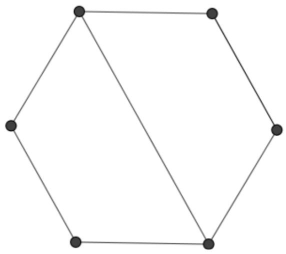


Slika 7: Enostaven graf (vir: avtor)

Graf je **povezan**, če lahko iz poljubnega vozlišča po povezavah pridemo do vsakega drugega vozlišča grafa. V nasprotnem primeru je graf **nepovezan**.

Zapišimo še drugače. Graf, ki je v enem kosu, je povezan. Graf, ki ima več delov, je nepovezan.



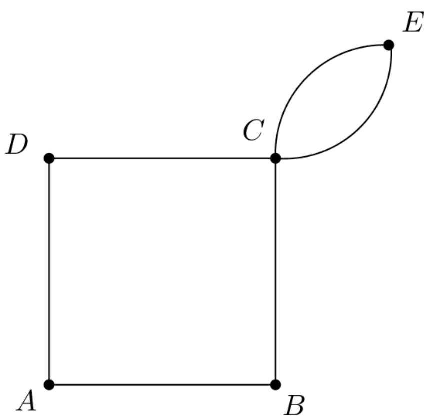


Slika 8: Povezan graf (vir: avtor)

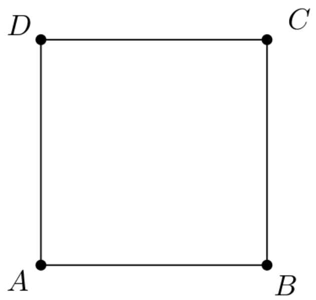
Slika 9: Nepovezan graf (vir: avtor)

V nadaljevanju definirajmo podgraf.

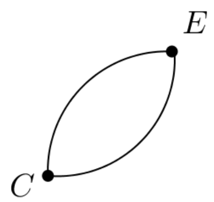
Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$ in G' graf z množico vozlišč $V(G')$ in množic povezav $E(G')$. Če je $V(G')$ podmnožica množice $V(G)$ in če je vsaka povezava iz množice $E(G')$ tudi v množici $E(G)$, potem je G' **podgraf** grafa G. Poglejmo primer dveh podgrafov graf G.



Slika 10: Graf G (vir: avtor)



Slika 11: Podgraf grafa G (vir: avtor)

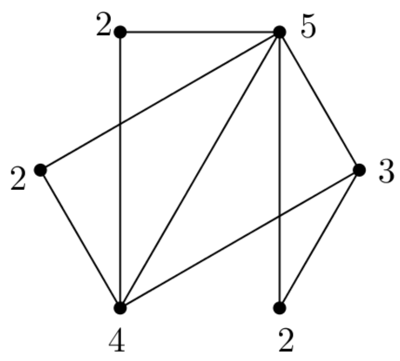


Slika 12: Podgraf grafa G (vir: avtor)

Podgrafe pogosto uporabljamo zato, da proučimo graf po kosih in ne celega naenkrat.

Pri raziskovanju grafov imajo veliko vlogo tudi stopnje vozlišč. **Stopnjo vozlišča** v definiramo kot število povezav, ki imajo v za krajišče. Označimo jo z $\boldsymbol{d(v)}$. **Minimalno stopnjo grafa** $\boldsymbol{\delta(G)}$ razberemo iz vozlišča z najmanjšo stopnjo. Podobno definiramo **maksimalno stopnjo grafa** $\boldsymbol{\Delta(G)}$ preko vozlišč z največjo stopnjo.

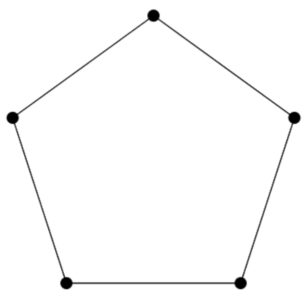
Omenjene pojme si poglejmo na naslednjem primeru.



Slika 13: Stopnje vozlišč graf G (vir: avtor)

Števila ob vozliščih označujejo stopnjo posameznega vozlišča. Minimalna stopnja grafa je torej $\delta(G) = 2$, maksimalna stopnja graf pa $\Delta(G) = 5$.

