»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2017«

34. SREČANJE

REULEAUXOV TRIKOTNIK

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: LEA STRNIŠA, LARA STEGNAR

Mentor: ALENKA REPNIK

Šola: OŠ BORCEV ZA SEVERNO MEJO MARIBOR

Maribor, januar 2017

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2017«

34. SREČANJE

REULEAUXOV TRIKOTNIK

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Maribor, januar 2017

KAZALO

KAZALO SLIK

POVZETEK

Ali ste vedeli, da krog ni edini lik s konstantno širino?

V nalogi predstavljamo like s konstantno širino. Raziščemo ploščino ter obseg reuleauxovega trikotnika ter primerjamo ploščine in obsege likov s konstantno širino. Posebno pozornost namenjamo reuleauxovemu trikotniku. Predstavimo postopek konstrukcije reuleauxovega trikotnika in večkotnika, za kar uporabimo metodo grafične ponazoritve in programa dinamične geometrije. Uporabimo tudi druge metode, predvsem raziskovanje pisnih virov.

1 UVOD

1.1 Namen in cilj naloge

Med poukom smo učbenik postavili na dva svinčnika in ugotovili, da smo ga zlahka premikali po mizi, kar nas je začudilo, saj sta svinčnika bila trikotna. Zato smo svinčnika podrobneje opazovali in ugotovili, da nista povsem trikotna, čeprav na prvi pogled izgleda tako. Enako obliko smo zasledili še pri nekaterih drugih predmetih, ki so predstavljeni na spodnjih slikah.

Slika 1: Grb NK Maribor (vir: https://sl.wikipedia.org/wiki/Nogometni_klub_Maribor, 12. 12. 2016)

Slika 2: Svinčnik in šilček (vir: http://www.redoljub.si/ , 12. 12. 2016)

Slika 3: Posodica za prigrizke (vir: avtor)

Oblika nas je tako pritegnila, da smo želeli izvedeti njeno ime in čim več o njej. Sprva smo iskali odgovore na svoja vprašanja po svetovnem spletu, a po več neuspešnih poskusih smo za pomoč prosili učiteljico matematike. Končno smo prišli do imena skrivnostne oblike in se odločili o tem narediti raziskovalno nalogo.

Prvič smo slišali za reuleauxov trikotnik in seveda poiskali gospoda, čigar ime nosi lik, ki smo se ga lotili raziskati. Želeli smo ugotoviti, kako se reuleauxov trikotnik nariše in kako bi temu liku izračunali obseg in ploščino. Zakaj mu pravimo, da je lik s konstantno širino (mar ni to le krog?) in ali obstajajo tudi drugi liki s konstantno širino.

1.2 Hipoteze

Hipoteza 1: Reuleauxov večkotnik lahko dobimo iz poljubnega pravilnega večkotnika.

Hipoteza 2: Od vseh likov z enako konstantno širino ima krog največji obseg, reuleauxov trikotnik pa najmanjši.

Hipoteza 3: Od vseh likov z enako konstantno širino ima krog največjo ploščino, reuleauxov trikotnik pa najmanjšo.

1.3 Franz Reuleaux

Franz Reuleaux[1] se je rodil 30. septembra 1829 v Eschweilerju v Nemčiji (takratna Prusija) kot četrti sin Johanna Josefa Reuleauxa. Družina je imela belgijske korenine, njegov oče pa je bil eden prvih proizvajalcev parnih črpalk v Belgiji in Nemčiji. Mati je bila pisateljica otroških knjig in romanov za mlade. Oče mu je umrl, še preden je Franz dopolnil pet let. Po očetovi smrti se je družina preselila v Koblenz, kjer je eden od Franzovih stricev ohranil družinsko podjetje. Franz je sprva študiral na Politehničnem inštitutu Karlsruhe, kjer je študiral strojništvo, po dveh letih pa nadaljeval študij filozofije in naravoslovnih ved v Berlinu in kasneje še v Bonnu. Po končanem študiju se je vrnil v Koblenz, kjer je v družinskem podjetju izdeloval stroje. Tradicija, ki so jo nanj prenesli njegov ded in oče ter stric in starejša brata. Malo pred tridesetim letom so ga povabili na Politehnični inštitut v Zürich.

Slika 4: Franz Reuleaux (vir: Moon, 2007, str. 6)

[1] Celoten življenjepis je povzet po:
- Wikipedia
- Moon, 2007, str. 48 - 52

Leta 1879 je postal rektor Königs Technischen Hochschule Berlin – Charlottenburg, ki je bila precej velika, saj je na njej učilo kar 300 profesorjev. Splošno znan je bil kot inženir – znanstvenik, profesor in industrijski svetovalec. Bil je vodja tehnične elite v Nemčiji in sodeloval pri reformaciji tehničnega izobraževanja. Reuleaux je bil član številnih komisij in žirij, znotraj katerih je sodeloval pri vzpostavitvi patentnega sistema. Od leta 1882 je bil član Švedske kraljeve akademije znanosti.

Franz Reuleaux je bil po izobrazbi strojni inženir in se je ukvarjal predvsem s kinematiko. Znan je kot 'oče' moderne kinematike (veja fizike, ki proučuje gibanje teles) in je pomembno prispeval k novim dognanjem na področju znanosti.

V zakonu z Charlotte Overbeck se mu je rodilo pet otrok, dva sinova in tri hčere. Prepotoval je ves svet, poleg stroke pa se je zanimal za številne vidike življenja.

Franz Reuleaux je izdal nekaj knjig, večinoma na temo strojništva in oblikovanja v strojništvu. Poleg strokovne literature je napisal tudi nekaj drugih knjig in prevodov, še posebej pomembno delo pa je bila enciklopedija z naslovom Knjiga izumov *(Buch der Erfindungen)* iz leta 1890.

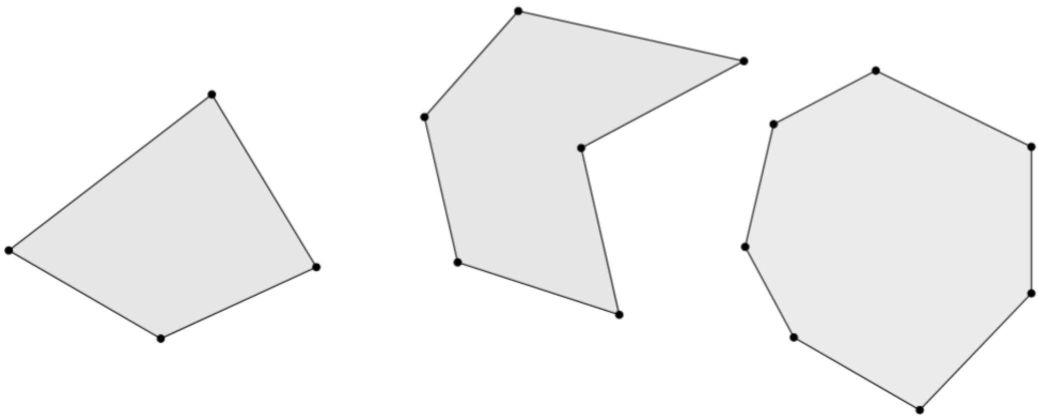
Umrl je 20. avgusta 1905 v Charlottenburgu v Nemčiji.

V matematiki ga najbolje prepoznamo po reuleauxovem trikotniku, ki ga bomo podrobno predstavili v raziskovalni nalogi.

