»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2017«

34. SREČANJE

ROJSTNODNEVNI PARADOKS

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: SARA VOLGEMUT, ŽIVA ŽURGA

Mentor: MATEJA SLANA MESARIČ, SUZANA TOMŠIČ MAVRIČ

Šola: OŠ JANKA PADEŽNIKA MARIBOR

Maribor, februar 2017

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2017«

34. SREČANJE

ROJSTNODNEVNI PARADOKS

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

PROSTOR ZA NALEPKO

Maribor, februar 2017

KAZALO stran

KAZALO TABEL

POVZETEK

Obstajajo številni logični in matematični paradoksi, ki so v nasprotju z intuicijo. Pri matematičnih delavnicah smo se ukvarjali z verjetnostjo. Metali smo kocke, vlekli kroglice iz vrečke, se igrali s kartami. Pogovor je nanesel na rojstne dneve in njihov paradoks. Težko je bilo verjeti, da je že pri 23 osebah 50 % verjetnost, da imata dve osebi rojstni dan na isti dan, saj ima leto 365 dni.

Na primeru učencev in zaposlenih na naši šoli sva preverili, ali ta teorija drži. Najprej sva pregledali literaturo in se seznanili z verjetnostjo ter pogojno verjetnostjo. Zbrali sva datume vseh na šoli, nato pa se lotili izpisovanja in razvrščanja prav teh. Za vsak razred sva naredili tabele, iz katerih je razvidno, koliko učencev oz. zaposlenih ima na isti dan rojstni dan. Izračunali sva, kolikšna je verjetnost, da najdeva osebe, ki si delijo rojstni dan, ter koliko parov sva pričakovali. Primerjali sva izračunane rezultate z dejanskim stanjem in ugotavljava, da teorija drži.

1 UVOD

Danes velikokrat slišimo izjave, kot na primer: »Malo verjetno je, da zadenem na lotu.« ali »Zelo verjetno je, da bom danes vprašana.«. V vseh primerih verjetnost opisujemo z besedami malo verjetno, zelo verjetno … iz nas govori intuicija. Probleme pa lahko opišemo tudi z matematično natančnim izračunom verjetnosti, ki se velikokrat razlikuje od prejšnjih intuitivnih opisov. Pravzaprav govorimo o paradoksih. Ti nasprotujejo človekovi intuiciji in običajno povzročajo takojšnje presenečenje. Zanimajo nas, saj ne upoštevajo, kot bi rekli »logike in zdrave pameti«.

Pri matematičnih delavnicah je najino zanimanje vzbudil rojstnodnevni paradoks. Težko je verjeti, da je že pri 23 osebah 50 % verjetnost, da imata dve osebi rojstni dan na isti dan. Naša intuicija nam pravi, da je verjetnost zelo majhna, saj ima leto 365 dni. S tem zanimanjem sva začeli z raziskovanjem in ugotavljanjem, kako izračunati verjetnost. Najprej sva pregledali literaturo in se seznanili z verjetnostjo ter pogojno verjetnostjo. Zbrali sva datume vseh na šoli, nato pa se lotili izpisovanja in razvrščanja prav teh. Za vsak razred sva naredili tabele, iz katerih je razvidno, koliko učencev oz. zaposlenih ima na isti dan rojstni dan. Izračunali sva, kolikšna je verjetnost, da najdemo osebe, ki si delijo rojstni dan, ter koliko parov smo pričakovali.

1.1 Raziskovalni problem

V raziskovalni nalogi bova raziskali ali rojstnodnevni paradoks velja tudi v praksi. V ta namen bova naredili primerjavo med dejanskimi rojstnimi dnevi učencev in razrednikov v posamezni paralelki in to primerjali z matematičnimi izračuni.

1.2 Hipoteze

Glede na cilje raziskovalnega problema sva postavili naslednje hipoteze:

1. V večini izračunanih primerov se bo rezultat ujemal z dejanskim stanjem.
2. Našli bova paralelko, kjer bo več parov rojenih na isti dan, kot bo izračunano.
3. Našli bova paralelko, kjer ne bo niti enega para, ki je rojen na isti dan.

1.3 Teoretične osnove

1.3.1 Verjetnost

Teorija verjetnosti je veja matematike in raziskuje dogodke, ki jih ne moremo vnaprej napovedati. Če se bo nek dogodek zgodil ali ne, je odvisno od naključja.

Pri verjetnosti se srečujemo s tremi osnovnimi pojmi:

a) **Poskus** je dejanje, ki ga opravimo po v naprej določenih navodilih. Poskus se vedno dogaja pod enakimi, natančno določenimi pogoji (pogoj enakovrednosti izidov pomeni, da je igra »poštena« – kocka ni obtežena ipd.).

Na primer: Po mizi zakotalimo običajno igralno kocko.

b) **Dogodek** je pojav, ki se pri izvajanju poskusa lahko zgodi (ali pa tudi ne).

V prej omenjenem poskusu je možen dogodek: Kocka se ustavi tako, da pade šestica.

Dogodke označujemo z velikimi tiskanimi črkami z začetka abecede, npr.: A, B, C … in zapišemo, npr.:

A : »pade šestica«

Vrste dogodkov:

1. Gotov dogodek je dogodek, ki se zgodi ob vsaki ponovitvi poskusa.
2. Nemogoč dogodek je dogodek, ki se ne zgodi ob nobeni ponovitvi poskusa.
3. Slučajen dogodek je dogodek, ki se pri nekaterih ponovitvah poskusa zgodi, pri drugih pa ne.

c) **Verjetnost dogodka**

V vsakodnevnih pogovorih pogostokrat izražamo svojo oceno, kolikšna je verjetnost, da se bo nek dogodek zgodil, npr: *stoprocentno, zagotovo, nemogoče* ... Z izrazi o verjetnosti pravzaprav ocenjujemo, ali se bo nek slučajni dogodek zgodil ali ne.

