»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2016«

33. SREČANJE

VOLUMEN IN PITAGOROV IZREK

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: ZALA LAHOVNIK

Mentor: ALENKA REPNIK

Šola: OŠ BORCEV ZA SEVERNO MEJO

Maribor, januar 2016

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2016«

33. SREČANJE

VOLUMEN IN PITAGOROV IZREK

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Maribor, januar 2016

KAZALO

KAZALO SLIK

POVZETEK

Pitagora je že v 6. st. pr. n. št. zapisal zvezo med dolžinami stranic v pravokotnem trikotniku. Danes to zvezo poznamo pod imenom Pitagorov izrek, ki pravi:
»Ploščina kvadrata nad hipotenuzo je enaka vsoti ploščin kvadratov nad katetama oziroma z enačbo: $h^2 = k_1^2 + k_2^2$.«

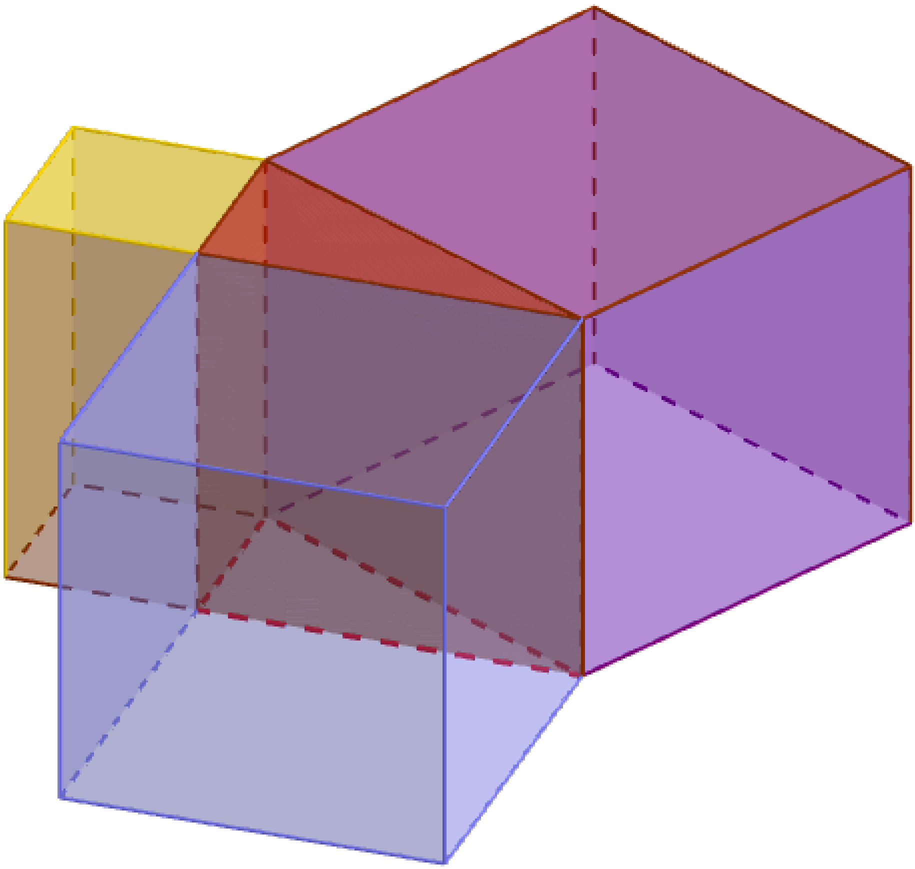
Namen te naloge je ugotoviti, ali lahko prenesemo Pitagorov izrek tudi na telesa. Po analogiji pravokotni trikotnik zamenjamo s 3-strano prizmo, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik, kvadrate nad stranicami pa s pravilnimi 4-stranimi prizmami ter ploščine nadomestimo z volumni. V nalogi uporabimo različne raziskovalne metode, predvsem raziskovanje pisnih virov, merjenje in izračune ter dokazovanje, s pomočjo katerih potrdimo oziroma ovržemo predpostavko, da za 3-strano prizmo, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik in 4-strane prizme nad njenimi stranskimi ploskvami velja: volumen 4-strane prizme nad hipotenuzo osnovne ploskve je enak vsoti volumnov 4-stranih prizem nad katetama osnovne ploskve.

1 UVOD

Pričujoča raziskovalna naloga je nastala kot posledica brskanja po svetovnem spletu, kjer sem naletela na zanimivo demonstracijo Pitagorovega izreka (https://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o). Videno me je spodbudilo k raziskovanju.

1.1 Namen naloge

Namen te naloge je ugotoviti, ali lahko prenesemo Pitagorov izrek tudi na telesa. Če po analogiji pravokotni trikotnik zamenjamo s 3-strano prizmo, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik, kvadrate nad stranicami pa s pravilnimi 4-stranimi prizmami ter ploščine nadomestimo z volumni.



Slika 1: 'Prenos' prikaza Pitagorovega izreka v 3D
(vir: avtor naloge)

1.2 Hipoteze

Hipoteza 1: Za 3-strano prizmo, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik in pravilne 4-strane prizme nad njenimi stranskimi ploskvami velja: volumen 4-strane prizme nad hipotenuzo osnovne ploskve je enak vsoti volumnov 4-stranih prizem nad katetama osnovne ploskve.

Hipoteza 2: Štiristrane prizme lahko nadomestimo s pravilnimi n-stranimi prizmami.

1.3 Metodologija dela

V nalogi uporabim različne raziskovalne metode:

- raziskovanje pisnih virov,
- izračuni in
- dokazovanje.

S pomočjo navedenih raziskovalnih metod potrdim začetne hipoteze. Za geometrijske risbe oziroma slike je bil uporabljen računalniški program za dinamično geometrijo GeoGebra.

2 TEORETIČNI DEL

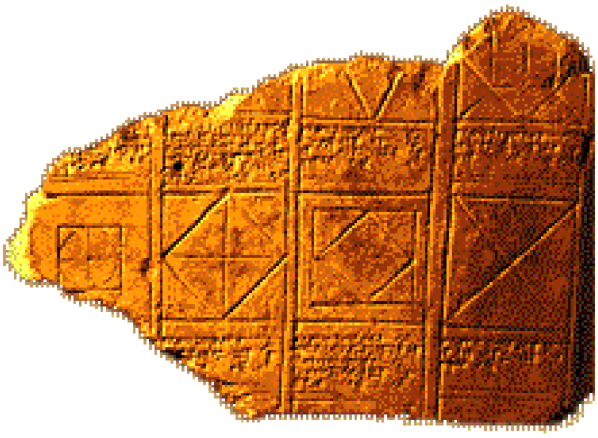
2.1 Kratek pogled v zgodovino matematike

Pitagora je eden od 'velikih' grških matematikov, z gotovostjo pa lahko trdimo, da so Pitagorov izrek poznali že mnogi matematiki pred njim.

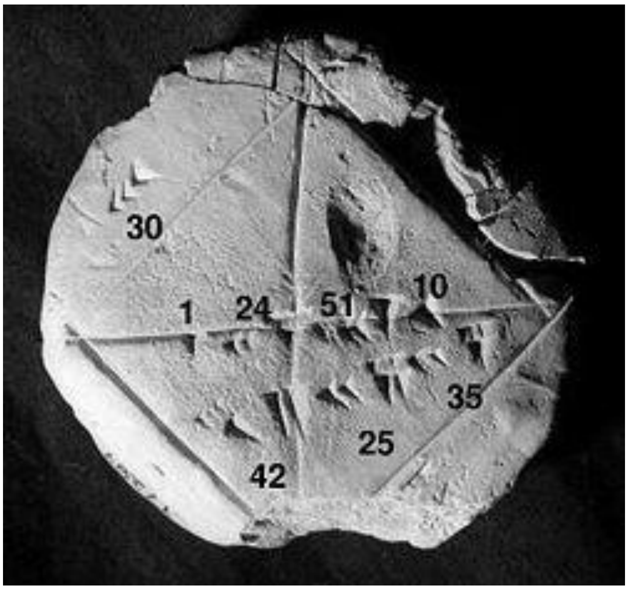
Večina zgodnjih civilizacij je nastala ob velikih rekah, kar gotovo ni naključje. Reke so omogočale namakanje in razvoj poljedelstva. Tako so se ljudje lahko naselili na enem področju in opustili življenje nomadov, lovcev in nabiralcev. Začeli so bolj načrtno gojiti rastline in živino. Poleg namakalne funkcije so reke služile tudi kot prometnice, saj so omogočale plovbo med naselbinami in tako posamezne naselbine povezale med seboj. Ljudje so se lahko začeli združevati, nastajale so večje upravne enote ali celo države. Takšne skupnosti so nato razvijale svojo kulturo.