1.4 Večkotniki in krog

1.4.1 Večkotniki

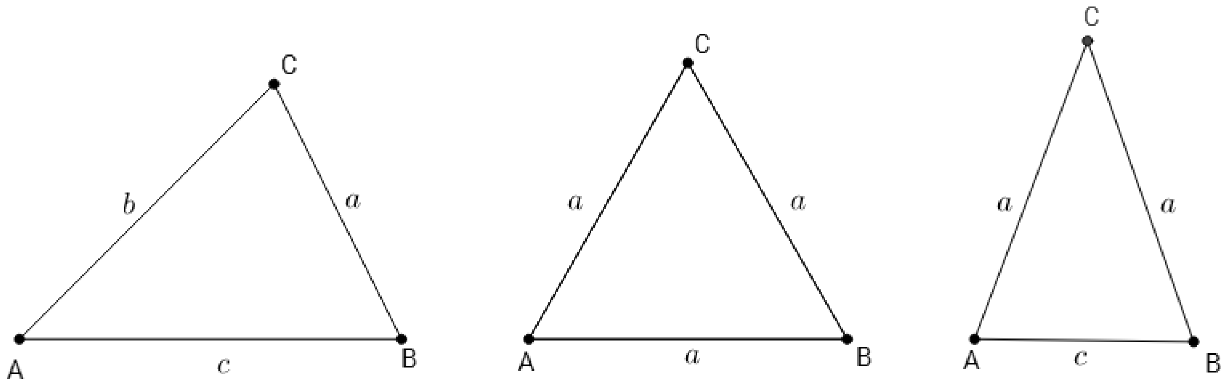
Definicija 1: Večkotniki so enostavne sklenjene lomljenke, ki tvorijo geometrijske like. Imenujemo jih po številu oglišč (stranic, notranjih kotov, zunanjih kotov).



Slika 5: Večkotniki (vir: avtor)

Definicija 2: Trikotnik je geometrijski lik, ki je določen s tremi točkami, ki ne ležijo na isti premici.

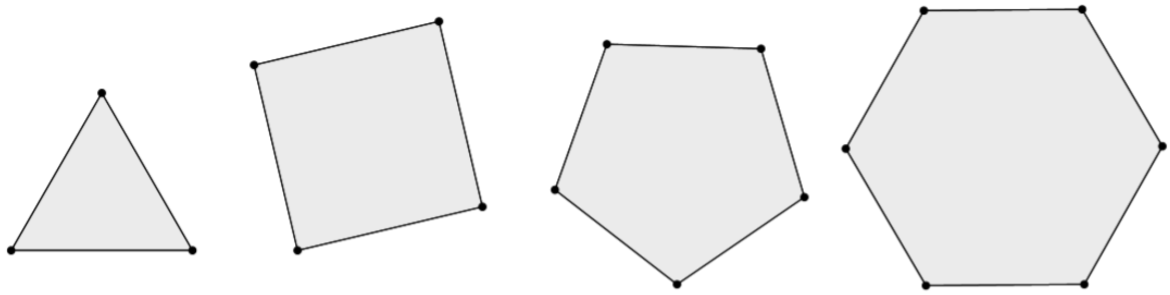
Glede na dolžine stranic ločimo: raznostranični trikotnik, enakokraki trikotnik, enakostranični trikotnik (ali pravilni trikotnik).



Slika 6: Trikotniki glede na dolžine stranic – od leve: raznostranični, enakostranični in enakokraki (vir: avtor)

1.4.2 Pravilni večkotniki

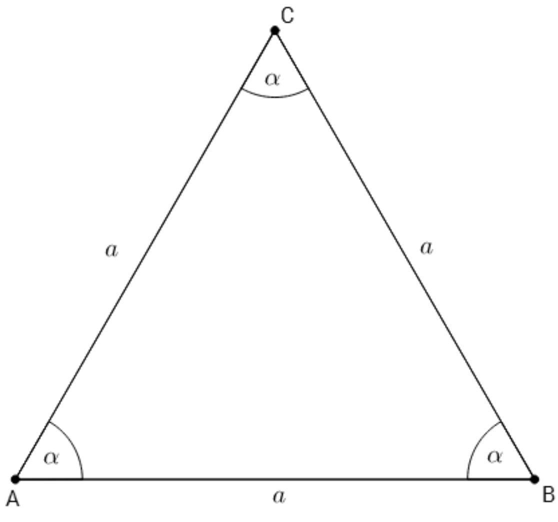
Definicija 3: Večkotnik je pravilen, kadar ima vse stranice enako dolge in vse notranje kote skladne.



Slika 7: Pravilni večkotniki (vir: avtor)

1.4.2.1 Enakostranični trikotnik

Pravilni večkotnik, ki ima najmanj oglišč (stranic, kotov) je enakostranični trikotnik (ali pravilni trikotnik). Enakostranični trikotnik je trikotnik, katerega vse tri stranice so med seboj skladne. Tudi vsi notranji koti enakostraničnega trikotnika so med seboj skladni, torej vsak notranji kot meri natanko 60°.



Slika 8: Enakostranični trikotnik (vir: avtor)

1.4.2.2 Obseg in ploščina enakostraničnega trikotnika

Obseg enakostraničnega trikotnika:

$$o = 3 \cdot a$$

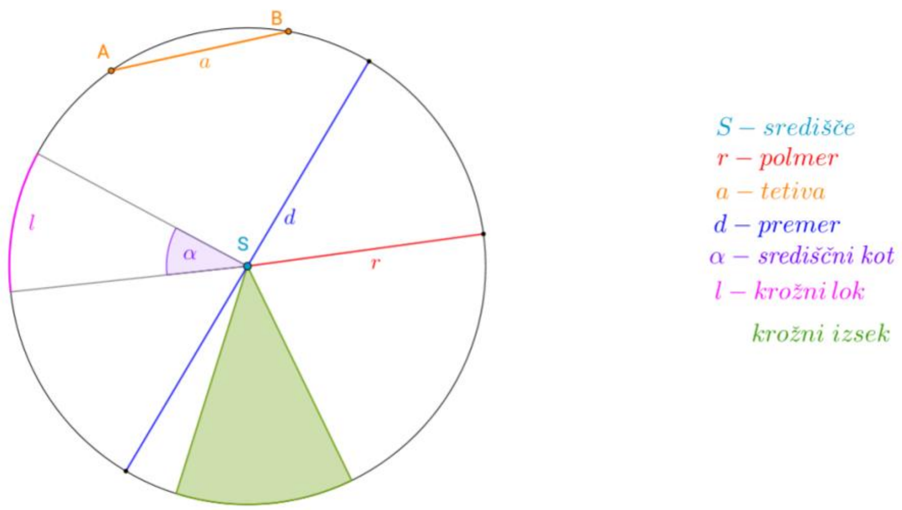
Ploščina enakostraničnega trikotnika:

$$p = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

1.4.3 Krog in deli kroga

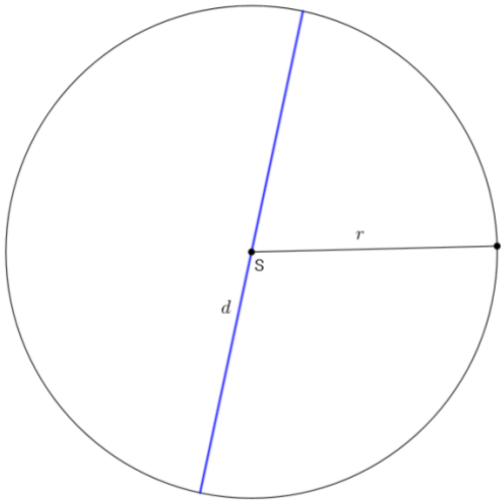
Krog je geometrijski lik (del ravnine), ki ga omejuje krožnica.

Definicija 4: Krožnica je množica točk, ki so enako oddaljene od dane točke. To točko imenujemo središče krožnice (kroga).



Slika 9: Krog in deli kroga (vir: avtor)

Definicija 5: Polmer ali radij krožnice je razdalja med središčem krožnice in poljubno točko na krožnici. Premer je daljica, ki povezuje nasprotni točki na krožnici in gre skozi središče krožnice.



Slika 10: Krog – polmer (r), premer (d) (vir: avtor)

Definicija 6: Tetiva je daljica, ki povezuje poljubni točki na krožnici.

Premer je torej najdaljša tetiva.

Definicija 7: Del krožnice, omejen z dvema točkama, imenujemo krožni lok.

Definicija 8: Središčni kot nad danim krožnim lokom je kot, ki ima vrh v središču krožnice, kraka kota sta določena s krajiščema loka.

To pomeni, da če točki, ki omejujeta krožni lok, povežemo s središčem krožnice, polmera oklepata središčni kot, ki mu ta krožni lok pripada.