Graf pri katerem imajo vsa vozlišča enako stopnjo imenujemo **regularen graf**. Če imajo vsa vozlišča grafa stopnjo r, pravimo da je graf $\boldsymbol{r}$**-regularen**. Spodnja slika prikazuje 2-regularen graf.



Slika 14: 2-regularen graf

Razmislimo lahko tudi, da je v vsakem grafu vsota stopenj vseh vozlišč enaka dvakratniku števila povezav. To nam pove tako imenovana Osnovna lema teorije grafov [2].

3.1 DRUŽINE GRAFOV

V nadaljevanju bomo spoznali različne družine grafov, ki jih ločimo glede na nekatere njihove lastnosti. V ta namen si poglejmo nekaj pojmov.

Sprehod med vozliščema v_0 in v_k je zaporedje vozlišč $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ in povezav med njimi. **Dolžina sprehoda** je število povezav sprehoda. Če so vse povezave sprehoda različne, pravimo, da je sprehod **enostaven**. Če so v enostavnem sprehodu različna vsa vozlišča, mu pravimo **pot**. Sprehod $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ je **sklenjen sprehod** ali **obhod**, če je $v_0 = v_k$. Če so vse povezave sklenjenega sprehoda različne, mu rečemo **enostaven obhod**. Če so v obhodu vse povezave in vsa vozlišča različna (razen $v_0 = v_k$), potem ga imenujemo **cikel**.

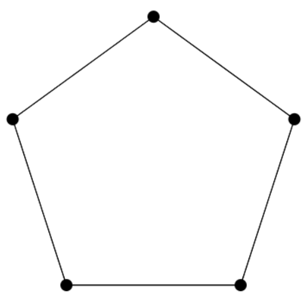
POT

$\boldsymbol{P_n}$ $(n \geq 2)$ je **pot** na n vozliščih.

Slika 15: P_7 (vir: avtor)

CIKEL

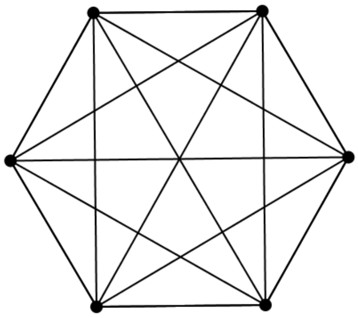
Cikel $\boldsymbol{C_n}$ $(n \geq 3)$ je pot na n vozliščih z začetkom in koncem v istem vozlišču.



Slika 16: C_5 (vir: avtor)

POLNI GRAF

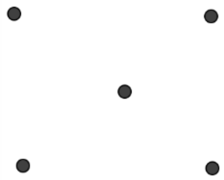
Polni graf je graf v katerem je vsak par različnih vozlišč povezan z natanko eno povezavo. Polni graf na n vozliščih označimo s $\boldsymbol{K_n}$.



Slika 17: K_6 (vir: avtor)

PRAZNI GRAF

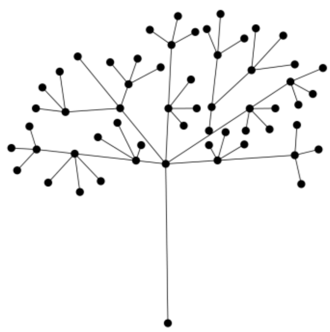
Prazni graf je graf brez povezav. Prazni graf na n vozliščih označimo z N_n.



Slika 18: N_5 (vir: avtor)

DREVO

Povezan graf brez ciklov imenujemo **drevo**.

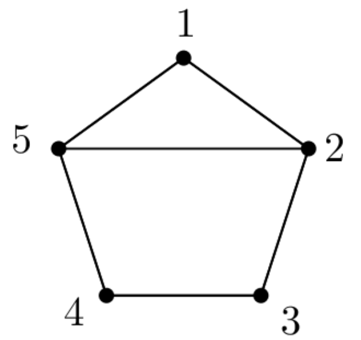


Slika 19: Drevo (vir: avtor)

4 BARVANJE VOZLIŠČ GRAFOV

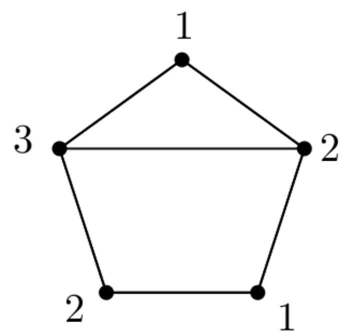
Barvanje vozlišč je poseben primer označevanja grafa. Dobro pobarvati (v nadaljevanju pobarvati) graf pomeni pobarvati (označiti) vsa vozlišča grafa tako, da nobeni dve sosednji vozlišči nimata enake barve (oznake oz. števila). To poskušamo narediti s čim manj barvami.