Verjetnost dogodka je število, ki označuje kolikšna je možnost, da se bo v enem poskusu zgodil nek dogodek oziroma ali se bo nek dogodek sploh zgodil ali ne. Verjetnost označujemo z veliko črko P. Tako verjetnost dogodka, ki ga poimenujemo s črko A, označimo s: $P\ (\ A\ )$.

1. Verjetnost gotovega dogodka je enaka 1. $P\ (\ G\ ) = 1$
2. Verjetnost nemogočega dogodka je 0. $P\ (\ N\ ) = 0$
3. Verjetnost slučajnega dogodka lahko ocenimo z besedo (verjetno, zelo verjetno, malo verjetno) ali pa izrazimo s številom. $0\ \leq P\ (\ A\ ) \leq 1$

To lahko naredimo:

- empirično (s poskušanjem)

Opravimo veliko število ponovitev poskusa in si sproti zapisujemo, ali se dani dogodek zgodi ali ne. Izračunamo količnik med frekvenco dogodka in številom vseh izvajanj poskusa

$$P\ (A) = \frac{frekvenca\ dogodka\ A}{število\ vseh\ ponovitev\ poskusa}$$

- teoretično (matematično ali klasična definicija verjetnosti)

Verjetnost slučajnega dogodka poskušamo oceniti, ne da bi v resnici izvedli poskuse. To lahko naredimo v primerih, kjer ni nobenega razloga, da bi se en elementarni dogodek zgodil večkrat kot drugi. Verjetnost izračunamo kot količnik med številom ugodnih izidov (m) in številom vseh možnih elementarnih dogodkov (n) v nekem poskusu

$$P\,(A) = \frac{število\ ugodnih\ izidov}{število\ možnih\ elementarnih\ dogodkov} = \frac{m}{n}$$

Primer: Izračunajmo verjetnost prej omenjenega dogodka A, da pri metu kocke pade šestica.

Število ugodnih izidov (m) = 1

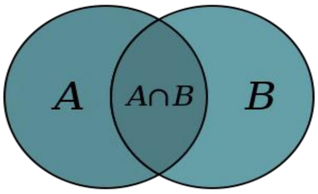
$$P\,(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

Število možnih dogodkov (n) = 6

1.3.2 Pogojna verjetnost

Pogojna verjetnost dogodka A pri pogoju, da se je zgodil drugi dogodek B, je delež dogodka A med poskusi, pri katerih se zgodi dogodek B. Označimo kot $P(A\,|B\,)$.

Diagram 1: Odvisna dogodka A in B



Iz diagrama lahko preberemo, da so ugodne možnosti za dogodek A pod pogojem, da se je zgodil dogodek B, možnosti iz preseka dogodkov A in B.

Vseh izidov poskusa imamo n. Pri računanju $P\,(A|B)$ opazujemo tiste izide poskusa, ki so ugodni za dogodek B (m_B). Izmed njih izberemo tiste, ki so ugodni tudi za dogodek A (m_{AB}). Ti izidi so ugodni tudi za dogodek $A \cap B$. Verjetnost dogodka A pri pogoju, da se je zgodil tudi dogodek B, potem izračunamo

$$P(A|B) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{\frac{m_{AB}}{n}}{\frac{m_B}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

S tem pa dobimo tudi verjetnost produkta dogodkov A in B:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)$$

Primer: *Hkrati vržemo dve kocki. Kolikšna je verjetnost, da je na eni od kock padla šestica, če kocki pokažeta vsoto 8 pik?*

A: ena od kock pokaže 6

B: vsota pik na obeh kockah je 8

$A \cap B$ pomeni, da je vsota pik na obeh kockah 8 in hkrati ena od kock pokaže 6, zato sta za ta dogodek ugodna le dva izida: (2, 6) in (6, 2).

ugodni izidi: $m_{AB} = 2$ *vsi izidi:* $n = 36$ $P(A \cap B) = \frac{m_{AB}}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Za dogodek B, da je vsota pik na obeh kockah 8, je ugodnih pet izidov: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).

ugodni izidi: $m_B = 5$ *vsi izidi:* $n = 36$ $P(A \cap B) = \frac{m_B}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Potem je verjetnost, da je na eni od kock padla šestica, če kocki pokažeta vsoto 8 pik

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

1.3.3 Paradoksi

» paradóks -a m (ọ̑) misel, trditev, ki temelji na neskladju s splošno veljavnim, priznanim«.

(povzeto po SSKJ, 2008, paradoks)

Paradoksi nasprotujejo človekovi intuiciji in zato povzročijo takojšnje presenečenje. Zanimajo nas, saj ne upoštevajo, kot bi rekli, »logike in zdrave pameti«. V resnici pa izzivajo moč sklepanja in pomagajo razvijati sposobnost za reševanje problemov.

Obstaja več vrst paradoksov. Na področju matematike poznamo:

- logične paradokse,
- številske paradokse,
- verjetnostne paradokse,
- statistične paradokse,
- geometrijske paradokse.

Zanimiv primer logičnega paradoksa je paradoks o lažnivcu, ki je eden najpomembnejših logičnih paradoksov, gre pa takole:

Lažnivec reče: Jaz lažem

Iz tega primera nastane zapletena situacija, saj če lažnivec nekaj reče, pomeni, da je to laž. Če bi rekel, tako kot je v tem primeru, da laže, pomeni, da ne laže oz. obratno.

1.3.4 Rojstnodnevni paradoks

Paradoks o rojstnih dnevih se glasi:

Če se slučajno sreča 23 ljudi, je verjetnost, da bosta najmanj dve osebi imeli rojstni dan na isti dan v istem mesecu, nekoliko večja od $\frac{1}{2}$ *oziroma 50 %.*

Intuicija pravi, da je verjetnost zelo majhna, čeprav je trditev drugačna.