Definicija 9: Krožni izsek je del kroga, ki ga omejujeta polmera in krožni lok.

1.4.3.1 Obseg in ploščina kroga

Obseg kroga izračunamo s pomočjo obrazca $o = d \cdot \pi$, pri čemer je d premer kroga, π pa konstanta, ki jo imenujemo Arhimedova konstanta, Ludolfovo število ali krožna konstanta. Vrednost te konstante je enaka količniku med obsegom in premerom kroga. Število π je iracionalno število, zato največkrat uporabljamo njegov približek $\pi \doteq 3{,}14$.

Slika 11: Ludolfovo število
(vir: *https://3c1703fe8d.site.internapcdn.net/newman/csz/news/800/2016/pimightlookr.jpg, 11. 1. 2017)*

Premer je dvakratnik polmera ($d = 2r$), zato lahko obrazec za izračun obsega kroga zapišemo tudi v naslednji obliki:

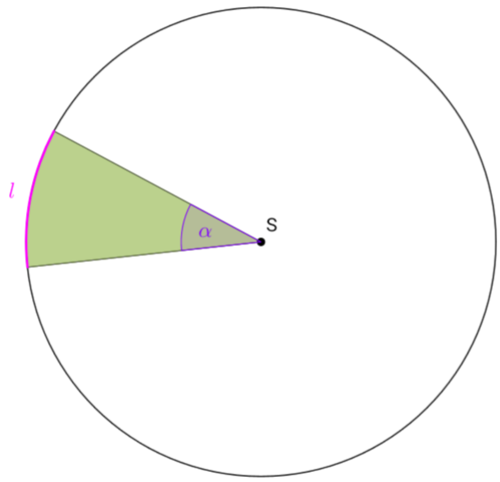
$$o = 2\pi r,$$

pri čemer je r polmer kroga.

Za izračun ploščine kroga uporabimo obrazec:

$$p = \pi r^2.$$

1.4.3.2 Dolžina krožnega loka in ploščina krožnega izseka



Slika 12: Krožni lok in krožni izsek (vir: avtor)

Dolžino krožnega loka lahko izračunamo s pomočjo obsega kroga. Obseg kroga delimo s 360° *(polni kot)*, da dobimo dolžino loka nad središčnim kotom, ki meri 1°. Nato dobljeno vrednost pomnožimo z velikostjo središčnega kota α, ki mu krožni lok pripada.

$$l = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360°}$$

Podobno izračunamo ploščino krožnega izseka s pomočjo ploščine kroga. Ploščino kroga delimo s 360° in pomnožimo z velikostjo središčnega kota (α), ki mu krožni izsek pripada.

$$p_{izs} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°}$$

2 METODOLOGIJA DELA

Pri raziskovanju so bile uporabljene naslednje metode:

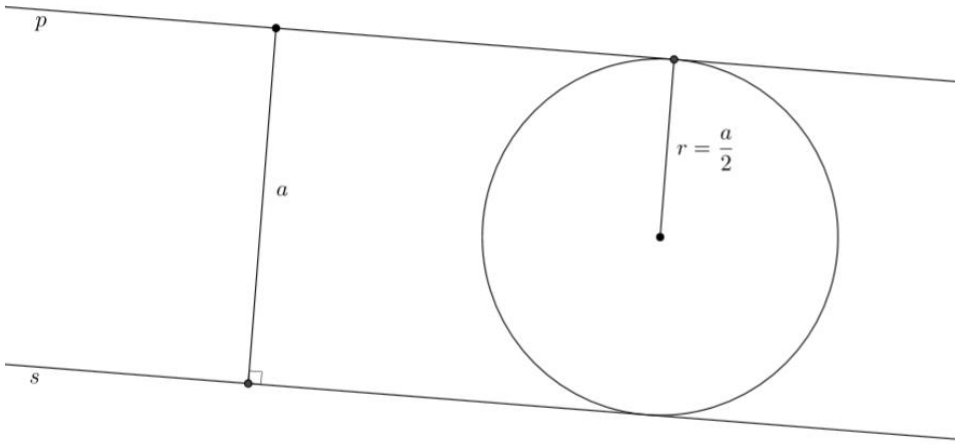
- metoda raziskovanja pisnih virov,
- metode grafičnih ponazoritev (fotografije in grafične ponazoritve s pomočjo računalniškega programa za dinamično geometrijo GeoGebre ter s pomočjo ravnila in šestila),
- računanje,
- sklepanje,
- načrtovanje,
- opazovanje.

3 REZULTATI IN RAZPRAVA

3.1 Liki s konstantno širino

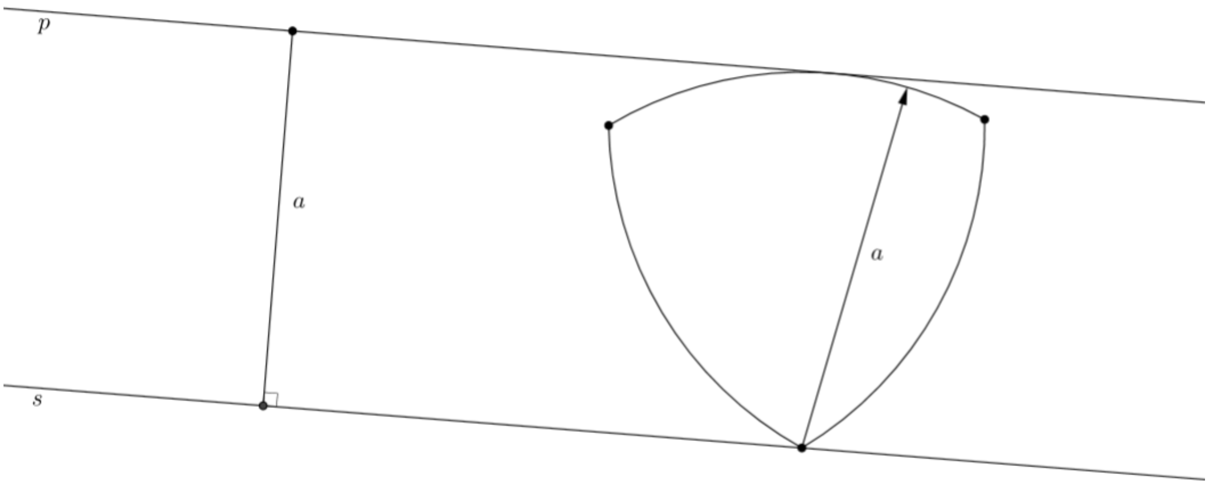
Če krog 'ogradimo' z vzporednima premicama, ki se ga dotikata, pravimo, da je razdalja med vzporednicama širina lika. Pri krogu je ta širina enaka v vseh smereh. Zato pravimo, da je krog lik s konstantno širino.

Razdalja med premicama, ki ji pravimo širina lika, je enaka premeru kroga. Torej bi lahko rekli, da je širina kroga njegov premer. Krog s polmerom r se zato lahko vrti med vzporednima premicama in se ju pri tem neprestano dotika.