Matematika se je sprva gotovo razvijala predvsem kot praktična znanost (trgovanje, astronomija, izdelave koledarjev, inženirstvo, evidence posesti in prebivalstva, davki, pa tudi astrologija, verovanja …). Poudarek so dajali praktičnemu računstvu (aritmetiki) in merjenju, postopoma pa so matematiko začeli preučevati zaradi nje same in pojavile so se težnje k abstraktnosti. Aritmetika se je počasi razvila v algebro, merjenje pa je (morda še počasneje) začelo prehajati v teoretično geometrijo. Med prve civilizacije, ki so razvijale aritmetično-algebraično matematiko, zagotovo sodijo civilizacije Egipta, Mezopotamije, Kitajske in Indije.

Koliko se je ohranilo od posameznih kultur, je odvisno od tega, koliko njihovih zapisov se je ohranilo. Na ohranitev zapisov je vplival material, na katerega so zapisovali svoja spoznanja. Lahko pa so se zapisi izgubili pri menjavah oblasti, v vojnah ali pa morda zaradi izoliranosti posameznih krajev. Razmeroma dobro so se ohranila egipčanska in mezopotamska (babilonska) besedila. Čeprav so bila babilonska matematična besedila zelo obsežna, medtem ko egipčanskih skorajda ni. Besedila Babiloncev so bila zapisana s klinopisom v glinene ploščice, ki so skoraj neuničljive. Egipčani pa so uporabljali papirus, ki se v suhem podnebju Egipta prav tako razmeroma dobro ohrani. Kitajci in Indijci so zapisovali na bambus ali na lubje, oboje pa se v razmeroma vlažnem podnebju slabo ohranja.



Slika 2: Glinena ploščica iz časa Babilonske matematike
(vir: http://www.akropola.org/zanimivosti/zanimivost.aspx?id=109, 14. 11. 2015)



Slika 3: Tablica YBC 7289: izračun dolžine diagonale kvadrata
(vir: *https://sl.wikipedia.org/wiki/Babilonska_matematika, 14. 11. 2015*)

Babilonska matematika je bila precej bolj razvita od egipčanske. Ko so Egipčani reševali preproste linearne enačbe, so Babilonci popolnoma obvladali tehniko reševanja kvadratnih enačb. Geometrija se je sicer pri obojih, Egipčanih in Babiloncih, razvila predvsem iz praktičnih problemov merjenja. Iz ohranjenih tekstov je razvidno, da so Babilonci poznali formule za ploščine preprostih večkotnikov in za prostornine preprostih teles. »Poznali so Pitagorov izrek, ne samo za posebne primere, ampak tudi v splošni obliki.« (Struik, 1978)

Izjemno pomembna je bila tudi kitajska matematika, predvsem zaradi svoje neprekinjene tradicije. Vemo, da so morali kandidati na izpitu iz matematike pokazati točno določeno znanje, za kar je bila potrebna predvsem sposobnost pomnjenja, saj so tekste morali znati na pamet. Znanje se je tako z veliko natančnostjo prenašalo na mlajše generacije, hkrati pa so bila prav zato nova odkritja izredno redka. Podobno stanje je bilo tudi v Indiji. Za razvoj matematike je tako bilo nujno, da se je razvila nova civilizacija, z novimi pogledi na življenje. Vse to je prinesla grška civilizacija, ki je matematiko 'dvignila' na nivo prave znanosti.

Grški matematiki so se popolnoma znanstveno lotili tudi geometrije. Prvi med njimi je bil Tales, ki je s svojih potovanj po Egiptu prinesel njihovo znanje, poznal pa je tudi babilonske matematike. Obsežno geometrijsko znanje je Evklid povzel po Demokritu, Hipokratu in Evdoksu in to znanje še dopolnil. Evklid je objavil knjigo »Elementi« v 13 zvezkih, v njej je postavil temelje osnovne ravninske geometrije. Svoj del k napredku geometrije je prispeval tudi Pitagora.

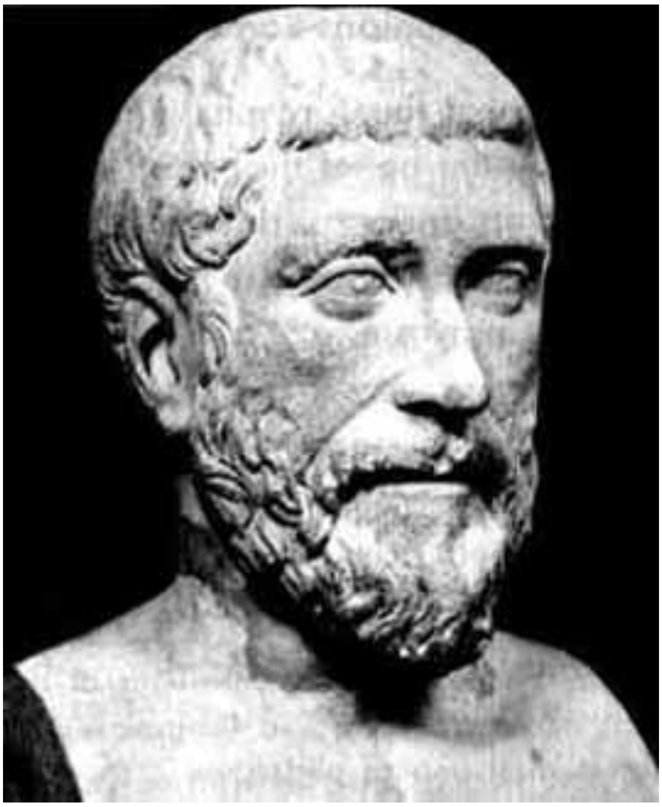
2.2 O Pitagori

Pitagora je živel okoli leta 570 pr. n. št. do leta 495 pr. n. št. Rojen je bil na Samosu. Vendar je domači Samos zapustil že v mladih letih zaradi vladavine tirana Polikrata. Zapisi pričajo, da se je preselil v kolonijo Kroton na jugu Italije, kjer je ustanovil svojo filozofsko šolo. Le-ta je imela velikanski uspeh, saj je svojim učencem ponudila nov, mistični in asketski pogled na življenje. Kasneje so šolo napadli njeni nasprotniki in umorili skoraj vse najpomembnejše člane. Pitagora se je rešil z begom v Lokre, nato v Tarant in nazadnje v Metapont, kjer je umrl.

Pitagorejci so se ukvarjali z medicino, matematiko, astronomijo, filozofijo in tudi z glasbo. V želji preprečiti nasprotnikom, da bi se dokopali do njihovih spoznanj, so si odkrite 'skrivnosti' delili le med seboj. Bili so predvsem znani po svojem načinu življenja, pustili so staro življenje in se osredotočili na asketizem.

Pitagora je imel velik vpliv na različnih področjih, kot npr. na področju astronomije, akustike, prehranjevanja in matematike. Za osnovnošolce je gotovo eno od pomembnejših znanj pri matematiki po njem imenovan Pitagorov izrek.

Čeprav je znani izrek imenovan prav po Pitagori, so ga poznali že babilonski matematiki. Ga je pa kot prvi v splošnem dokazal prav Pitagora.



Slika 4: Pitagora

(vir: http://www2.arnes.si/~mtanko/pitagora.htm, 20. 12. 2015)

2.3 Vrste trikotnikov

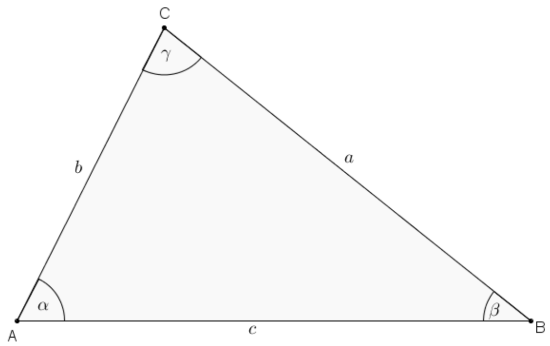
»Trikotnik je geometrijski lik, ki je določen s tremi točkami, ki ne ležijo na isti premici.«

(Berk, Draksler, Ribič, 2003, str. 132)

A Glede na dolžine stranic ločimo:

a) Raznostranični trikotnik (slika 5)

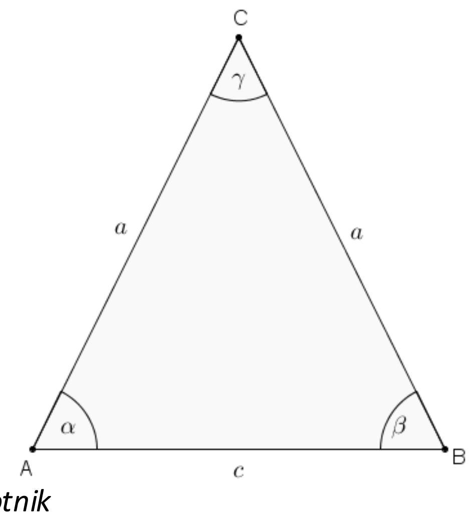
Dolžine vseh treh stranic so različne.