Najprej izračunamo verjetnost, da imajo vsi ljudje rojstni dan v različnih dneh. Če to odštejemo od 1, dobimo verjetnost, ki jo iščemo.

Verjetnost, da imata dva človeka rojstni dan v različnih dneh je $P = \frac{364}{365}$, ker je samo ena možnost od 365 dni, da imata rojstni dan na isti dan v istem mesecu. Verjetnost, da bo nek drug človek imel rojstni dan na drug dan kot prej omenjena človeka, je $P = \frac{363}{365}$. Tako razmišljamo naprej za vsako preostalo osebo. Potem na koncu zmnožimo vse ulomke in dobimo

$$\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ \dots \ \cdot \frac{343}{365}$$

Produkt predstavlja verjetnost, da imajo vsi ljudje rojstni dan v različnih dneh. Če pa ta produkt odštejemo od 1, dobimo verjetnost, ki jo iščemo, da bosta najmanj dve osebi imeli rojstni dan na isti dan

$$P = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \dots \dots \cdot \frac{343}{365} = 0{,}5073$$

$$P(23\ oseb) > 50\ \%$$

Izračun verjetnosti, da med n osebami najdemo dve, ki imata rojstni dan na isti dan, je potem:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}$$

2 OSREDNJI DEL NALOGE

2.1 Metodologija

Uporabili sva naslednje metode dela:

- Metodo proučevanja pisnih virov.
- Metodo zbiranja podatkov.
- Analizo in obdelavo podatkov.

2.1.1 Metoda proučevanja pisnih virov

Začetna metoda dela je bila metoda dela s pisnimi viri. Literaturo sva najprej iskali v šolski knjižnici in mariborski knjižnici. Iskali sva tudi na spletu. Zbrane materiale sva preučili, prebrali in se pogovorili. Ugotovitve sva povzeli in uskladili.

2.1.2 Metoda zbiranja podatkov

Pri poslovnem sekretarju naše šole sva pridobili podatke o rojstnih dnevih učencev in učiteljev šole.

2.1.3 Analiza in obdelava podatkov

Pridobljene podatke sva uredili tako, da sva zaporedne številke učencev in učiteljev vpisovali v preglednice. Pri tem sva obravnavali vsako paralelko ali razred posebej, tako učence kot razrednike. Na ta način sva dobili dejanski pregled, koliko oseb ima rojstni dan na isti dan. Pri tem sva dvojčke obravnavali kot eno osebo in uporabili datum samo enkrat.

To, kar sva imeli zapisano v preglednicah, sva nato še izračunali in primerjali dobljene rezultate z dejanskim stanjem. Za izračune sva uporabljali računalo na računalniku.

2.2 Opis rezultatov

Prikazanih je le nekaj primerov izračunov verjetnosti in parov, ki si delijo rojstni dan. Vsi ostali primeri, ki so obravnavani v nalogi, so v prilogi.

2.2.1 8. a razred

Izračun verjetnosti

Število oseb je 20. Verjetnost, da najdemo osebe, ki si delijo rojstni dan:

$$P\ (A) = 1 - \frac{364\ \cdot 363\ \cdot 362\ \cdot \ldots \cdot\ 347\ \cdot 346}{365^{19}} = 0{,}41 = 41\ \%$$

Izračun števila parov, ki si delijo rojstni dan

Število oseb: $k = 20$ Število dni v letu: $n = 365$

Število možnih parov: $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$

$$\binom{20}{2} = \frac{20\ \cdot\ (20-1)}{2} = \frac{20\ \cdot\ 19}{2} = 190$$

Pričakovano število parov: $\frac{\binom{k}{2}}{365} = \frac{190}{365} = 0{,}5$ (pričakujemo torej največ 1 par)

Tabela 1: Rojstni datumi učencev in razrednika 8. a razreda

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	17. 7.	2	2. 4.	3	4. 9.	4	26. 12.	5	13. 2.
6	6. 1.	7	22. 8.	8	14. 11.	9	28. 4.	10	7. 6.
11	20. 1.	12	25. 1.	13	26. 9.	14	18. 1.	15	1. 10.
16	9. 12.	17	30. 8.	18	4. 2.	19	31. 10.	20	22. 8.

Iz razpredelnice je razvidno, da imamo dve osebi, ki si delita rojstni dan, kar sva tudi pričakovali.

2.2.2 8. b razred

Izračun verjetnosti

Število oseb je 18. Verjetnost, da najdemo osebe, ki si delijo rojstni dan:

$$P\ (A) = 1 - \frac{364\ \cdot 363\ \cdot 362\ \cdot \ldots \cdot\ 349\ \cdot 348}{365^{17}} = 0{,}34 = 34\ \%$$

Izračun števila parov, ki si delijo rojstni dan

Število oseb: $k = 18$ Število dni v letu: $n = 365$

Število možnih parov: $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$

$$\binom{18}{2} = \frac{18\ \cdot\ (18-1)}{2} = \frac{18\ \cdot\ 17}{2} = 153$$

Pričakovano število parov: $\frac{\binom{k}{2}}{365} = \frac{153}{365} = 0{,}4$ (bolj malo je verjetno, da najdemo par)

Tabela 2: Rojstni datumi učencev in razrednika 8. b razreda

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	7. 1.	2	5.10.	3	12. 3.	4	20. 9.	5	2. 6.
6	28. 5.	7	19.5.	8	23. 4.	9	13. 7.	10	29. 7.
11	11. 9.	12	2.9.	13	15. 2.	14	9. 12.	15	23. 11.
16	28. 9.	17	31.8.	18	25. 10.				