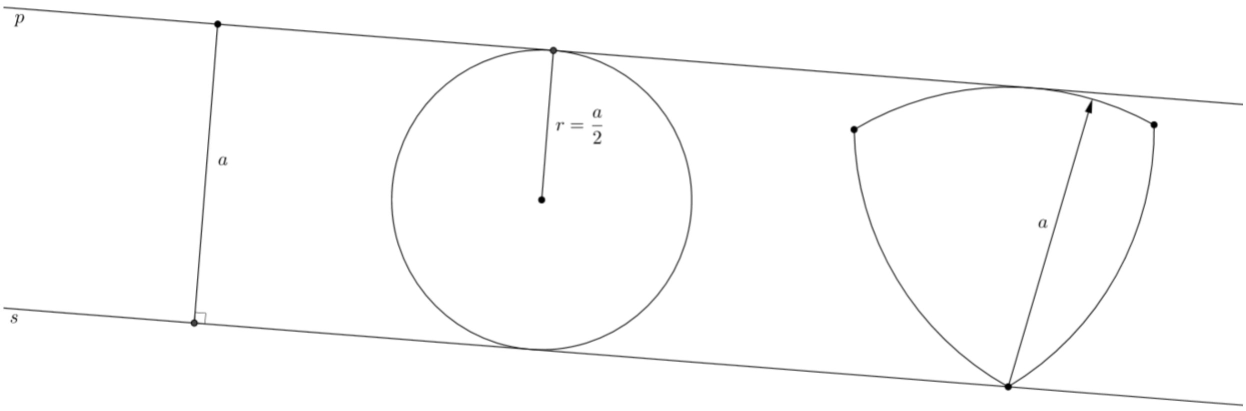


Slika 13: Krog med vzporednima premicama (vir: avtor)

Vendar krog ni edini lik s konstantno širino. Takšen lik je tudi reuleauxov trikotnik. Če ga namreč 'ogradimo' z vzporednima premicama, ki sta ustrezno narazen, se ju med vrtenjem neprestano dotika. Širina reuleauxovega trikotnika je enaka dolžini stranice enakostraničnega trikotnika, nad katerim lahko konstruiramo reuleauxov trikotnik.



Slika 14: Reuleauxov trikotnik med vzporednima premicama (vir: avtor)



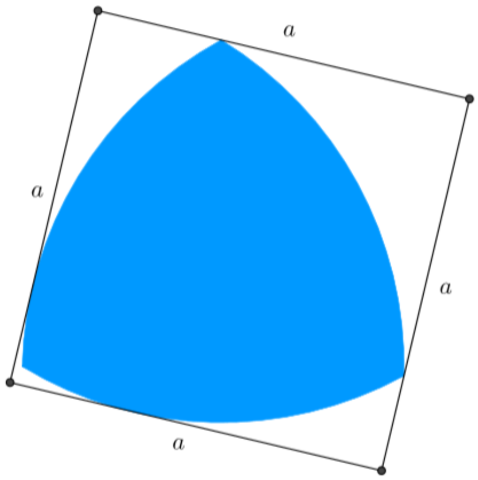
Slika 15: Krog in reuleauxov trikotnik z enako širino (vir: avtor)

Recimo, da je širina reuleauxovega trikotnika a. Krog z enako širino ima torej premer enak a, njegov polmer je torej $r = \frac{a}{2}$.

3.1.1 Reuleauxov trikotnik in njegova konstrukcija

Reuleauxov trikotnik je lik s konstantno širino, ki ga omejujejo trije skladni krožni loki nad središčnim kotom 60°. Poljudno bi ga lahko opisali kot 'enakostranični trikotnik' z zaobljenimi stranicami.

Zaradi svoje konstantne širine in možnosti 'ograditve' z vzporednima premicama lahko reuleauxov trikotnik 'ogradimo' tudi s kvadratom, katerega stranic se trikotnik neprestano dotika. Znotraj tega kvadrata lahko reuleauxov trikotnik tudi vrtimo, pri tem se trikotnik v vsakem trenutku dotika vseh štirih stranic kvadrata.



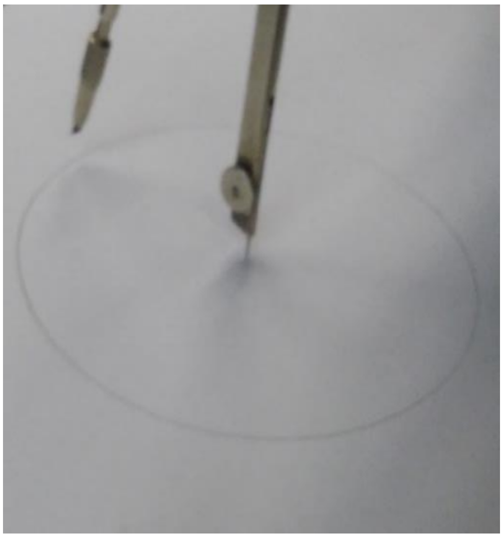
Slika 16: Reuleauxov trikotnik v kvadratu (vir: avtor)

Konstruiramo ga lahko na dva načina. Oba načina bomo predstavili v naslednjem poglavju.

3.1.1.1 Konstrukcija 1

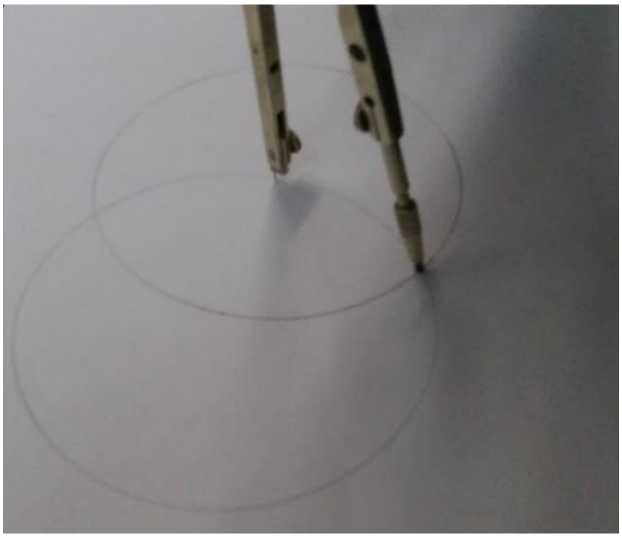
Na prvi način lahko reuleauxov trikotnik konstruiramo tako, da:

1. Narišemo krožnico (krog) s poljubnim polmerom.



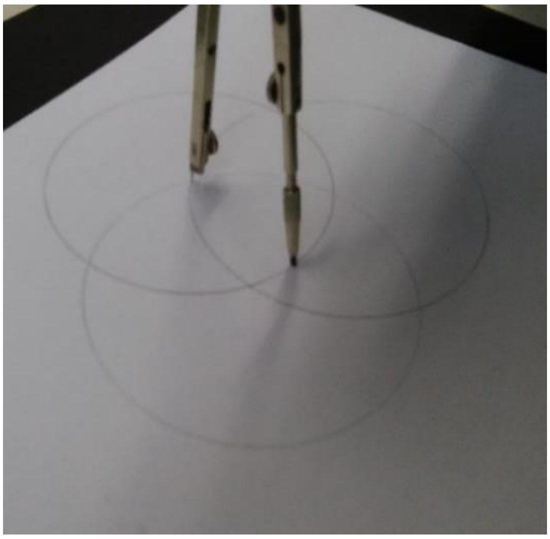
Slika 17: Krožnica s poljubnim polmerom (vir: avtor)

2. Na narisani krožnici izberemo poljubno točko, ki bo središče naše druge krožnice, ki ima enak polmer kot prva, že narisana, krožnica.



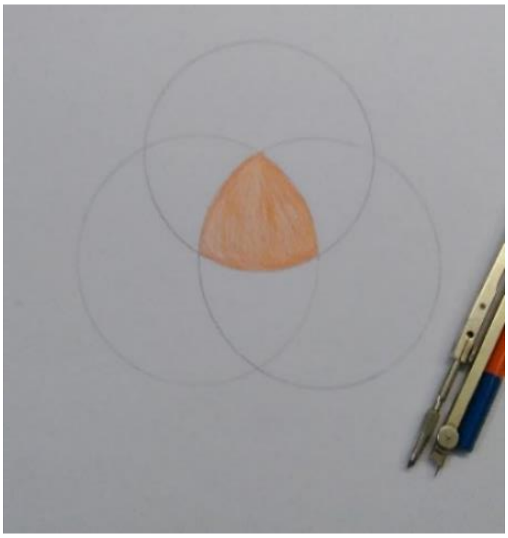
Slika 18: Krožnici z enakima polmeroma, katerih središčna razdalja je enaka dolžini polmera (vir: avtor)

3. V enem od presečišč obeh narisanih krožnic je središče še tretje krožnice z enakim polmerom.



Slika 19: Tri krožnice z enakimi polmeri, katerih središčne razdalje so enake dolžini polmera (vir: avtor)