Slika 5 : Raznostranični trikotnik
(vir: avtor naloge)

b) Enakokraki trikotnik (slika 6)

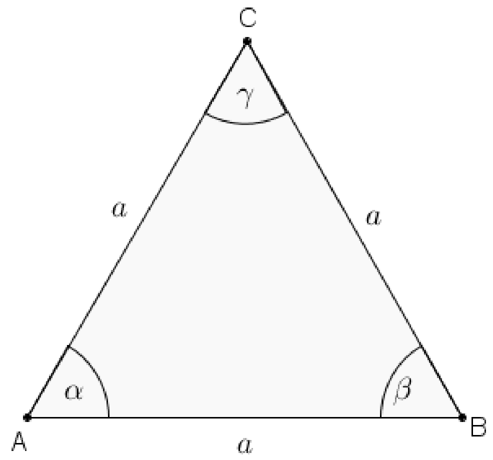
Dve stranici sta enako dolgi in ju imenujemo kraka. Tretja stranica se imenuje osnovnica. Notranja kota ob osnovnici sta skladna.



Slika 6: Enakokraki trikotnik
(vir: avtor naloge)

c) Enakostranični trikotnik (ali pravilni trikotnik) (slika 7)

Vse tri stranice so med seboj skladne. Vsi notranji koti enakostraničnega trikotnika so med seboj skladni, torej vsak notranji kot meri natanko 60°.



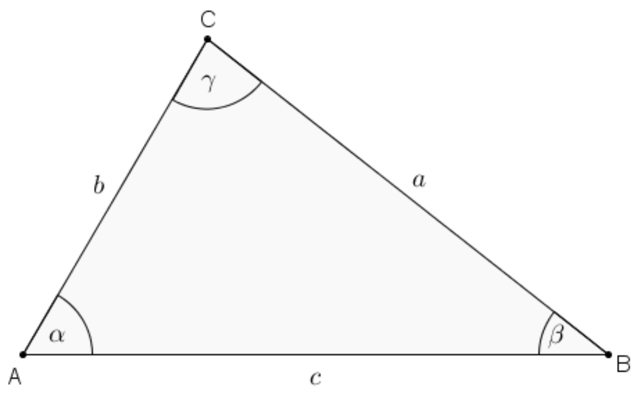
Slika 7: Enakostranični trikotnik
(vir: avtor naloge)

Vsi enakostranični trikotniki so hkrati tudi enakokraki.

B Glede na velikosti notranjih kotov ločimo:

a) Ostrokotni trikotnik (slika 8)

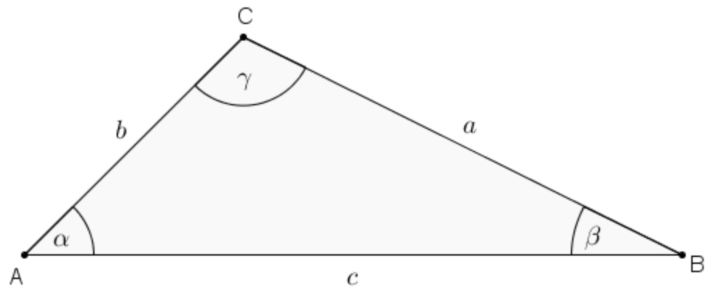
Vsi njegovi notranji koti so ostri, torej merijo več kot 0° in manj kot 90°.



Slika 8 : Ostrokotni trikotnik
(vir: avtor naloge)

b) Topokotni trikotnik (slika 9)

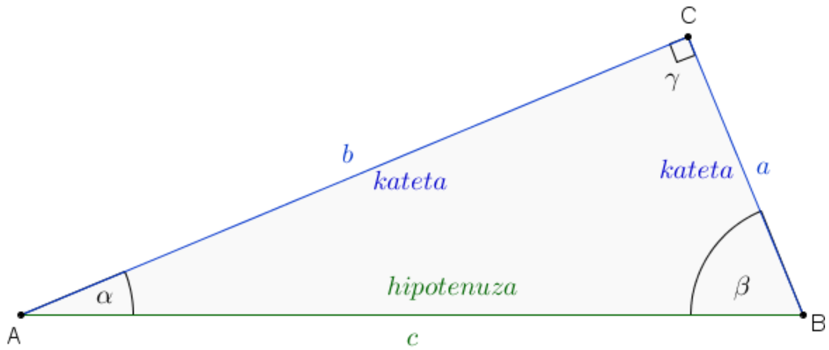
Eden od njegovih notranjih kotov je topi, meri torej več kot 90° in manj kot 180°, preostala dva notranja kota sta ostra.



Slika 9: Topokotni trikotnik
(vir: avtor naloge)

c) Pravokotni trikotnik (slika 10)

Eden od njegovih notranjih kotov je pravi, meri torej natančno 90°, preostala dva notranja kota sta ostra. Po dogovoru označimo oglišča pravokotnega trikotnika zmeraj tako, da je ob pravem kotu oglišče C, držimo pa se tudi dogovora o pozitivni orientaciji lika. Tako je najdaljša stranica, ki ji rečemo tudi hipotenuza, označena s c, kateti pa z a in b.



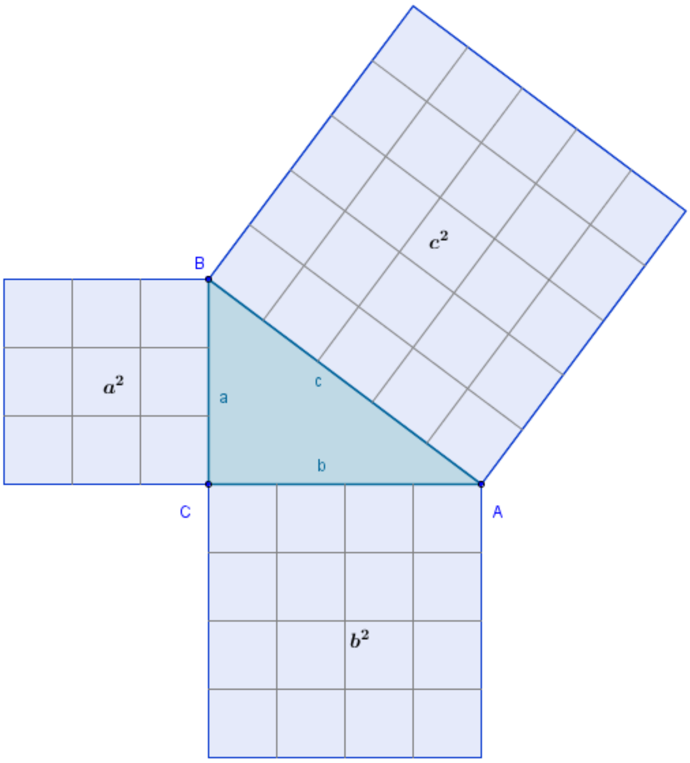
Slika 10: Pravokotni trikotnik
(vir: avtor naloge)

2.4 Pitagorov izrek in njegovi dokazi

Pitagorov izrek je eno od tistih matematičnih znanj, za katere lahko rečemo, da so temeljna. V splošnem ga je prvi dokazal prav Pitagora, govori pa o razmerju stranic v pravokotnem trikotniku. Pitagorov izrek pravi, da je v pravokotnem trikotniku vsota ploščin kvadratov nad katetama enaka ploščini kvadrata nad hipotenuzo. Torej lahko z enačbo zapišemo: $k_1^2 + k_2^2 = h^2$ oziroma $a^2 + b^2 = c^2$.

Danes menda obstaja več kot 100 dokazov Pitagorovega izreka, pravi dokazi pa so tisti, pri katerih so stranice trikotnika poljubne.