Iz razpredelnice je razvidno, da se izračuni ujemajo z dejanskim stanjem, saj v razredu nisva našli para, ki bi si delil rojstni dan.

2.2.3 Učenci in razredniki 8. razredov

Izračun verjetnosti

Število oseb je 38. Verjetnost, da najdemo osebe, ki si delijo rojstni dan

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-38)! \cdot 365^{38}} = 0{,}86 = 86\ \%$$

Zelo veliko možnosti (86 %) imamo, da v skupini, kjer je 38 oseb, najdemo nekaj oseb, ki si delijo rojstni dan.

Izračun števila parov, ki si delijo rojstni dan

Število oseb: $k = 38$

Število dni v letu: $n = 365$

Število možnih parov: $\binom{k}{2} = \frac{k\,(k-1)}{2}$

$$\binom{38}{2} = \frac{38 \cdot (38-1)}{2} = \frac{38 \cdot 37}{2} = 703$$

Pričakovano število parov: $\frac{\binom{k}{2}}{365} = \frac{703}{365} = 1{,}9$

Pričakujemo torej največ 2 para, ki si delijo rojstni dan.

Tabela 3: Učenci in razredniki 8. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	17. 7.	2	28. 4.	3	30. 8.	4	19. 5.	5	23. 11.
6	2. 4.	7	7. 6.	8	4. 2.	9	23. 4.	10	28. 9.
11	4. 9.	12	20. 1.	13	7. 1.	14	13. 7.	15	31. 8.
16	26. 12.	17	25. 1.	18	5. 10.	19	29. 7.	20	25. 10.
21	13. 2.	22	26. 9.	23	12. 3.	24	11. 9.	25	31. 10.
26	6. 1.	27	18. 1.	28	20. 9.	29	2. 9.	30	22. 8.
31	22. 8.	32	1. 10.	33	2. 6.	34	15. 2.	35	9. 12.
36	28. 5.	37	9. 12.	38	14. 11.				

Iz razpredelnice je razvidno, da imamo dva para oseb, ki si delijo rojstni dan, kar sva tudi pričakovali.

2.2.4 Učenci in razredniki 4. razredov

<u>Izračun verjetnosti</u>

Število oseb je 43. Verjetnost, da najdemo osebe, ki si delijo rojstni dan

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-43)! \cdot 365^{43}} = 0{,}92 = 92\ \%$$

Zelo veliko možnosti (92 %) imamo, da v skupini, kjer je 43 oseb, najdemo nekaj, ki si delijo rojstni dan.

Izračun števila parov, ki si delijo rojstni dan

Število oseb: $k = 43$ Število dni v letu: $n = 365$

Število možnih parov: $\binom{k}{2} = \frac{k\,(k-1)}{2}$

$$\binom{43}{2} = \frac{43 \cdot (43-1)}{2} = \frac{43 \cdot 42}{2} = 903$$

Pričakovano število parov: $\frac{\binom{k}{2}}{365} = \frac{903}{365} = 2{,}5$ (pričakujemo torej največ 3 pare)

Tabela 4: Učenci in razredniki 4. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	17. 7.	2	29. 10.	3	31. 10.	4	29. 9.	5	20. 11.
6	30. 10.	7	6. 8.	8	22. 9.	9	3. 12.	10	13. 1.
11	8. 11.	12	13. 10.	13	1. 5.	14	7. 8.	15	9. 1.
16	17. 8.	17	2. 12.	18	27. 11.	19	12. 9.	20	30. 1.
21	21. 8.	22	5. 7.	23	9. 1.	24	26. 6.	25	16. 8.
26	4. 12.	27	27. 12.	28	12. 12.	29	25. 1.	30	28. 1.
31	29. 7.	32	23. 1.	33	28. 8.	34	10. 2.	35	23. 1.
36	8. 4.	37	21. 9.	38	9. 1.	39	23. 10.	40	15. 10.
41	24. 12.	42	24. 9.	43	10. 3.				

Iz izračuna je razvidno, da pričakujemo največ tri pare. V razpredelnici pa vidimo, da imamo en »trojček« in en par, kar pomeni, da imamo 4 pare, saj »trojček« tvori 3 pare $\left(\frac{k!}{2}\right)$.

Osebe: A, B, C imajo rojstni dan na isti dan. Pari, ki jih tvorijo so: AB, AC, BC.

2.2.5 Učenci in razredniki 7. razredov

Izračun verjetnosti

Število oseb je 34. Verjetnost, da najdemo osebe, ki si delijo rojstni dan

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-34)! \cdot 365^{34}} = 0{,}80 = 80\ \%$$

Zelo veliko možnosti (80 %) imamo, da v skupini, kjer je 34 oseb, najdemo nekaj, ki si delijo rojstni dan.

Izračun števila parov, ki si delijo rojstni dan

Število oseb: $k = 34$

Število dni v letu: $n = 365$

Število možnih parov: $\binom{k}{2} = \frac{k\ (k-1)}{2}$

$$\binom{34}{2} = \frac{34 \cdot (34-1)}{2} = \frac{34 \cdot 33}{2} = 561$$

Pričakovano število parov: $\frac{\binom{k}{2}}{365} = \frac{561}{365} = 1{,}5$

Pričakujemo torej največ 2 para.

Tabela 5: Učenci in razredniki 7. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	2. 8.	2	22. 4.	3	25. 7.	4	10. 9.	5	6. 9.
6	24. 1.	7	7. 7.	8	8. 5.	9	21. 1.	10	2. 4.
11	23. 12.	12	6. 5.	13	7. 4.	14	4. 8.	15	28. 6.
16	15. 3.	17	7. 9.	18	21. 12.	19	13. 1.	20	20. 12.
21	2. 1.	22	14. 7.	23	3. 11.	24	18. 4.	25	28. 1.
26	23. 1.	27	8. 9.	28	7. 5.	29	21. 10.	30	30. 3.
31	11. 1.	32	26. 9.	33	18. 7.	34	16. 8.		