Kot primer poskusimo pobarvati spodnji graf.



Slika 20: Primer pobarvanega grafa (vir: avtor)

Graf je pobarvan s petimi barvami vendar bi ga lahko pobarvali tudi z manjšim številom barv. Poskusimo zmanjšati število uporabljenih barv.



Slika 21: Pobarvan graf (vir: avtor)

Graf smo uspeli pobarvati s tremi barvami. Če razmislimo, ugotovimo, da bolje ne gre. Dve barvi sta zagotovo premalo, zaradi trikotnika, ki se pojavi v grafu.

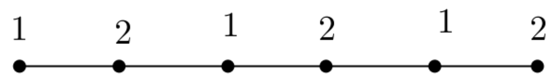
Najmanjše število barv, ki jih potrebujemo za barvanje grafa G, imenujemo **kromatično število grafa $\boldsymbol{G}$**. Označimo ga s $\boldsymbol{\chi(G)}$.

5 KROMATIČNO ŠTEVILO NEKATERIH ZNANIH GRAFOV

Pri barvanju grafa si pomagamo tako, da najprej poskusimo pobarvati nek njegov del (podgraf). Raziščimo kromatična števila za nekatere družine grafov.

POT

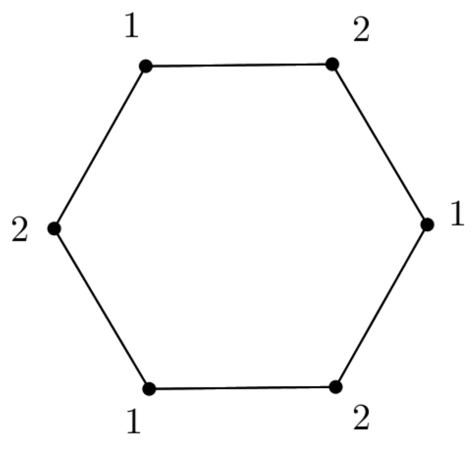
Pot P_n lahko pobarvamo z natanko dvema barvama ($\boldsymbol{\chi(P_n) = 2}$).



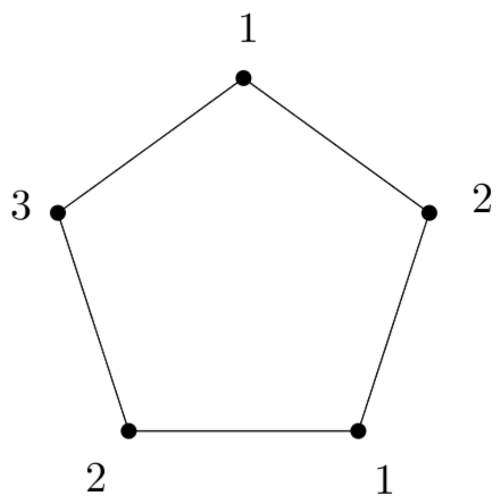
Slika 22: Barvanje poti (vir: avtor)

CIKEL

Cikel C_n, ki ima sodo število vozlišč, lahko pobarvamo z natanko dvema barvama, cikel C_n z lihim številom vozlišč pa z natanko tremi barvami.



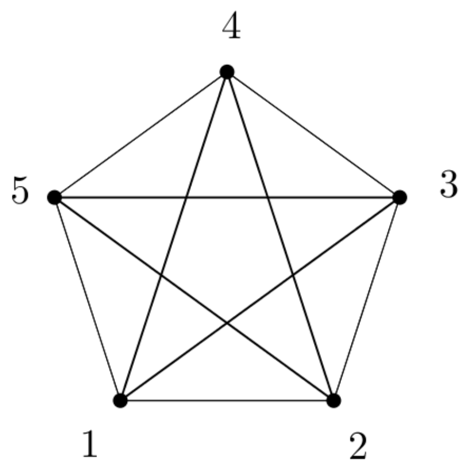
Slika 23: Barvanje sodega cikla (vir: avtor)



Slika 24: Barvanje lihega cikla (vir: avtor)

POLNI GRAF

Ker je pri polnem grafu vsako vozlišče povezano z vsemi drugimi vozlišči, je očitno, da mora vsako vozlišče imeti svojo barvo. Torej je $\boldsymbol{\chi(K_n) = n}$. Na sliki 25 vidimo barvanje grafa $\boldsymbol{K_5}$.