V osnovni šoli Pitagorov izrek potrdimo s pomočjo preštevanja kvadratkov. Navadno za primer vzamemo pravokotni trikotnik s stranicami dolžine 3, 4 in 5 enot. To seveda ni splošen dokaz, je le potrditev izreka za izbrani trikotnik. Seveda bi lahko podobno naredili s katerim od drugih pravokotnih trikotnikov, ki ima celoštevilske dolžine stranic.



Slika 11: Potrditev Pitagorovega izreka v OŠ
(vir: avtor naloge)

2.4.1 Dokaz s pomočjo Evklidovega izreka

Eden izmed dokazov je dokaz s pomočjo Evklidovega izreka.

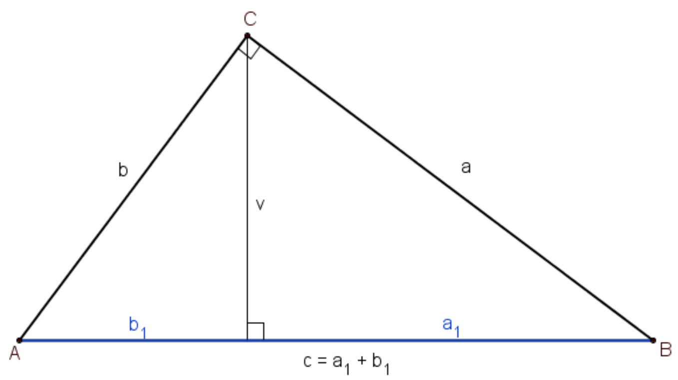
Evklidov izrek:

»Kvadrat katete je enak produktu hipotenuze in pravokotne projekcije te katete na hipotenuzo.«

$$a^2 = c \cdot a_1 \qquad\qquad b^2 = c \cdot b_1$$

(https://eucbeniki.sio.si/vega2/244/index2.html)

Višina razdeli trikotnik na dva trikotnika, ki imata enake kote kot trikotnik, ki smo ga imeli na začetku. Trikotniki so si med seboj podobni.



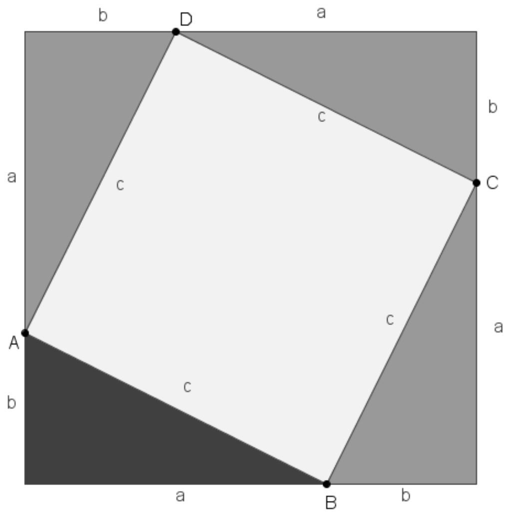
Slika 12: Pravokotne projekcije katet na hipotenuzo
(vir: avtor naloge)

Iz tega lahko izpeljemo dokaz Pitagorovega izreka:

$$a^2 + b^2 = c \cdot a_1 + c \cdot b_1$$
$$a^2 + b^2 = c \cdot (a_1 + b_1)$$
$$a^2 + b^2 = c \cdot c$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.4.2 Dokaz s štirimi enakimi pravokotnimi trikotniki

»Vsak pravokotni trikotnik lahko s tremi njegovimi kopijami sestavimo v kvadrat s stranico $(a+b)$. Lik ABCD ima skladne stranice, zato je lahko romb ali kvadrat. Kot DAB je enak $180° - \alpha - \beta = 90°$, zato je lik ABCD kvadrat.«
(http://eucbeniki.sio.si/vega2/244/index3.html)



Slika 13: Kvadrat, ki smo ga sestavili s štirimi enakimi pravokotniki trikotniki
(vir: avtor naloge)

Zdaj izračunamo ploščino kvadrata na dva načina:

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$

Od tod s krajšim računom potrdimo Pitagorov izrek:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.5 Geometrijska telesa

Geometrijska telesa spoznavamo že od prvih razredov osnovne šole naprej, vendar pa njihove lastnosti podrobneje obravnavamo šele konec osnovnošolskega izobraževanja. To je razlog, da sem se lotila proučevanja geometrijskih teles in njihovih lastnosti do te mere, da sem lahko sledila namenu svoje raziskave.

Geometrijska telesa so v matematiki strnjen del tridimenzionalnega prostora, ki je omejen s ploskvami. Prostorska geometrija je veda, ki preučuje lastnosti geometrijskih teles, najpomembnejši med njimi sta površina in prostornina.

2.5.1 Delitev geometrijskih teles

Telesa delimo na oglata in okrogla. Pomembnejša oglata telesa so:

- prizme (tudi kvader in kocka),
- piramide,
- pravilni poliedri (tetraeder, heksaeder, oktaeder..).

Med okrogla telesa sodijo:

- krogla,
- valj,
- stožec.

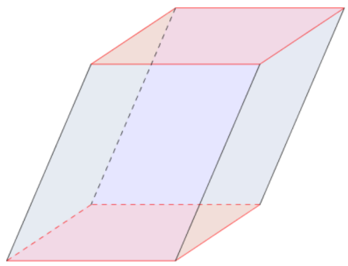
Za potrebe te naloge sem se podrobneje seznanila s prizmami.

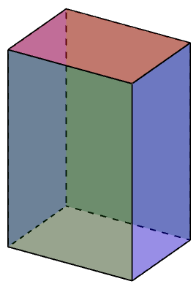
2.5.2 Prizme – opis

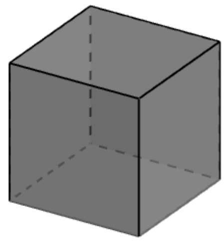
Prizma je oglato geometrijsko telo, ki ga omejujeta dve osnovni ploskvi in plašč. Osnovni ploskvi sta skladna in vzporedna n-kotnika. Plašč je sestavljen iz n-paralelogramov, ki povezujejo obe osnovni ploskvi, imenujemo jih stranske ploskve prizme.

Prizma, ki ima za osnovno ploskev n-kotnik, je n-strana. Prizma, ki ima vse stranske robove pravokotne na obe osnovni ploskvi, je pokončna. Prizma, ki ni pokončna, je poševna. Prizma, ki ima vse osnovne in stranske robove enako dolge, je enakoroba. Posebni primeri (slika 14) so paralelepiped, ki ima za osnovno ploskev paralelogram, kvader, ki ima za osnovno ploskev pravokotnik, in kocka. Tako kvader kot kocka sta le posebna primera paralelepipeda, kocka pa je hkrati poseben primer kvadra.

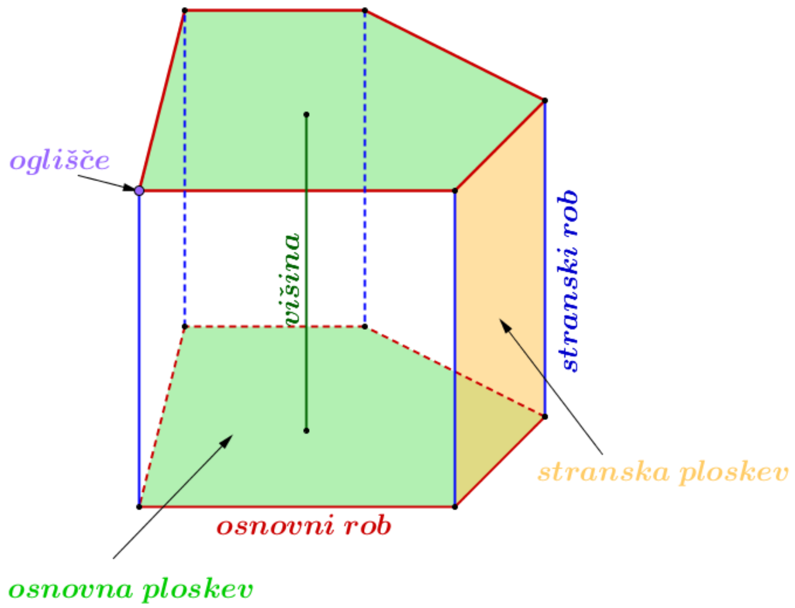
V raziskovanju sem se omejila le na pokončne prizme.