Iz razpredelnice je razvidno, da se izračuni ne ujemajo z dejanskim stanjem. Izračunali sva, da pričakujemo največ 2 para, iz razpredelnice pa je razvidno, da v razredu nisva našli niti enega para, ki bi si delil rojstni dan.

2.2.6 Učenci in razredniki tretje triade

Izračun verjetnosti

Število oseb je 113. Verjetnost, da najdemo osebe, ki si delijo rojstni dan

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-113)! \cdot 365^{113}} = 0{,}999 = 99{,}9\ \%$$

V skupini 113 oseb bomo skoraj zagotovo našli osebe, ki si delijo rojstni dan, saj je izračunana verjetnost kar 99,9 %.

Izračun števila parov, ki si delijo rojstni dan

Število oseb: $k = 113$

Število dni v letu: $n = 365$

Število možnih parov: $\binom{k}{2} = \frac{k\,(k-1)}{2}$

$$\binom{113}{2} = \frac{113 \cdot (113-1)}{2} = \frac{113 \cdot 112}{2} = 6328$$

Pričakovano število parov: $\frac{\binom{k}{2}}{365} = \frac{6328}{365} = 17{,}3$

Pričakujemo torej največ 17 parov.

Tabela 6: Učenci in razredniki tretje triade

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	22. 4.	2	14. 7.	3	25. 1.	4	9. 12.	5	20. 8.
6	25. 7.	7	3. 11.	8	26. 9.	9	23. 11.	10	6. 8.
11	10. 9.	12	18. 4.	13	18. 1.	14	28. 9.	15	8. 10.
16	6. 9.	17	28. 1.	18	1. 10.	19	7. 3.	20	10. 12.
21	24. 1.	22	23. 1.	23	9. 12.	24	7. 12.	25	6. 12.
26	7. 7.	27	8. 9.	28	30. 8.	29	20. 2.	30	23. 9.
31	8. 5.	32	7. 5.	33	4. 2.	34	16. 12.	35	13. 2.
36	21. 1.	37	21. 10.	38	7. 1.	39	18. 9.	40	21. 3.
41	2. 4.	42	30. 3.	43	5. 10.	44	30. 7.	45	24. 12.
46	23. 12.	47	17. 7.	48	12. 3.	49	3. 5.	50	26. 8.

51	6. 5.	52	2. 4.	53	20. 9.	54	11. 12.	55	4. 8.
56	7. 4.	57	4. 9.	58	2. 6.	59	2. 9.	60	28. 6.
61	4. 8.	62	26. 12.	63	28. 5.	64	13. 9.	65	23. 9.
66	28. 6.	67	13. 2.	68	19. 5.	69	1. 7.	70	28. 8.
71	15. 3.	72	6. 1.	73	23. 4.	74	9. 5.	75	11. 10.
76	7. 9.	77	22. 8.	78	13. 7.	79	22. 9.	80	13. 1.
81	21. 12.	82	14. 11.	83	29. 7.	84	25. 11.	85	14. 3.
86	13. 1.	87	28. 4.	88	11. 9.	89	4. 7.	90	7. 9.
91	20. 12.	92	7.6.	93	2. 9.	94	28. 11.	95	29. 6.
96	2. 1.	97	20.1.	98	15. 2.	99	9. 2.	100	5. 7.
101	2. 8.	102	11. 1.	103	26. 9.	104	16. 8.	105	18. 7.
106	22. 8.	107	31. 10.	108	25. 10.	109	31. 8.	110	21. 10.
111	18. 1.	112	19. 10.	113	15. 8.				

Glede na izračune sva pričakovali največ 17 parov. Iz razpredelnice je razvidno, da je v tretji triadi 13 parov, ki si delijo rojstni dan.

3 RAZPRAVA

Ugotovitve podajava glede na zbrane podatke in izračune ter jih interpretirava na podlagi hipotez.

- Hipoteza 1: **V večini izračunanih primerov se bo rezultat ujemal z dejanskim stanjem.**

Hipotezo lahko **potrdiva**, saj se v večini primerov rezultati ujemajo s pričakovanim. Primerjava izračunov in dejansko stanje v vseh devetih paralelkah na naši šoli:

  - Vse izračunane verjetnosti, da najdemo par oseb, ki si deli rojstni dan, so bile zelo velike (med 80% in 94%). Para nisva našli le v enem primeru, v 7. razredih, kjer je bila verjetnost najmanjša (80 %).
  - Računali sva tudi pričakovano število parov. Tudi pri teh izračunih se je rezultat ujemal kar v petih paralelkah (1., 2., 5., 6., 8. razredih), kjer sva dobili pričakovano število parov. V enem primeru (7. r) nisva našli para, čeprav smo ga pričakovali. V dveh primerih (3. in 9. r) sva od pričakovanih dveh parov našli enega. V 4. razredih pa sva našli celo več parov (4 pari) kot sva pričakovali (3 pari).

Primerjava izračunov in dejansko stanje v izbranih šestih oddelkih (7. a, 7. b, 8. a, 8. b, 9. a, 9. b) na naši šoli:

  - Izračunane verjetnosti, da najdeva par oseb, ki si deli rojstni dan, niso bile velike (med 32% in 47%). Para nisva našli kar v štirih primerih (7. a, 7. b, 8. b, 9. a).

- Hipoteza 2: **Našli bova paralelko, kjer bo več parov rojenih na isti dan, kot bo izračunano.**

Hipotezo lahko **potrdiva**. Iz tabele 4 je razvidno, da je v 4. razredu več parov (4 pari), kot sva pričakovali (3 pari). Pravzaprav imamo v četrtem razredu zanimivost, saj smo dobili en par in en »trojček«. Trojček pomeni, da imamo kar tri osebe, ki imajo rojstni dan na isti dan. Te tri osebe (A, B, C) potem prispevajo tri pare (AB, AC, BC).