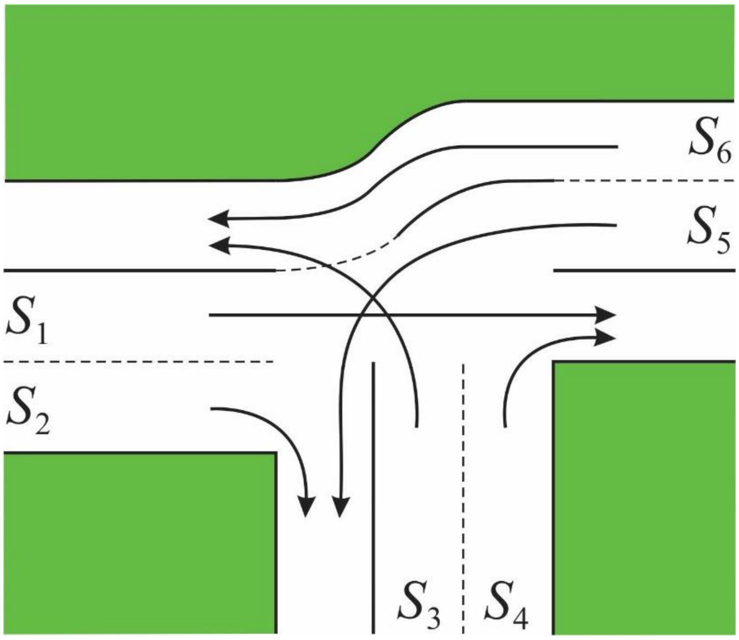
Slika 25: Barvanje grafa K_5 (vir: avtor)

6 PROBLEM KRIŽIŠČA

Pridobljeno znanje poskusimo uporabiti pri razporejanju zelenih luči na semaforjih v križiščih. Cilj je doseči čim manjše število različnih vklopov zelene luči. Najprej bomo rešili problem semaforjev na treh nato pa še na štirih cestah.

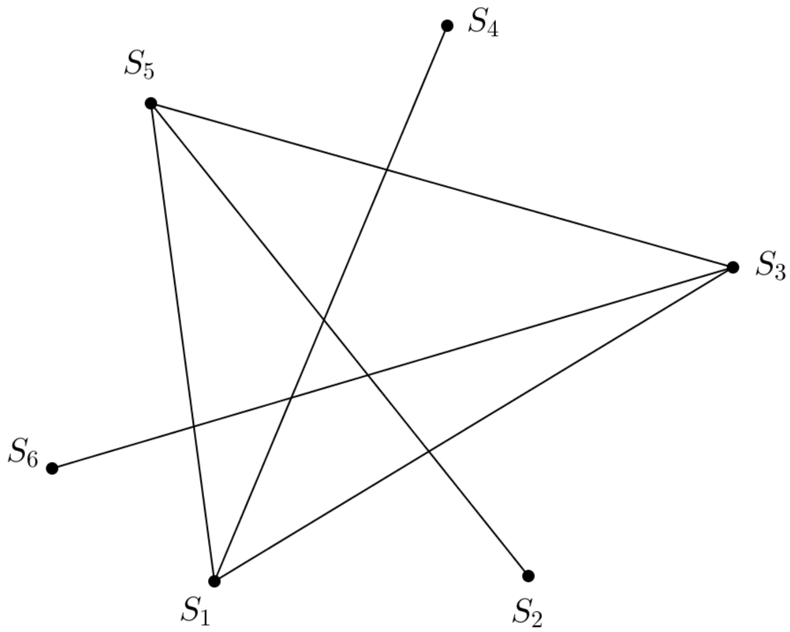
6.1 SEMAFORJI NA TREH CESTAH

Na sliki 26 je narisano križišče treh cest. S puščicami nakažemo v katere smeri se je možno peljati.