A


B


C

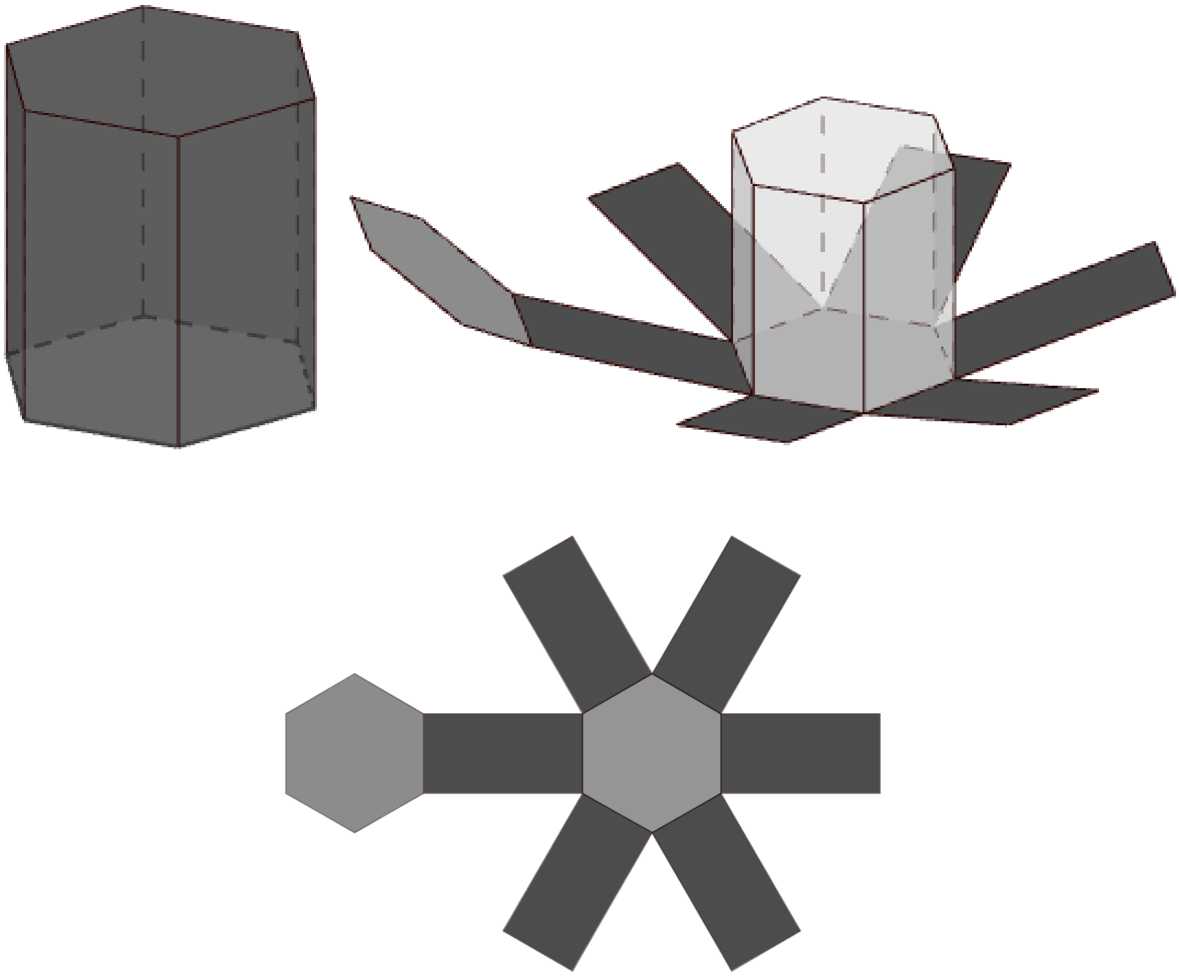
Slika 14: Posebni primeri prizem (A – paralelepiped, B – kvader, C – kocka)
(vir: avtor naloge)



Slika 15: Prizma – osnovni pojmi
(vir: avtor naloge)

2.5.3 Površina

Površina ($\boldsymbol{P}$) je merilo za velikost ploskve in se uporablja za telesa v trirazsežnem prostoru. V dvorazsežnem prostoru uporabljamo ploščino. Površina telesa je vsota ploščin vseh njegovih mejnih ploskev. Prikažemo jo lahko tako, da vse ploskve razgrnemo v isto ravnino. Tako dobljeno sliko imenujemo mreža geometrijskega telesa.



Slika 16: Pravilna šeststrana prizma in njena mreža
(vir: avtor naloge)

Površina prizme je enaka vsoti dvakratnika ploščine osnovne ploskve (O) in ploščine plašča (pl):

$$P = 2 \cdot O + pl$$

Ploščina plašča pokončne prizme je enaka produktu med obsegom osnovne ploskve (o) in višine (v).

$$pl = o \cdot v$$

2.5.4 Prostornina

Volumen ali prostornina ($\boldsymbol{V}$) je fizikalna količina, ki izraža, koliko prostora zaseda telo.
Prostornina prizme je enaka produktu ploščine osnovne ploskve (O) in višine (v).

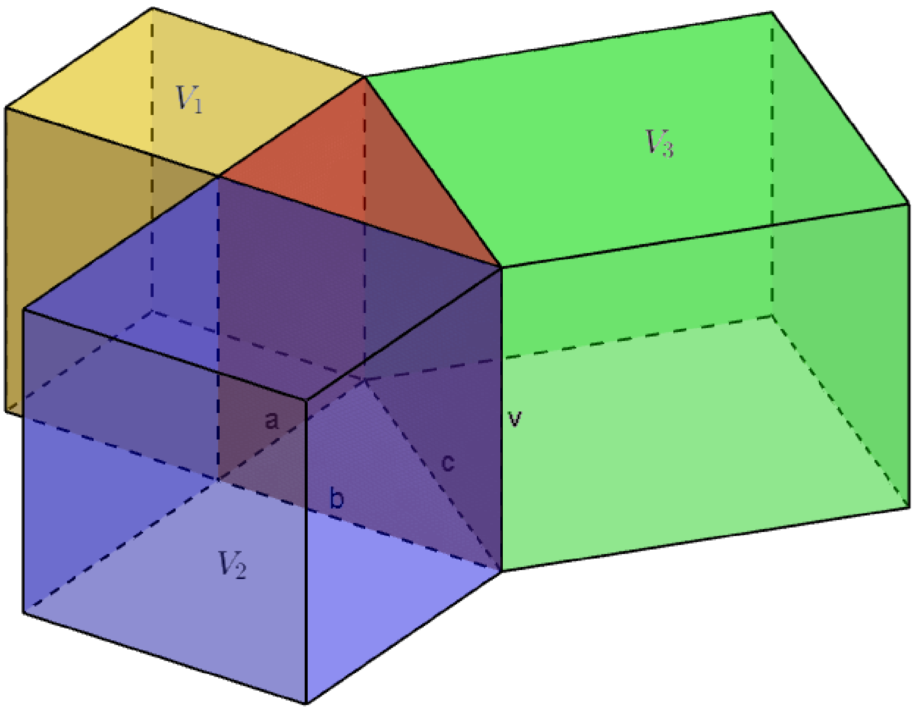
$$V = O \cdot v$$

3 REZULTATI

Pri raziskovanju sem za 'osnovno telo' vzela pokončno tristrano prizmo, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik s katetama dolgima 3 enote in 4 enote, ter hipotenuzo 5 enot.

3.1 Pravilne 4-strane prizme nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'

Po analogiji sem pravokotni trikotnik zamenjala s pokončno 3-strano prizmo, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik, kvadrate nad stranicami pa s pravilnimi 4-stranimi prizmami. Ali velja: $V_1 + V_2 = V_3$?



Slika 17: Pravilne 4-strane prizme nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'
(vir: avtor naloge)

Izračun (na konkretnem primeru):

Višina vseh narisanih teles je 4 ($v = 4$) enote. Kateti pravokotnega trikotnika, ki je osnovna ploskev pokončne tristrane prizme, merita 3 ($a = 3$) in 4 ($b = 4$) enote, njegova hipotenuza pa 5 enot ($c = 5$).