- Hipoteza 3: **Našli bova paralelko, kjer ne bo niti enega para, ki je rojen na isti dan.**

To hipotezo lahko **potrdiva**, saj sva našli paralelko, kjer ni nobenega para, oz. nobenega učenca, ki bi si delil rojstni dan. To so sedmi razredi, kar je razvidno iz tabele 5. Zanimivo je, da med njimi nisva našli para, čeprav je bila verjetnost kar 80 %.

4 ZAKLJUČEK

Namen najine naloge je bil s pomočjo verjetnosti preveriti rojstnodnevni paradoks. Ta pravi, da je že pri 23 osebah 50 % verjetnost, da najdemo par, ki ima rojstni dan na isti dan. Hoteli sva ugotoviti, ali teorija v resnici drži.

Dela sva se lotili sistematično. V teoretičnem delu sva se najprej naučili, kaj je verjetnost in pogojna verjetnost. V osrednjem delu sva najprej zbrali rojstne podatke učencev in zaposlenih na naši šoli ter jih uredili v tabele. Dvojčke sva obravnavali kot eno osebo in uporabili datum samo enkrat. Med tako urejenimi podatki sva poiskali osebe, ki so imele isti rojstni datum. Nato sva vsakokrat izračunali verjetnost, da najdemo par, in pričakovano število parov. Ugotavljali sva ali se izračunani podatki ujemajo z dejanskim stanjem iz tabele.

Odločili sva se, da rojstnodnevni paradoks najprej raziščeva na manjšem številu oseb, zato sva izbrali oba 7., 8. in 9. razreda z razredniki. Tako je bilo število oseb v posameznih razredih med 17 in 22. Izračunane verjetnosti, da najdeva par oseb, ki si deli rojstni dan, niso bile velike (med 32% in 47%). Para nisva našli kar v štirih primerih (7. a, 7. b, 8. b, 9. a). Zanimivo je, da smo v primeru 7. a razreda in 8. b razreda imeli enako število oseb, to je 18, in v nobenem razredu nisva našli para, kar se ujema z izračuni (verjetnost je bila le 34 %).

Nato sva teorijo preverjali na večjem številu oseb, zato sva izbrali vseh devet paralelk naše šole. Številu učencev sva dodali tudi njihove razrednike. Tako je bilo število oseb v posameznih paralelkah med 34 in 45. Vse izračunane verjetnosti, da najdeva par oseb, ki si deli rojstni dan, so bile zelo velike (med 80 % in 94 %). Para nisva našli le v enem primeru, v 7. razredih, kjer je bila verjetnost najmanjša (80 %). Računali sva tudi pričakovano število parov. Tudi pri teh izračunih se je rezultat ujemal kar v petih paralelkah (1., 2., 5., 6., 8. razredih), kjer sva dobili pričakovano število parov. V enem primeru (7. r) nisva našli para, čeprav sva jih pričakovali. V dveh primerih (3. in 9. r) sva od pričakovanih dveh parov našli enega. V 4. razredih pa sva našli celo več parov (4 pari) kot sva pričakovali (3 pari).

Kot zanimivost sva izračunali tudi verjetnost, da med 113 osebami tretje triade najdemo pare, ki si delijo rojstni dan. Verjetnost je v tem primeru bila kar 99,9 %. Res sva našli 13 parov.

Ob pisanju raziskovalne naloge sva se naučili in spoznali veliko novega. Ugotavljava, da teorija v praksi res velja. In to je lepota matematike.

5 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Matematika je nepogrešljiva na različnih področjih v življenju. Marsikatere naprave ne bi bilo danes (računalniki, medicinska oprema …) brez razvoja matematike. Z verjetnostnim računom v ekonomiji pomagajo predvidevati razna dogajanja, tako kot sva predvidevali o skupnih rojstnih dnevih. Pravzaprav je matematika zelo pomembna za razvijanje abstraktnega mišljenja in logičnega sklepanja. Uči nas natančnosti in doslednosti.

V življenju se pogosto srečujemo s trditvami, ki se ne skladajo s splošno veljavnimi dejstvi, zdijo se nam abstraktni in o njih pogosto ne razmišljamo. Včasih jih uporabimo v pogovoru, se z njimi poigravamo v debatah, le redko pa resno razmišljamo o njih. Z raziskovalno nalogo sva želeli pokazati in predstaviti, da se »abstraktnost« v matematiki lahko »prevede« v realno življenje, kjer se pokaže še tako nemogoča stvar zelo mogoča.

6 VIRI IN LITERATURA

6.1 Knjižni viri

- Čibej, J. A. (1997). *Matematika. Kombinatorika. Verjetnostni račun. Statistika*. Ljubljana. DZS.
- Bon Klajnšek M. [et al.] (2012). *Matematika 4. Učbenik za gimnazije.* Ljubljana. DZS.
- Šparovec, J. [et al.] (2005). *Tempus čas. Matematika za 4. letnik gimnazij.* Ljubljana. Modrijan.