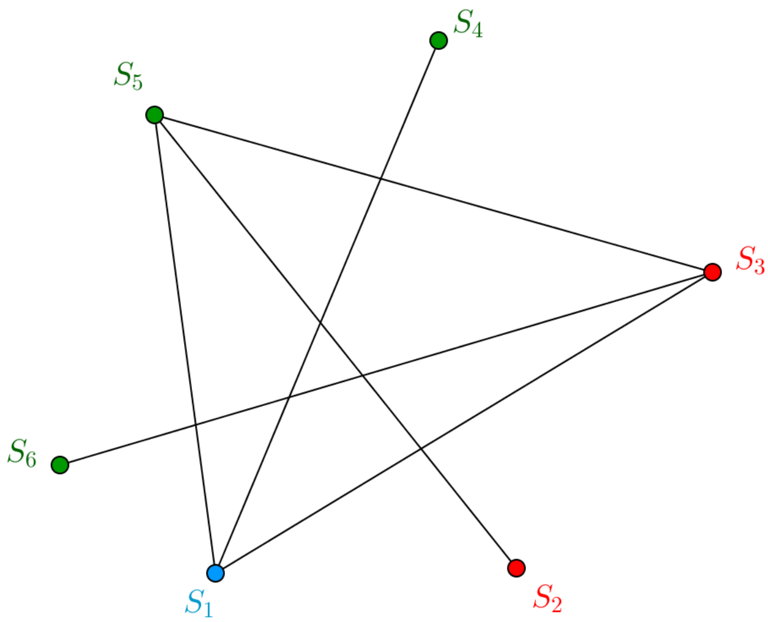
Slika 26: Semaforji na treh cestah (vir: avtor)

Sedaj razmislimo katere situacije so v križišču dopustne in katere ne, oziroma katere smeri so lahko odprte hkrati. Graf narišemo tako, da vozlišča predstavljajo možne smeri. Nato povežemo tiste smeri (vozlišča), ki ne smejo biti odprte hkrati. Na voljo imamo 6 možnih smeri (vozlišč), ki jih označimo s S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 in S_6. Med sabo povežemo naslednje pare vozlišč: (S_1, S_3),(S_1, S_4), (S_1, S_5), (S_2, S_5), (S_3, S_5) in (S_3, S_6).



Slika 27: Graf semaforjev na treh cestah (vir: avtor)

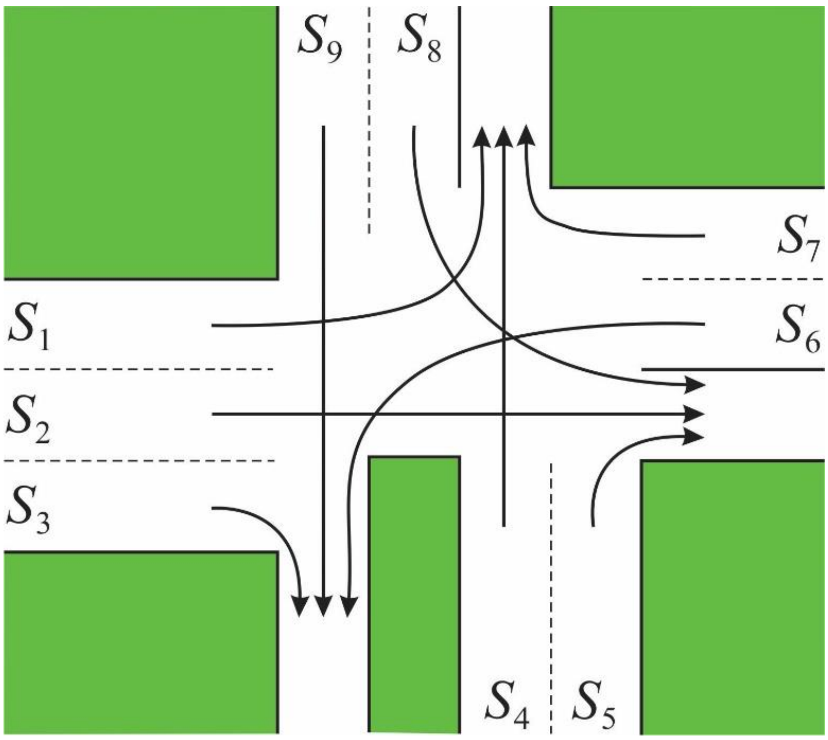
Nato se lotimo barvanja vozlišč grafa. Vozlišča, ki so pobarvana z isto barvo, predstavljajo poti, ki so lahko odprte hkrati. Ker naš graf vsebuje podgraf C_3, potrebujemo vsaj tri barve. Za barvanje preostalih vozlišč pa ne potrebujemo nove barve. Torej je $\chi(G) = 3$. To pomeni, da potrebujemo tri časovne intervale, da se lahko odpeljejo vozniki vseh smeri, ne da bi prišlo do nesreče.