$V_1 = O \cdot v$	$V_2 = O \cdot v$	$V_3 = O \cdot v$
$V_1 = a^2 \cdot v$	$V_2 = b^2 \cdot v$	$V_3 = c^2 \cdot v$
$V_1 = 3^2 \cdot 4$	$V_2 = 4^2 \cdot 4$	$V_3 = 5^2 \cdot 4$
$V_1 = 9 \cdot 4$	$V_2 = 16 \cdot 4$	$V_3 = 25 \cdot 4$
$V_1 = 36$	$V_2 = 64$	$V_3 = 100$

Vidimo, da: $V_1 + V_2 = V_3$ (saj: $36 + 64 = 100$).

Dokaz:

$$V_1 + V_2 = a^2 \cdot v + b^2 \cdot v = v \cdot (a^2 + b^2) = v \cdot c^2 = V_3$$

Ker v splošnem prostornino teles izračunamo po formuli:

$$V = O \cdot v,$$

lahko dokaz splošneje zapišemo:

$$V_1 + V_2 = O_1 \cdot v + O_2 \cdot v = v \cdot (O_1 + O_2)$$

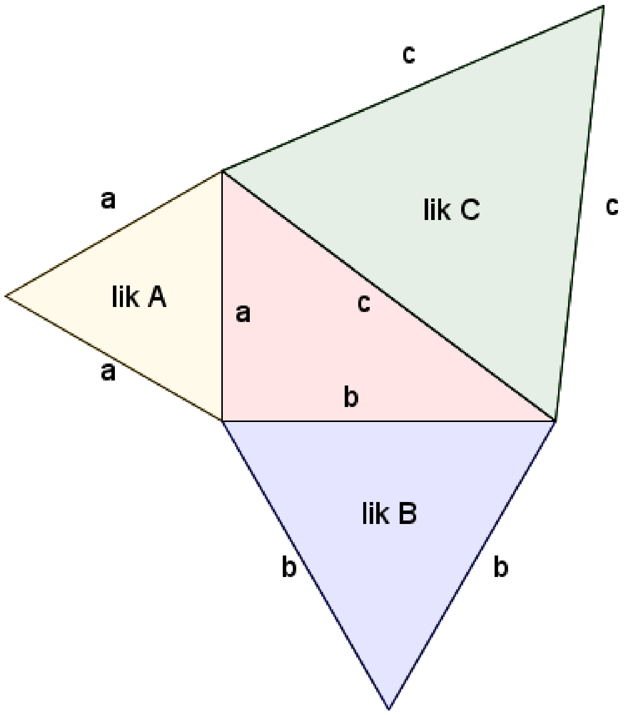
$$V_3 = O_3 \cdot v$$

Da bi torej veljalo: $V_1 + V_2 = V_3$, mora veljati: $O_1 + O_2 = O_3$.

Iz tega ugotovimo, da v kolikor lahko pokažemo, da Pitagorov izrek velja za osnovne ploskve teles, velja tudi za telesa (ki zadoščajo vnaprej zahtevanim pogojem). Če torej velja, da je vsota ploščin likov nad katetama pravokotnega trikotnika enaka ploščini lika nad hipotenuzo tega trikotnika (ki je osnovna ploskev 'osnovnega telesa'), velja tudi, da je vsota prostornin nad manjšima stranskima ploskvama enaka prostornini večje.

3.2 Pravilne 3-strane prizme nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'

Po predhodni ugotovitvi, zapisani ob koncu prejšnjega poglavja (poglavje 3.1) je potrebno pokazati, da za pravilne trikotnike nad stranicami pravokotnega trikotnika velja Pitagorov izrek. Potem velja tudi za ustrezno nadomeščena telesa, torej za pravilne 3-strane prizme nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'.



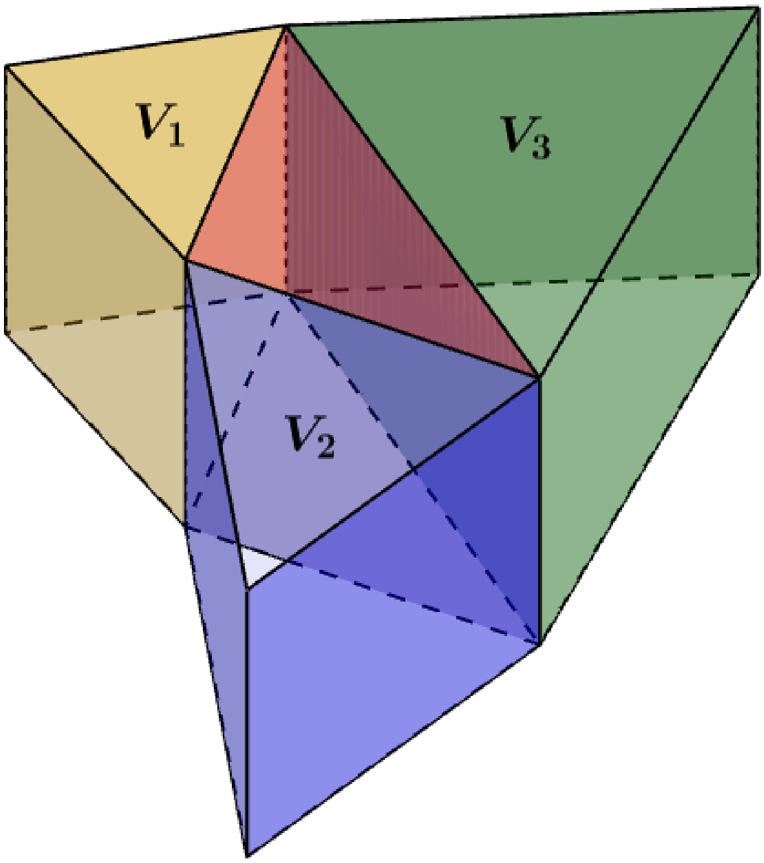
Slika 18: Pravilni trikotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika
(vir: avtor naloge)

Ploščino enakostraničnega trikotnika s stranico a izračunamo: $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ali torej za like sliki 18 torej velja: $p_A + p_B = p_C$?

$$p_A + p_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = p_C$$

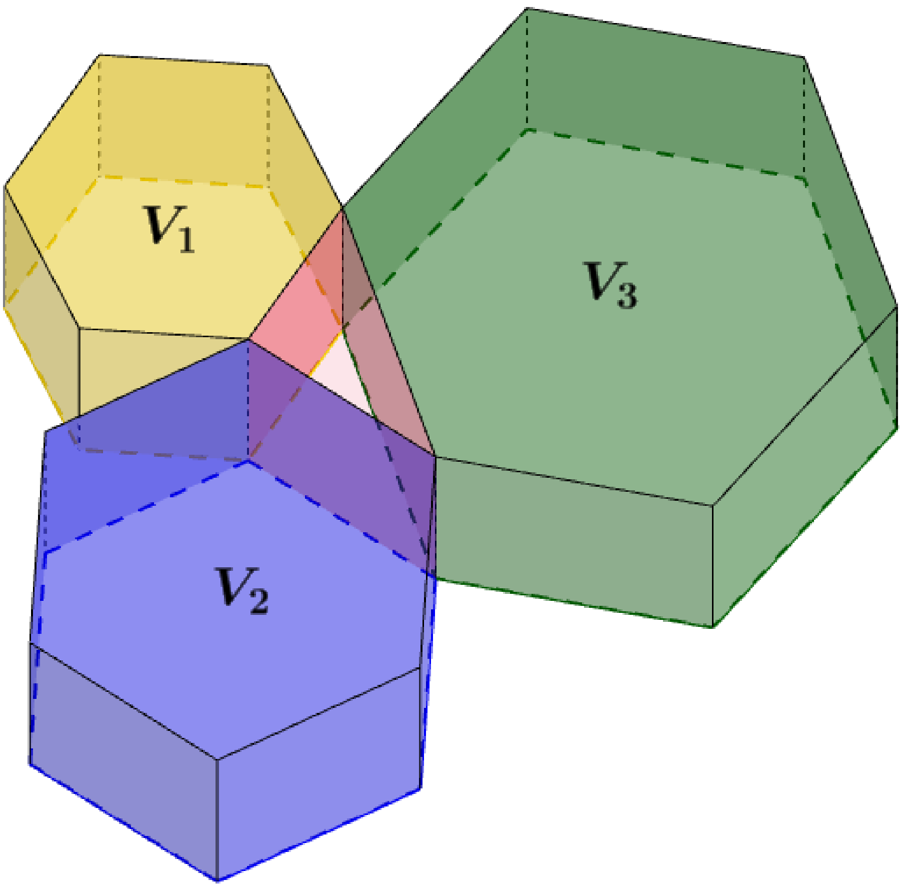
Posledično velja torej tudi, da je $V_1 + V_2 = V_3$ za pravilne 3-strane prizme na sliki 19.