4. Presek vseh treh krogov je reuleauxov trikotnik.

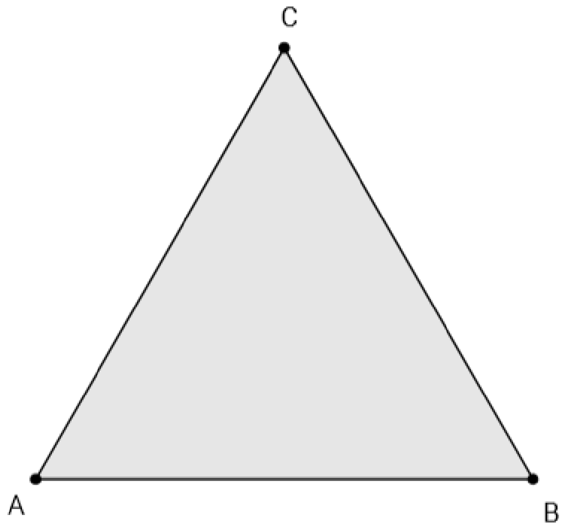


Slika 20: Reuleauxov trikotnik v preseku narisanih krogov

3.1.1.2 Konstrukcija 2

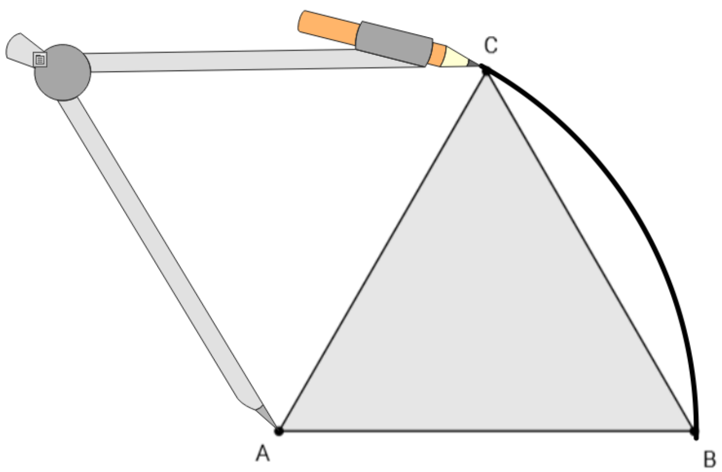
Poglejmo še, kako reuleauxov trikotnik konstruiramo 'nad' enakostraničnim trikotnikom.

1. Narišemo enakostranični trikotnik.



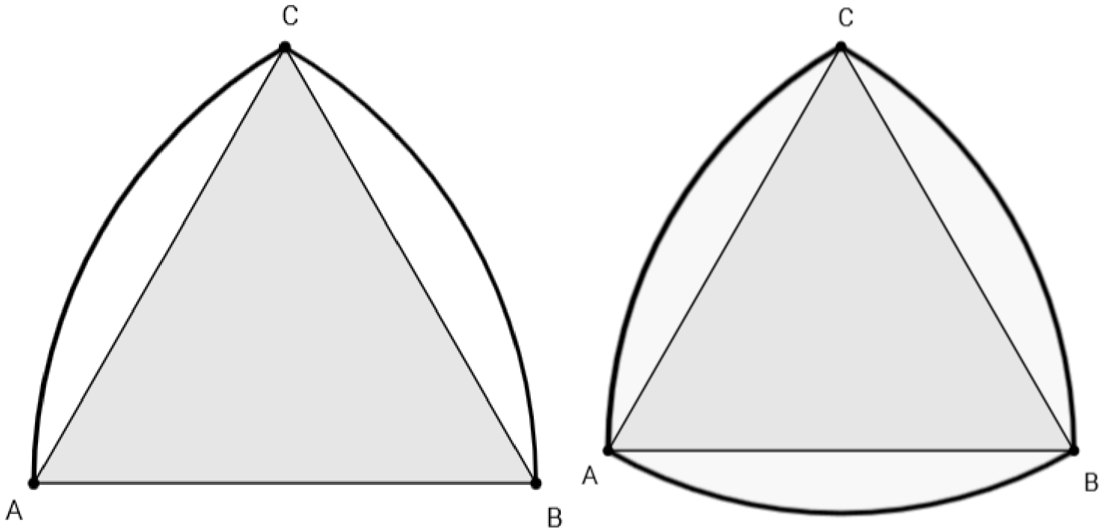
Slika 21: Enakostranični trikotnik (vir: avtor)

2. Nad stranico BC narišemo lok, ki ima središče v oglišču A in gre skozi oglišči B in C.

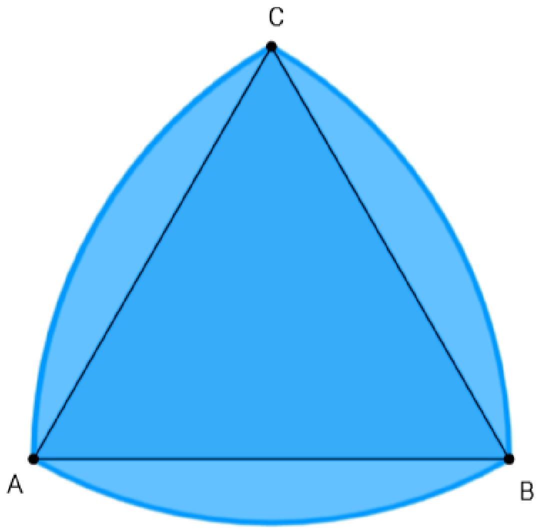


Slika 22: Lok nad stranico BC s središčem v oglišču A (vir: avtor)

3. Postopek ponovimo še nad stranicama AB in AC.



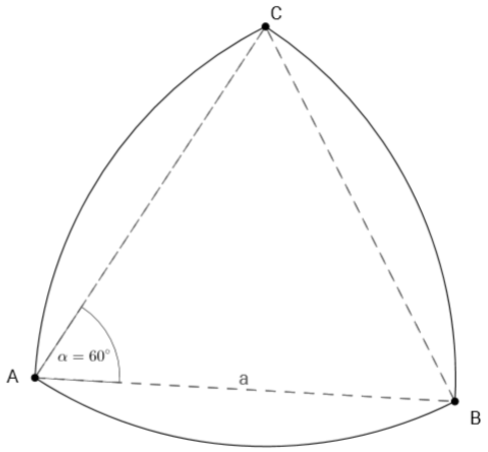
Slika 23: Lok nad stranico AC s središčem v oglišču B ter lok nad stranico AB s središčem v oglišču C (vir: avtor)



Slika 24: Reuleauxov trikotnik nad enakostraničnim trikotnikom (vir: avtor)

3.1.2 Obseg in ploščina reuleauxovega trikotnika

Obseg in ploščino reuleauxovega trikotnika izračunamo s pomočjo obsegov in ploščin pravilnega (enakostraničnega) trikotnika in kroga oziroma krožnega loka in krožnega izseka.



Slika 25: Reuleauxov trikotnik s širino a (vir: avtor)

3.1.2.1 Obseg reuleauxovega trikotnika

Reuleauxov trikotnik omejujejo trije skladni krožni loki nad stranicami enakostraničnega trikotnika s stranico a. Polmer krožnic, katerih del je posamezni krožni lok, je torej enak a. Obseg lika je enak vsoti dolžin daljic oziroma krivulj, ki ga omejujejo, zato je:

$$o = 3 \cdot l.$$

Če vstavimo obrazec za izračun dolžine krožnega loka, dobimo:

$$o = 3 \cdot \frac{2\pi a \cdot \alpha}{360°}.$$

Ker vemo, da središčni kot meri 60° ($\alpha = 60°$), lahko to vrednost vstavimo in dobimo:

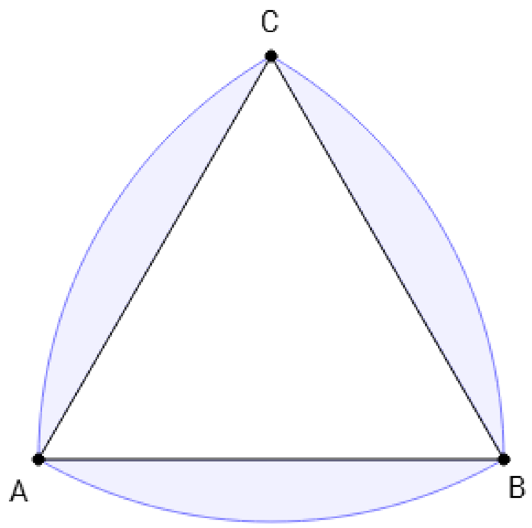
$$o = 3 \cdot \frac{2\pi a \cdot 60°}{360°}.$$