Slika 28: Pobarvan graf semaforjev na treh cestah (vir: avtor)

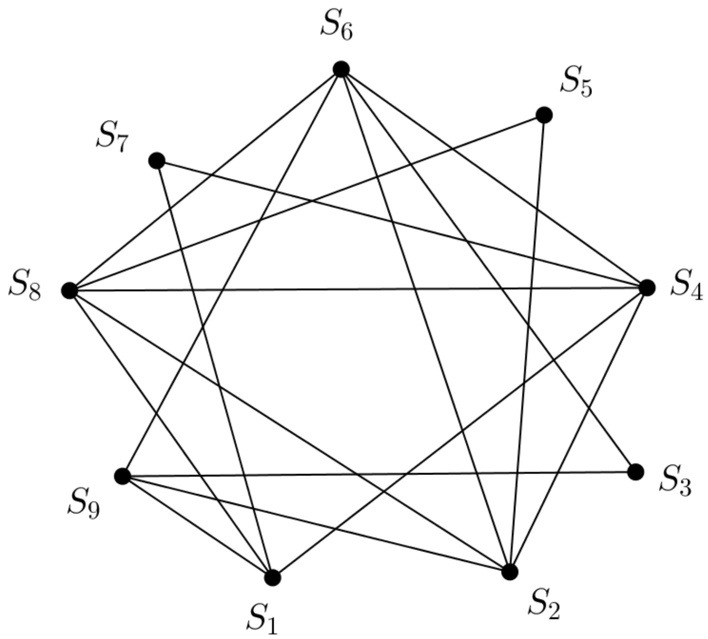
6.2 SEMAFORJI NA ŠTIRIH CESTAH

Poglejmo še primer razporeda luči na semaforjih na štirih cestah. Križišče, skupaj z možnimi smermi vožnje, je prikazano na sliki 29.



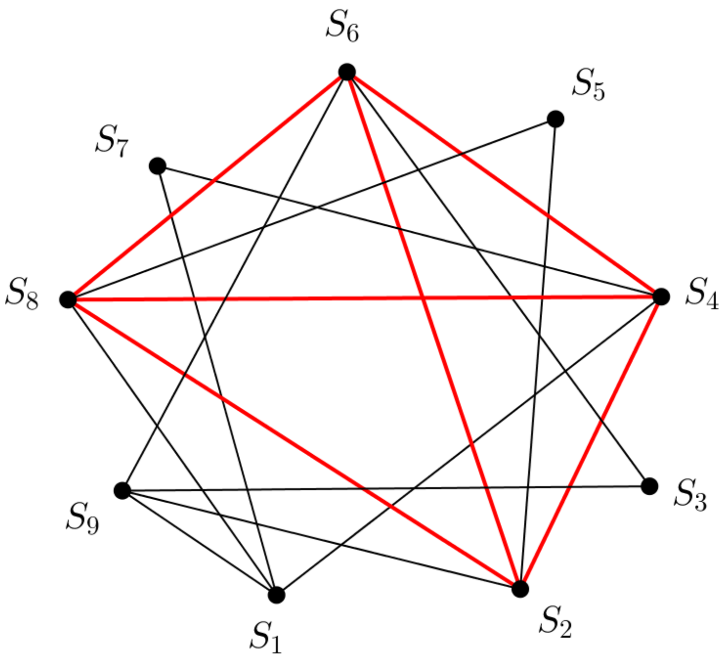
Slika 29: Semaforji na štirih cestah (vir: avtor)

Upoštevajmo, da smeri, ki se sekajo, ne smejo biti odprte hkrati (na primer S_1 in S_9). Prav tako avtomobili različnih pasov, ki se želijo peljati v isti pas, ne smejo imeti hkrati prižgane zelene luči (na primer S_2, S_5 in S_8). V skladu s temi omejitvami narišemo graf (slika 30). Vozlišča predstavljajo možne smeri križišča. Dve vozlišči pa sta povezani, če ne smeta biti odprti hkrati.