Slika 19: Pravilne 3-strane prizme nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'
(vir: avtor naloge)

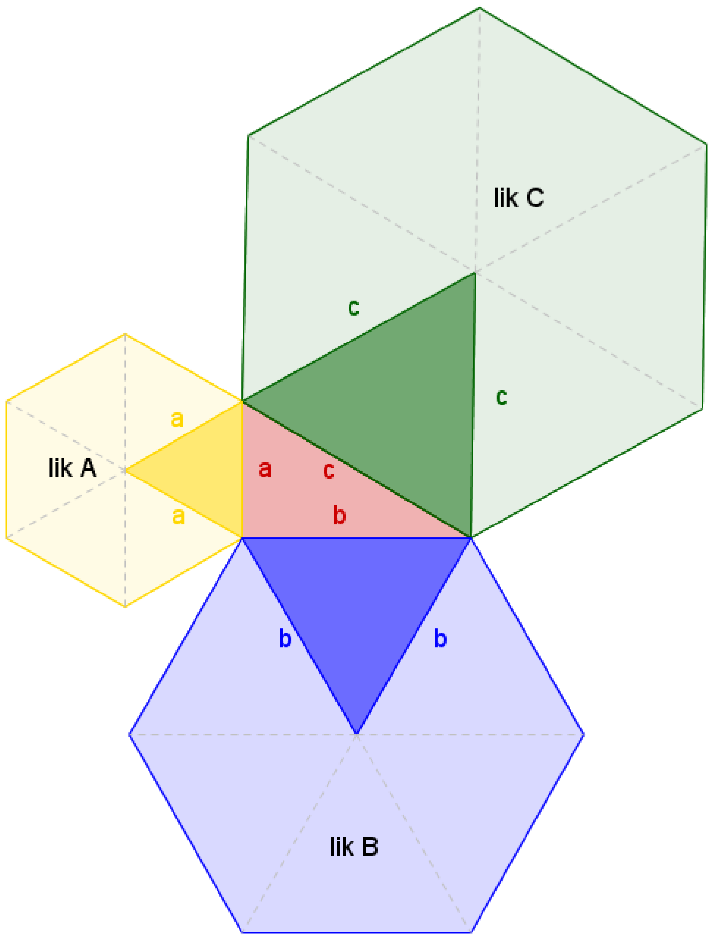
3.3 Pravilne 6-strane prizme nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'

V kolikor uspemo dokazati, da za pravilne šestkotnike nad stranicami pravokotnega trikotnika velja Pitagorov izrek, potem za po analogiji nadomeščena telesa velja, da so njihove prostornine v povezavi: $V_1 + V_2 = V_3$.



Slika 20: Pravilne 6-strane prizme nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'
(vir: avtor naloge)

Pravilni 6-kotnik s stranico a lahko 'razdelimo' na 6 skladnih pravilnih trikotnikov, prav tako s stranico a. Zato je njegova ploščina enaka: $p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Slika 21: Pravilni 6-kotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika
(vir: avtor naloge)

Ali torej za like na zgornji sliki torej velja: $p_A + p_B = p_C$?

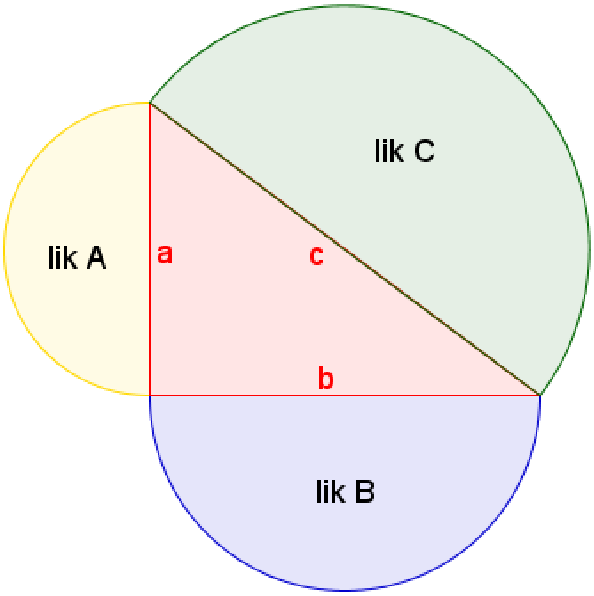
$$p_A + p_B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = p_C$$

Posledično velja torej tudi, da je $V_1 + V_2 = V_3$ za pravilne 6-strane prizme na sliki 20.

3.4 'Polvalj' nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'

Po podobnem razmisleku kot v prejšnjem poglavju: če uspemo dokazati, da za polkroge nad stranicami pravokotnega trikotnika velja Pitagorov izrek, potem za po analogiji nadomeščena telesa ('polvalje') velja, da so njihove prostornine v povezavi: $V_1 + V_2 = V_3$.

Ploščina polkroga je enaka $p = \frac{\pi r^2}{2}$.



Slika 22: Polkrogi nad stranicami pravokotnega trikotnika
(vir: avtor naloge)

Ploščine polkrogov so torej:

$$p_A = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \frac{a^2}{4}}{2} = \frac{\pi a^2}{8}$$

$$p_B = \frac{\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \frac{b^2}{4}}{2} = \frac{\pi b^2}{8}$$

$$p_C = \frac{\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \frac{c^2}{4}}{2} = \frac{\pi c^2}{8}$$

Tako je:

$$p_A + p_B = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{\pi\frac{a^2}{4}}{2} + \frac{\pi\frac{b^2}{4}}{2} =$$

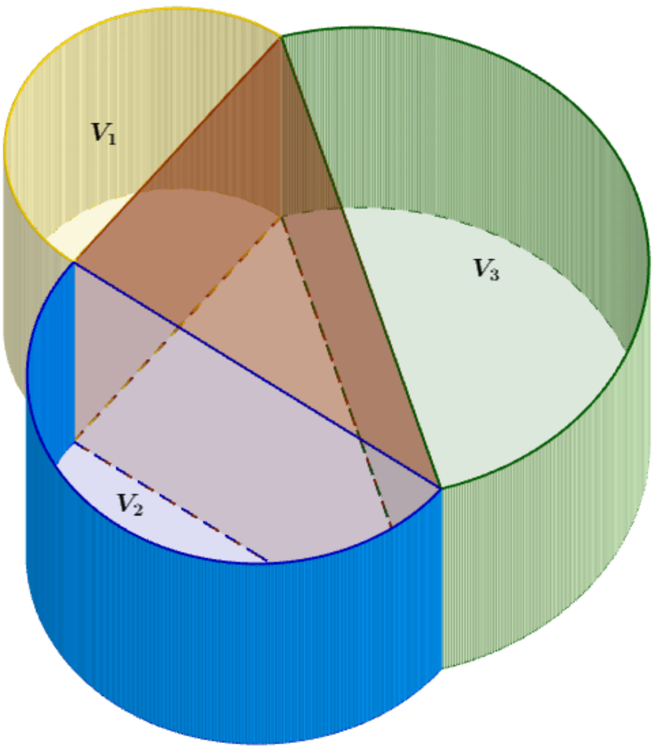
$$= \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} =$$

$$= \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) =$$

$$= \frac{\pi}{8}c^2 = p_C$$

Posledično velja tudi, da je $V_1 + V_2 = V_3$ za 'polvalje', saj je:

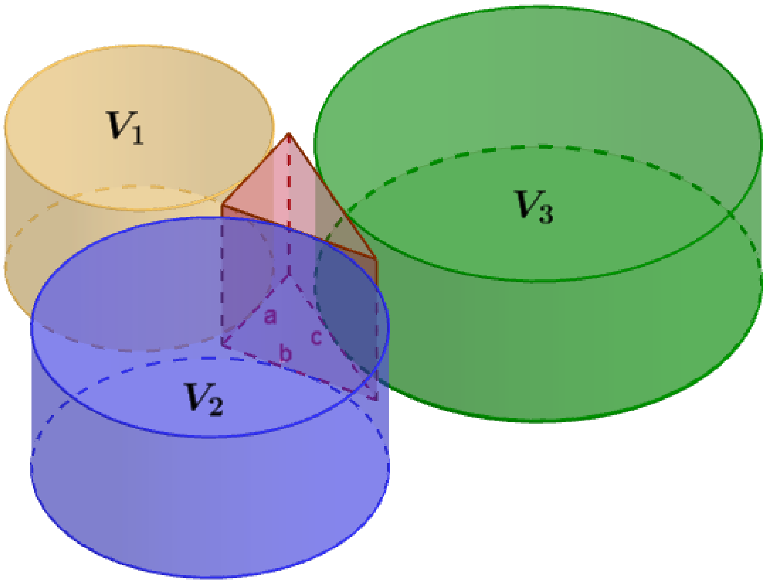
$$V_1 + V_2 = \frac{\pi a^2}{8} \cdot v + \frac{\pi b^2}{8} \cdot v = v \cdot \left(\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8}\right) = v \cdot \frac{\pi c^2}{8} = V_3$$



Slika 23: Polvalji nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'
(vir: avtor naloge)

3.5 Valj nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'

Poglejmo, ali velja tudi za valje nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa': $V_1 + V_2 = V_3$?