Po urejanju in krajšanju dobimo obrazec za obseg reuleauxovega trikotnika, ki je:

$$o = \pi a.$$

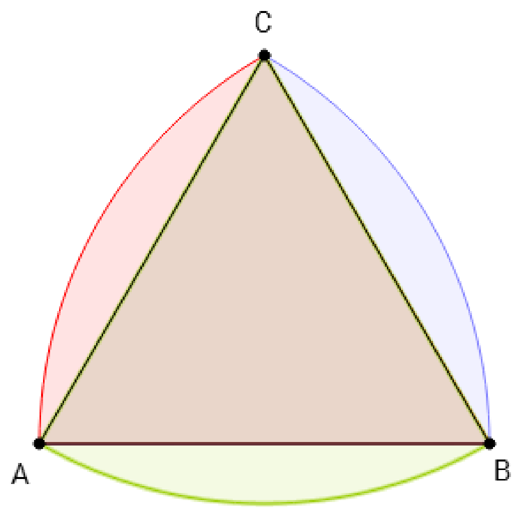
3.1.2.2 Ploščina reuleauxovega trikotnika

Ploščino reuleauxovega trikotnika lahko izračunamo na dva načina. Ena možnost je, da ploščino reuleauxovega trikotnika vidimo kot vsoto ploščin treh krožnih odsekov in ploščine enakostraničnega trikotnika.



Slika 26: Reuleauxov trikotnik – ploščina (vir: avtor)

Druga možnost, ki smo jo izbrali mi, je, da ploščino reuleauxovega trikotnika vidimo kot razliko trikratnika ploščine krožnega izseka in dvakratnika ploščine enakostraničnega trikotnika.



Slika 27: Reuleauxov trikotnik – ploščina (vir: avtor)

Ploščina reuleauxovega trikotnika je torej enaka razliki trikratnika ploščine krožnega izseka (polmer a) in dvakratnika ploščine enakostraničnega trikotnika (s stranico a):

$$p = 3 \cdot p_{izs} - 2 \cdot p_{\Delta}.$$

Vstavimo obrazec za ploščini krožnega izseka in trikotnika.

$$p = 3 \cdot \frac{\pi a^2 \alpha}{360°} - 2 \cdot \left(\frac{a v_a}{2}\right).$$

Ker je trikotnik, 'nad' katerim konstruiramo reuleauxov trikotnik, enakostraničen, je $v_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Središčni kot α meri 60°. Zato:

$$p = 3 \cdot \frac{\pi a^2 \cdot 60°}{360°} - 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right).$$

Po krajšanju in preoblikovanju zgornjega obrazca dobimo:

$$p = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Če izpostavimo skupni faktor, obrazec izgleda takole:

$$p = a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ker je $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ konstanta, lahko izračunamo njen približek:

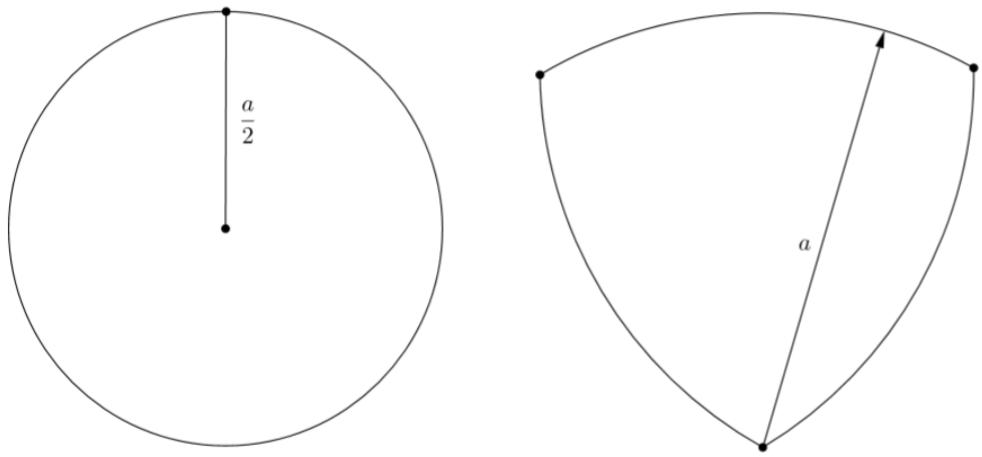
$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \doteq 0{,}704.$$

To pomeni, da je ploščina reuleauxovega trikotnika enaka približno $\frac{7}{10}$ ploščine kvadrata s stranico a.

3.1.3 Primerjava obsega in ploščine kroga ter reuleauxovega trikotnika

3.1.3.1 Primerjava obsega kroga ter reuleauxovega trikotnika

Da bi bila primerjava obsega in ploščine kroga in reuleauxovega trikotnika smiselna, morata imeti oba lika enako konstantno širino. Krog bo torej imel polmer $r = \frac{a}{2}$, reuleauxov trikotnik pa 'stranico' z dolžino a.



Slika 28: Krog in reuleauxov trikotnik z enako širino (vir: avtor)

Obseg takega reuleauxovega trikotnika smo izračunali v prejšnjem poglavju in je:

$$o = \pi a.$$

Obseg kroga z enako širino kot reuleauxov trikotnik v prejšnjem odstavku bi torej bil:

$$o = 2\pi \frac{a}{2},$$

oziroma po krajšanju:

$$o = \pi a.$$

To pomeni, da imata krog in reuleauxov trikotnik, ki imata enaki širini, enak obseg, in sicer je:

$$o = \pi a.$$

S tem smo ovrgli hipotezo 2, saj smo predvideli, da bo imel krog večji obseg. V nadaljevanju bomo primerjali še obsege reuleauxovih večkotnikov in kroga.

3.1.3.2 Primerjava ploščine kroga ter reuleauxovega trikotnika

Za izračun ploščine kroga uporabimo obrazec $p = \pi r^2$ in upoštevamo $r = \frac{a}{2}$, dobimo:

$$p = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

oziroma

$$p = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Kot v prejšnjem poglavju lahko ugotovimo, da je $\frac{\pi}{4}$ konstanta in

$$\frac{\pi}{4} \doteq 0{,}785.$$

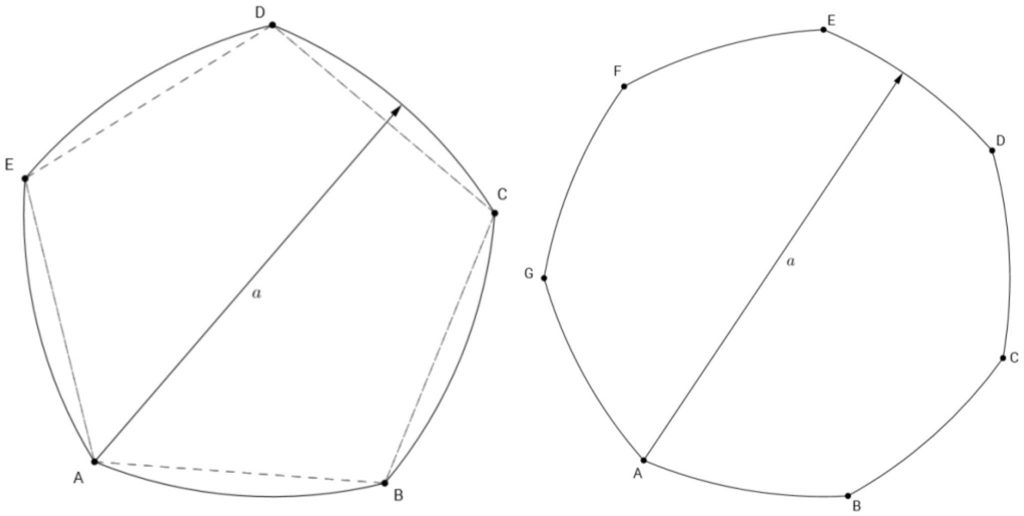
To pa pomeni, da je ploščina kroga enaka približno $\frac{8}{10}$ ploščine kvadrata s stranico a.