6.2 Spletni viri

- Friedl, N. (2006). *Matematični paradoksi. Seminar II.* Fakulteta za matematiko in fiziko. Ljubljana. (pridobljeno 20. 12. 2016)
- Petric, D. (2010). *Skupni rojstni dnevi in normalna porazdelitev*. *Seminar II.* Univerza v Ljubljani. Fakulteta za matematiko in fiziko. Ljubljana. (pridobljeno 15. 11. 2016)
- *Rojstnodnevni paradoks.* Spletna stran (pridobljeno 30. 1. 2017): http://bs.matematika.wikia.com/wiki/Paradoks_ro%C4%91endana
- *Verjetnost dogodka.* Spletna stran (pridobljeno 15. 12. 2016): https://si.openprof.com/wb/verjetnost_dogodka?ch=160
- *Verjetnost.* Spletna stran (pridobljeno 15. 12. 2016): http://www.dijaski.net/gradivo/mat_ref_verjetnost_01?r=1
- *Verjetnost.* Spletna stran (pridobljeno 15. 12. 2016): http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/verjetno.html

7 PRILOGE

7.1 7. a razred

Tabela 7: Rojstni datumi učencev in razrednika 7. a razreda

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	2. 8.	2	22. 4.	3	25. 7.	4	10. 9.	5	6. 9.
6	24. 1.	7	7. 7.	8	8. 5.	9	21. 1.	10	2. 4.
11	23. 12.	12	6. 5.	13	7. 4.	14	4. 8.	15	28. 6.
16	15. 3.	17	11. 1.	18	26. 9.				

Izračun verjetnosti, da med 18 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-18)! \cdot 365^{18}} = 0{,}34 = 34\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{18\,(18-1)}{2}}{365} = 0{,}4$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je bila zelo majhna, 34%. Iz razpredelnice je razvidno, da nismo našli para, ki bi si delila rojstni dan.

7.2 7. b razred

Tabela 8: Rojstni datumi učencev in razrednika 7. b razreda

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	18. 7.	2	7. 9.	3	21. 12.	4	13. 1.	5	20. 12.
6	2. 1.	7	14. 7.	8	3. 11.	9	18. 4.	10	28. 1.
11	23. 1.	12	8. 9.	13	7. 5.	14	21. 10.	15	30. 3.
16	16. 8.	17	26. 9.						

Izračun verjetnosti, da med 17 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^{n}} = 1 - \frac{365!}{(365-17)! \cdot 365^{17}} = 0{,}32 = 32\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{17\,(17-1)}{2}}{365} = 0{,}3$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je bila zelo majhna, 32%. Iz razpredelnice je razvidno, da nismo našli para, ki bi si delila rojstni dan.

7.3 9. a razred

Tabela 9: Rojstni datumi učencev in razrednika 9. a razreda

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	7. 3.	2	7. 12.	3	20. 2.	4	16. 12.	5	18. 9.
6	30. 7.	7	3. 5.	8	11. 12.	9	2. 9.	10	13. 9.
11	1. 7.	12	9. 5.	13	22. 9.	14	25. 11.	15	4. 7.
16	28. 11.	17	9.2.	18	20. 8.	19	6. 8.	20	8. 10.
21	21. 10.	22	18. 1.						

Izračun verjetnosti, da med 22 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-22)! \cdot 365^{22}} = 0{,}47 = 47\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{22\,(22-1)}{2}}{365} = 0{,}6$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je bila 47 %. Iz razpredelnice je razvidno, da nismo našli para, ki bi si delila rojstni dan.

7.4 9. b razred

Tabela 10: Rojstni datumi učencev in razrednika 9. b razreda

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	10. 12.	2	6. 12.	3	23. 9.	4	13. 2.	5	21. 3.
6	24. 12.	7	26. 8.	8	4. 8.	9	28. 6.	10	23. .
11	28. 8.	12	11. 10.	13	13. 1.	14	14. 3.	15	7. 9.
16	29. 6.	17	5. 7.	18	19. 10.	19	15. 8.		

Izračun verjetnosti, da med 19 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-19)! \cdot 365^{19}} = \quad 0{,}38 = 38\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{19\,(19-1)}{2}}{365} = 0{,}4$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, ni bila velika, 38 %. Iz razpredelnice je razvidno, da imamo par, ki si deli rojstni dan, kar naju je presenetilo.

7.5 Učenci in razredniki prvih razredov

Tabela 11: Učenci in razredniki 1. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	17. 8	2	8. 1.	3	10. 6.	4	2. 10.	5	18. 3.
6	14. 5.	7	3. 9.	8	12. 2.	9	19. 10.	10	13. 1.
11	13. 5.	12	7. 10.	13	14. 4.	14	12. 12.	15	16. 6.
16	9. 9.	17	26. 6.	18	20. 9.	19	20. 3.	20	17. 8.
21	6. 11.	22	5. 9.	23	17. 12.	24	18. 6.	25	30. 12.
26	7. 6.	27	10. 12	28	12. 5.	29	29. 6.	30	25. 5.
31	15. 8.	32	30. 8.	33	3. 2.	34	19. 11.	35	5. 10
36	18. 8.	37	16. 1.	38	14. 1.	39	19. 1.	40	19. 9.
41	13. 1	42	31. 5.	43	27. 6.	44	23. 12		

Izračun verjetnosti, da med 44 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-44)! \cdot 365^{44}} = 0{,}93 = 93\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{44\,(44-1)}{2}}{365} = 2{,}6$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je bila zelo velika, 93 %. Iz razpredelnice je razvidno, da imamo res 2 para oseb, kar ustreza pričakovanemu številu.

7.6 Učenci in razredniki drugih razredov

Tabela 12: Učenci in razredniki 2. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	14. 3.	2	7. 11.	3	28. 4.	4	9. 10.	5	3. 3.
6	21. 6.	7	31. 1.	8	17. 3.	9	19. 3.	10	20. 6.
11	25. 7.	12	8. 1.	13	17. 10.	14	21. 2.	15	2. 6.
16	23. 10.	17	23. 7.	18	12. 12.	19	18. 7.	20	17. 10.
21	14. 7.	22	19. 8.	23	17. 3.	24	3. 7.	25	22. 9.
26	7. 2.	27	16. 9.	28	21. 3.	29	9. 2.	30	15. 8.
31	9. 1.	32	30. 1.	33	11. 1.	34	20. 8.	35	2. 4.
36	8. 10.	37	9. 7.	38	12. 4.	39	2. 4.	40	18. 7.
41	1. 12.								