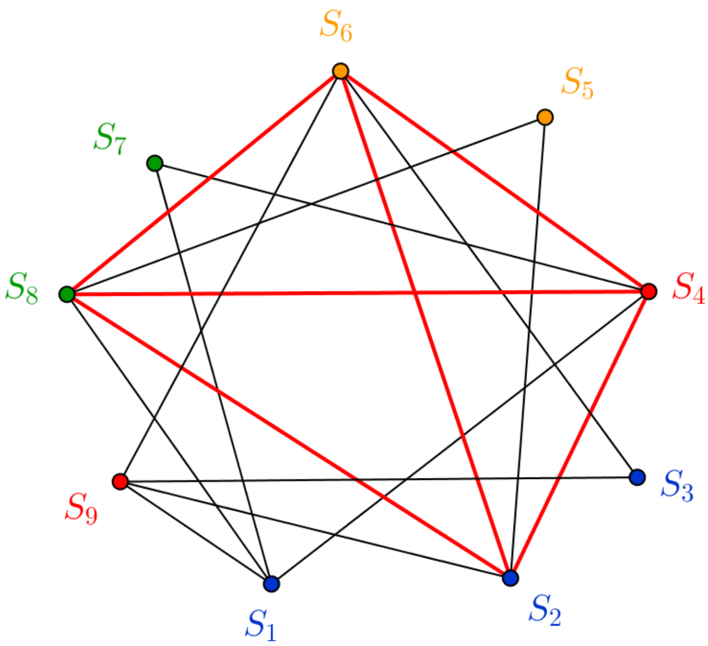
Slika 30: Graf semaforjev na štirih cestah (vir: avtor)

Sedaj moramo graf pobarvati. To bi lahko naredili z devetimi barvami, če bi vsako vozlišče dobilo svojo barvo. Vendar bi na tak način potrebovali preveč različnih zelenih intervalov. Zato razmislimo, kolikšno je najmanjše število barv, ki jih potrebujemo. Opazimo, da graf vsebuje podgraf K_4 (slika 31).



Slika 31: Podgraf K_4 (vir: avtor)

Zato bomo potrebovali vsaj štiri barve. Najprej določimo barve vozlišč tega podgrafa. Nato z malo sklepanja ugotovimo, da lahko tudi ostala vozlišča pobarvamo tako, da ne uporabimo nove barve (slika 32).



Slika 32: Pobarvan graf semaforjev na štirih cestah (vir: avtor)

Ugotovili smo, da je $\chi(G) = 4$. Torej so potrebni štirje različni intervali zelenih luči. Če opazujemo še vozlišča z enako barvo, lahko ugotovimo še, na katerih smereh so zelene luči vklopljene hkrati (na primer na smereh S_1, S_2 in S_3).

7 ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi sem spoznala zame popolnoma novo področje – teorijo grafov. Cilj je bil rešiti problem križišča na treh in na štirih cestah. V ta namen sem spoznala veliko novih pojmov. Najprej sem za primer križišča na treh cestah narisala graf. Vozlišča so predstavljala možne smeri, nato sem s povezavami povezala tiste smeri, ki ne smejo biti odprte hkrati. Graf sem pobarvala in ugotovila, da je $\chi(G) = 3$. Tako sem videla, da potrebujemo tri časovne intervale, da se lahko odpeljejo vozniki vseh smeri ne da bi prišlo do nesreče. Podobno sem za primer križišča na štirih cestah ugotovila, da potrebujemo štiri časovne intervale.

8 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Cilj naloge je pokazati kako uporabna je matematika (natančneje teorija grafov) v vsakdanjem življenju. S pomočjo znanja o barvanju grafov sem reševala problem križišča. Poleg obravnavanega primera pa bi to znanje lahko uporabili tudi pri drugih realnih problemih, na primer pri dodeljevanju frekvenc radijskim postajam in pri sestavljanju urnika.

9 LITERATURA

[1] R. J. Wilson, J. J. Watkins (prevedel J. Žerovnik), *Uvod v teorijo grafov*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.

[2] http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/oblak/html/Uvod.html [dostopno: 1. 12. 2016].

[3] http://www2.nauk.si/materials/864/out-573842/index.html#state=51 [dostopno: 1. 12. 2016].

[4] M. Ber, *Uporaba teorije grafov v pri igrah in drugih realnih problemih*, diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2016.

Vse slike so nastale s pomočjo programov GeoGebra in Slikar.