S tem smo delno potrdili hipotezo 3, saj je ploščina kroga res večja od ploščine reuleauxovega trikotnika, če imata oba lika enako (konstantno) širino.

Za ostale reuleauxove večkotnike izračunov žal nismo naredili, zato hipoteze 3 ne moremo z gotovostjo v celoti potrditi.

3.2 'Reuleauxovi' večkotniki

'Reuleauxovi' večkotniki so liki s konstantno širino, ki jih omejujejo skladni krožni loki. Konstruiramo jih nad pravilnimi večkotniki. 'Reuleauxove' večkotnike bi poljudno lahko opisali kot 'pravilne večkotnike' z zaobljenimi stranicami.



Slika 29: Reuleauxov petkotnik in reuleauxov sedemkotnik s širino a (vir: avtor)

Obliko reuleauxovih sedemkotnikov imajo na primer kovanci za 20 in 50 angleških penijev.

Slika 30: Kovanec za 50 angleških penijev (vir:https://24carat.co.uk/, 14. 1. 2017)

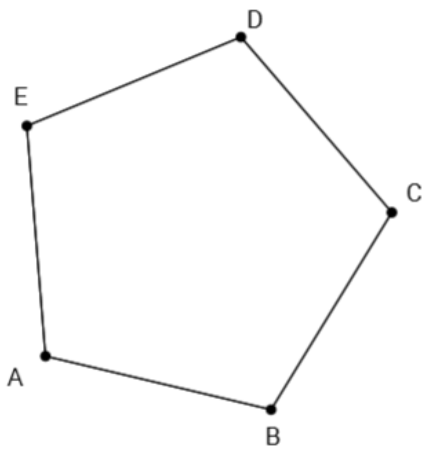
Slika 31: Kovanec za 20 angleških penijev (vir: https://s3.amazonaws.com/ngccoin-production/world-coin-price-guide/271337b.jpg, 14. 1. 2017)

Izkaže se, da lahko konstruiramo reuleauxove večkotnike nad pravilnimi večkotniki z lihim številom stranic, in sicer tako da narišemo krožne loke na stranicami. Krožnica, katere del je posamezni krožni lok, ima središče v oglišču nasproti stranice, nad katero lok rišemo (oglišče, ki je središče krožnice, leži na simetrali stranice, nad katero rišemo lok).

3.2.1.1 Konstrukcija reuleauxovega petkotnika

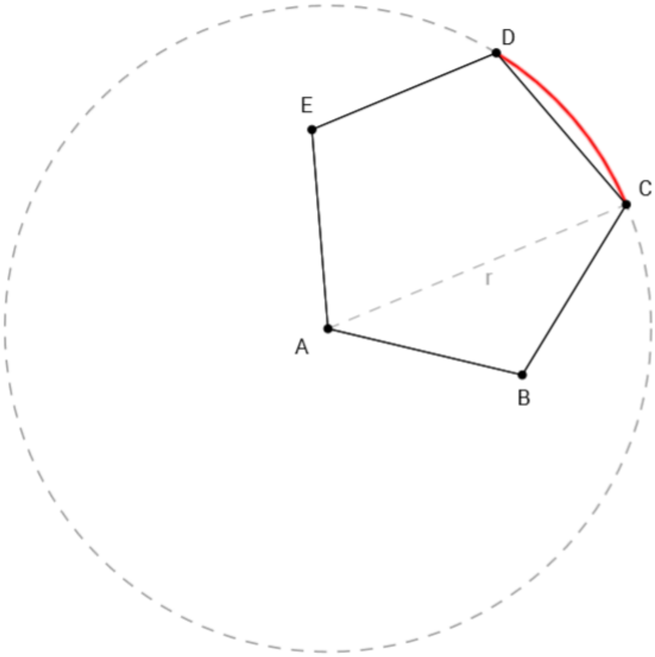
Reuleauxov petkotnik konstruiramo po naslednjih korakih:

1. Narišemo pravilni petkotnik



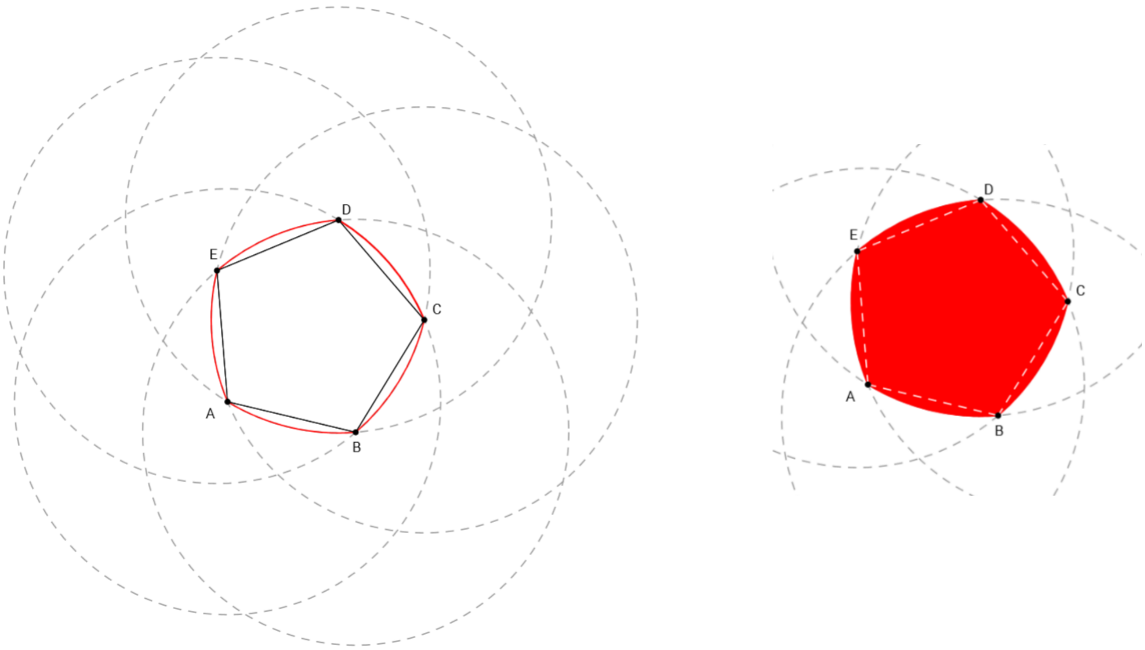
Slika 32: Pravilni petkotnik (vir: avtor)

2. Narišemo krožni lok nad stranico CD. Lok je del krožnice, ki ima središče v oglišču A in polmer AC.



Slika 33: Krožni lok nad stranico pravilnega petkotnika (vir: avtor)

3. Po enakem postopku narišemo krožne loke še nad preostalimi stranicami.



Slika 34: Reuleauxov petkotnik (vir: avtor)

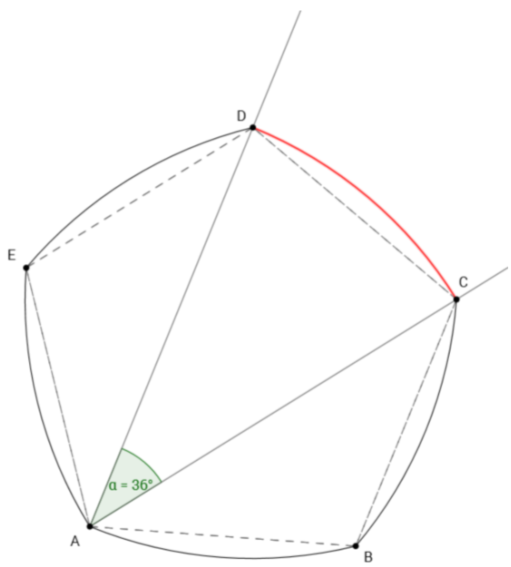
Reuleauxove večkotnike lahko konstruiramo le nad večkotniki z lihim številom stranic, saj pri večkotnikih s sodim številom stranic ne moremo določiti oglišča, ki leži nasproti dane stranice oziroma nobeno oglišče ne leži na simetrali katere od stranic.