Izračun verjetnosti, da med 41 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^{n}} = 1 - \frac{365!}{(365-41)! \cdot 365^{41}} = 0{,}90 = 90\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{41\,(41-1)}{2}}{365} = 2{,}2$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je 90 %. Iz razpredelnice je razvidno, da imamo res 2 para oseb, kar ustreza pričakovanemu številu.

7. 7 Učenci in razredniki tretjih razredov

Tabela 13: Učenci in razredniki 3. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	27. 2.	2	29. 5.	3	30. 10.	4	11. 3.	5	20. 6.
6	22. 1.	7	11. 6.	8	22. 10.	9	31. 1.	10	12. 6.
11	2. 2.	12	17. 10.	13	24. 3.	14	7. 8.	15	30. 7.
16	31. 8.	17	19. 7.	18	17. 12.	19	9. 10.	20	24. 4.
21	6. 1.	22	27. 10.	23	23. 8.	24	28. 9.	25	23. 10.
26	13. 5.	27	26. 3.	28	8. 11.	29	31. 8.	30	19. 4.
31	25. 7.	32	16. 9.	33	5. 6.	34	15. 7.	35	9. 11.
36	4. 10.	37	14. 8.	38	22. 11.	39	25. 1.	40	7. 6.
41	28. 10.	42	15. 8.						

Izračun verjetnosti, da med 42 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^{n}} = 1 - \frac{365!}{(365-42)! \cdot 365^{42}} = 0{,}91 = 91\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{42(42-1)}{2}}{365} = 2{,}4$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je 91 %. Iz razpredelnice je razvidno, da imamo 1 par, čeprav smo pričakovali 2 para.

7. 8 Učenci in razredniki petih razredov

Tabela 14: Učenci in razredniki 5. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	3. 3.	2	13. 4.	3	5. 10.	4	15. 3.	5	3. 5.
6	19. 7.	7	30. 10.	8	1. 10.	9	12. 2.	10	5. 1.
11	11. 3.	12	11. 4.	13	19. 7.	14	6. 12.	15	12. 6.
16	6. 5.	17	3. 5.	18	16. 1.	19	4. 2.	20	29. 1.
21	26. 5.	22	11. 8.	23	18. 10.	24	10. 5.	25	20. 3.
26	24. 5.	27	25. 4.	28	2. 8.	29	28. 4.	30	27. 9.
31	12. 5.	32	14. 2.	33	25. 3.	34	1. 2.	35	22. 11.
36	4. 7.	37	7. 11.	38	22. 8.	39	24. 3.	40	13. 9.
41	14. 12.	42	5. 12.	43	19. 3.	44	3. 6.	45	19. 8.

Izračun verjetnosti, da med 45 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-45)! \cdot 365^{45}} = 0{,}94 = 94\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{45\,(45-1)}{2}}{365} = 2{,}7$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je zelo velika 94 %. Iz razpredelnice je razvidno, da imamo 2 para oseb, kar smo tudi pričakovali.

7.9 Učenci in razredniki šestih razredov

Tabela 15: Učenci in razredniki 6. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	1. 7.	2	23. 6.	3	8. 11.	4	19. 11.	5	2. 2.
6	10. 5.	7	19. 9.	8	26. 3.	9	12. 4.	10	29. 11.
11	17. 9.	12	4. 12.	13	27. 7.	14	8. 6.	15	24. 2.
16	22. 3.	17	14. 7.	18	2. 1.	19	6. 4.	20	14.9.
21	30. 5.	22	17. 12.	23	25. 10.	24	11. 4.	25	2. 2.
26	30. 7.	27	18. 12.	28	23. 10.	29	11. 11.	30	11. 5.
31	6. 8.	32	8. 9.	33	2. 6.	34	8. 4.	35	13. 7.
36	29. 3.	37	13. 5.						

Izračun verjetnosti, da med 37 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-37)! \cdot 365^{37}} = 0{,}85 = 85\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{37\,(37-1)}{2}}{365} = 1{,}8$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je 85 %. Iz razpredelnice je razvidno, da imamo 1 par, kar ustreza pričakovanemu številu.

7.10 Učenci in razredniki devetih razredov

Tabela 16: Učenci in razredniki 9. razredov

OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN	OSEBA	ROJST. DAN
1	7. 3.	2	7. 12.	3	20. 2.	4	16. 12.	5	18. 9.
6	30. 7.	7	3. 5.	8	11. 12.	9	2. 9.	10	13. 9.
11	1. 7.	12	9. 5.	13	22. 9.	14	25. 11.	15	4. 7.
16	28. 11.	17	9. 2.	18	20. 8.	19	6. 8.	20	8. 10.
21	10. 12.	22	6. 12.	23	23. 9.	24	13. 2.	25	21. 3.
26	24. 12.	27	26. 8.	28	4. 8.	29	28. 6.	30	23. 9.
31	28. 8.	32	11. 10.	33	13. 1.	34	14.3.	35	7. 9.
36	29. 6.	37	5. 7.	38	21. 10.	39	18. 1.	40	15. 8.
41	19. 10.								

Izračun verjetnosti, da med 41 osebami najdemo par, ki ima na isti dan rojstni dan:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-41)! \cdot 365^{41}} = 0{,}90 = 90\ \%$$

Izračun pričakovanega števila parov, ki si delijo rojstni dan

$$\frac{\binom{n}{2}}{365} = \frac{\frac{n\,(n-1)}{2}}{365} = \frac{\frac{41\,(41-1)}{2}}{365} = 2{,}2$$

Verjetnost, da najdemo pare, ki si delijo rojstni dan, je 90 %. Glede na izračun je bilo pričakovano, da bosta 2 para, dejansko pa je samo 1 par.