Hipotezo 1, ki pravi, da lahko reuleauxov večkotnik dobimo iz poljubnega pravilnega večkotnika, moramo torej zavreči.

3.2.1.2 Obseg reuleauxovega večkotnika

Naredili smo več izračunov obsegov reuleauxovih večkotnikov, v nadaljevanju predstavljamo obseg reuleuxovega petkotnika in reuleauxovega devetkotnika.

3.2.1.2.1 Reuleauxov petkotnik



Slika 35: Krožni lok nad stranico reuleauxovega petkotnika (vir: avtor)

Reuleauxov petkotnik s širino a omejuje pet skladnih krožnih lokov nad stranicami pravilnega petkotnika z diagonalo $|AC| = a$. Polmer krožnic, katerih del je posamezni krožni lok, je torej enak a. Obseg lika je enak dolžini daljic oziroma krivulj, ki ga omejujejo, zato je:

$$o = 5 \cdot l.$$

Če vstavimo obrazec za izračun dolžine krožnega loka, dobimo:

$$o = 5 \cdot \frac{2\pi a \cdot \alpha}{360°}.$$

Ker središčni kot meri 36°, dobimo:

$$o = 5 \cdot \frac{2\pi a \cdot 36°}{360°}.$$

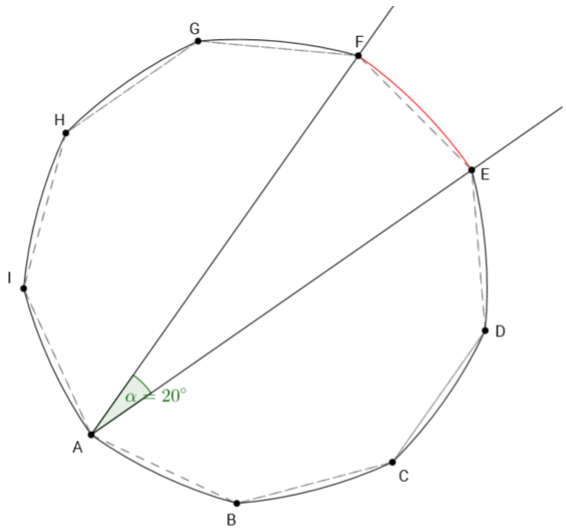
Po urejanju in krajšanju dobimo obrazec za obseg reuleauxovega petkotnika, ki je:

$$o = \pi a.$$

To v nas vzbudi sum, da imajo vsi liki z enako konstantno širino enak obseg.

Spomnimo se hipoteze 2: »*Od vseh likov z enako konstantno širino ima krog največji obseg, reuleauxov trikotnik pa najmanjši*«. To hipotezo smo že ovrgli v poglavju 3.1.3, z zgornjim izračunom pa ugotovimo celo, da ima tudi reuleauxov petkotnik enako ploščino kot krog in reuleauxov trikotnik, če imajo vsi ti liki enako širino.

3.2.1.2.2 Reuleauxov devetkotnik



Slika 36: Krožni lok nad stranico reuleauxovega devetkotnika (vir: avtor)

Reuleauxov devetkotnik, s širino a, omejuje devet skladnih krožnih lokov nad stranicami pravilnega devetkotnika z diagonalo $|AE| = a$. Polmer krožnic, katerih del je posamezni krožni lok, je torej enak a. Obseg lika je enak dolžini daljic oziroma krivulj, ki ga omejujejo, zato je:

$$o = 9 \cdot l.$$

Če vstavimo obrazec za izračun dolžine krožnega loka, dobimo:

$$o = 9 \cdot \frac{2\pi a \cdot \alpha}{360°}.$$

Izkaže se, da je $\alpha = 20°$, zato velja:

$$o = 9 \cdot \frac{2\pi a \cdot 20°}{360°}.$$

Po urejanju in krajšanju dobimo obrazec za obseg reuleauxovega devetkotnika, ki je:

$$o = \pi a.$$

Z veliko gotovostjo lahko trdimo, da imajo liki z enakimi konstantnimi širinami enak obseg, ki meri:

$$o = \pi a.$$

4 ZAKLJUČEK

Med nastajanjem te naloge smo bili zaskrbljeni, da je ne bomo pravočasno dokončali ali da z izdelkom ne bomo zadovoljni. Ko pa je izdelek zasijal v svoji končni obliki, so vse skrbi zbledele in pojavilo se je prav posebno čustvo – ponos.

Prišli smo do ugotovitve, da lahko reuleauxove večkotnike konstruiramo le nad pravilnimi večkotniki z lihim številom stranic. Z raziskovanjem obsegov reuleauxovih večkotnikov smo ovrgli svoja predvidevanja, da ima izmed likov z enakimi konstantnimi širinami največji obseg krog, najmanjšega pa reuleauxov trikotnik. Še več: ugotovili smo, da imajo vsi liki z enakimi konstantnimi širinami (krog, reuleauxovn trikotnik in reuleauxovi večkotniki) enak obseg. Tretjo hipotezo, ki pravi, da ima od vseh likov z enako konstantno širino največjo ploščino krog, najmanjšo pa reuleauxov trikotnik, smo delno potrdili. V nalogi smo uspeli dokazati, da je ploščina kroga res večja od ploščine reuleauxovega trikotnika, če imata oba enako konstantno širino. Žal nam, zaradi pomanjkanja časa, za ostale reuleauxove večkotnike ni uspelo narediti izračunov njihovih ploščin.

Za prihodnost si puščamo možnost raziskovanja ploščin reuleauxovih večkotnikov. Če bi se še bolj poglobili v svet reuleauxovih večkotnikov, bi lahko raziskali tudi telesa s konstantno širino ali pa vrtanje kvadratne luknje. Prav tako bi lahko raziskali še like s konstantnimi širinami, ki jih konstruiramo nad poljubnimi (ne le pravilnimi) večkotniki z lihim številom stranic.

Na koncu smo se poleg matematičnih vsebin naučili tudi zelo pomembnih življenjskih veščin, kot so sodelovanje, vztrajnost, žrtvovanje prostega časa in postavljanja prioritet.

5 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Družbeno odgovornost razumemo kot izboljšanje sveta, v katerem živimo. Mladi lahko k izboljšanju družbe in prihodnosti pripomoremo s širjenjem svojih obzorij in posledično prenašanjem svojega znanja na ljudi, ki nas obdajajo.

Pri tej nalogi smo pridobili veliko novega znanja, ki ga bomo lahko delili z vrstniki. Na ta način bo mogoče nastalo še kaj čudovitih in uporabnih izumov ter inovativni idej uporabe reuleauxovih večkotnikov in reuleauxovega trikotnika. Verjamemo, da smo s to nalogo pomagali bodočim raziskovalcem, ki bi se odločili za raziskovanje podobnih tem, saj bi lahko našo nalogo uporabili kot vir, s katerimi smo sami imeli kar nekaj težav.

6 VIRI

Franz Reuleaux. V: Wikipedia [online]. 2016 [15. 12. 2016]. Dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Franz_Reuleaux

Moon, C. F. *The Machines of Leonardo da Vinci and Franz Reuleaux: Kinematics of Machines from the Renaissance to the 20th Century*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2007.

Vencelj, M. *Trioglato kolo ali reuleauxov trikotnik*. Presek, 2009/2010, 1, 4 – 9.

6.1 Spletni viri

Kovanec za 50 angleških penijev (slika 30)
https://24carat.co.uk/

Kovanec za 20 angleških penijev (slika 31)
https://s3.amazonaws.com/ngccoin-production/world-coin-price-guide/271337b.jpg

Ludolfovo število (slika 11)
https://3c1703fe8d.site.internapcdn.net/newman/csz/news/800/2016/pimightlookr.jpg