Slika 24: Valji nad stranskimi ploskvami 'osnovnega telesa'
(vir: avtor naloge)

Ker tudi volumen valja izračunamo po formuli $V = O \cdot v$, znova velja:

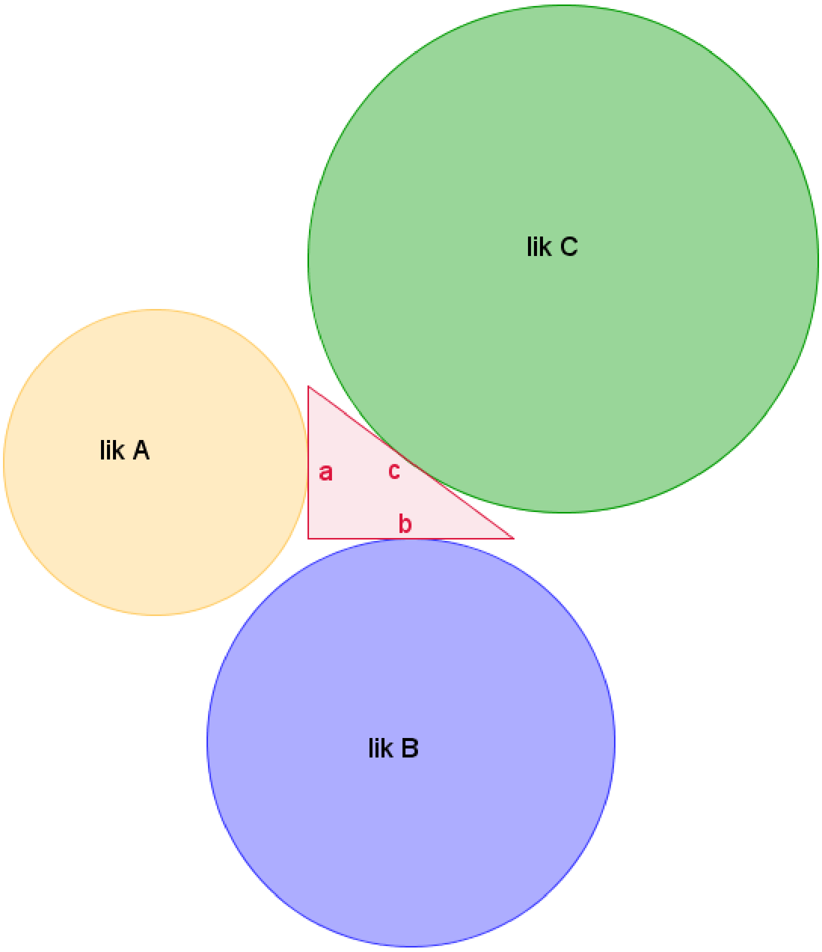
$V_1 + V_2 = O_1 \cdot v + O_2 \cdot v = v \cdot (O_1 + O_2)$

$V_3 = O_3 \cdot v$

Da bi torej veljalo: $V_1 + V_2 = V_3$, mora veljati: $O_1 + O_2 = O_3$ oziroma: $p_A + p_B = p_C$.

Ploščina kroga je $p = \pi r^2$.

$$
\begin{aligned}
p_A + p_B &= \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \\
&= \pi\frac{a^2}{4} + \pi\frac{b^2}{4} = \\
&= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} = \\
&= \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2) = \\
&= \frac{\pi}{4}c^2 = p_C
\end{aligned}
$$



Slika 25: Krogi nad stranicami pravokotnega trikotnika
(vir: avtor naloge)

Za valje na sliki 24 torej velja: $V_1 + V_2 = V_3$.

4 INTERPRETACIJA REZULTATOV

Med raziskovanjem sem ugotovila, da v kolikor dokažem, da je vsota ploščin likov nad katetama enaka ploščini lika nad hipotenuzo, bo po analogiji enako veljalo tudi za volumne prizem, ki jih dobimo, če like ohranimo za osnovne ploskve prizem, ki imajo vse enako višino. Pravokotni trikotnik sem zamenjala s pokončno 3-strano prizmo, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik. Kvadrate nad stranicami pa s pravilnimi 4-stranimi prizmami. Dokazala sem, da če velja, da je vsota ploščin likov nad katetama pravokotnega trikotnika enaka ploščini lika nad hipotenuzo tega trikotnika, velja tudi, da je vsota prostornin prizem nad manjšima stranskima ploskvama enaka prostornini prizme nad največjo stransko ploskvijo. Dokazala sem tudi, da enako velja, če 4-strane prizme nadomestimo s pravilnimi 3-stranimi in 6-stranimi prizmami. Prav tako sem dokazala, da velja enako tudi za polvalje in valje.

Vsakemu pravilnemu n-kotniku lahko očtramo krožnico. Z dokazom, da je vsota ploščin krogov nad katetama enaka vsoti ploščine kroga nad hipotenuzo, je posledično dokazano, da lahko nad stranicami pravokotnega trikotnika načrtamo poljubne n-kotnike. Po analogiji pa lahko n-kotnike nadomestimo s poljubnimi n-stranimi pokončnimi prizmami, pravokotni trikotnik pa s tristrano prizmo, katere osnovna ploskev je prej dani pravokotni trikotnik (vse te prizme imajo enake višine). Za tako dobljene prizme velja, da je vsota volumnov prizem nad manjšima stranskima ploskvama enaka volumnu prizme nad največjo stransko ploskvijo 'osnovnega telesa'. Osnovno telo je pokončna tristrana prizma, katere osnovna ploskev je pravokotni trikotnik.

Obe svoji začetni hipotezi sem tako potrdila.

5 ZAKLJUČEK

Pitagorov izrek je eno od tistih matematičnih znanj, za katere lahko rečemo, da so temeljna. Zanimanje za Pitagorov izrek in veselje do matematike sta me pripravila do raziskovanja Pitagorovega izreka z volumni. Želela sem ugotoviti, ali Pitagorov izrek lahko prenesemo na geometrijska telesa. Geometrijska telesa so v matematiki strnjen del tridimenzionalnega prostora, ki je omejen s ploskvami. Predmet moje raziskave so bile pravilne pokončne prizme, ki spadajo med oglata telesa, ki jih omejujeta dve osnovni ploskvi in plašč. Pri raziskovanju sem si pomagala z metodami, kot so raziskovanje pisnih virov, izračuni in dokazi. Uspešno sem dokazala, da v kolikor lahko pokažemo, da Pitagorov izrek velja za osnovne ploskve teles, velja tudi za telesa, ki zadoščajo vnaprej zahtevanim pogojem (so pokončne n-strane prizme, ki imajo enake višine). Dokazala sem, da lahko Pitagorov izrek prenesemo tudi na telesa in potrdila obe svoji začetni hipotezi.

6 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Živimo v času, ko je marsikdo pozabil, kaj pomenijo vrednote. Mladi živimo v dobi računalništva, v dobi socialnih omrežij in mnogi pozabljajo, kaj pomenijo vrednote, kot so prijateljstvo, medsebojno druženje in sodelovanje. Zato je zelo pomembno, da se naučimo odgovornosti do soljudi, do izobraževanja, do poštenja in da na teh vrednotah gradimo svojo prihodnost. Prepričana sem, da je radovednost in želja po znanju ena tistih stvari, ki žene ta svet in ga dela boljšega za vse nas. Dokler bomo imeli voljo in željo po napredku in raziskovanju vedno novih stvari, se za prihodnost ni potrebno bati. Seveda pa se mora vsak izmed nas zavedati, da nosi del odgovornosti. Samo če bomo stopili skupaj, je še upanje za ta svet.

7 VIRI

Berk J., Draksler J., Robič M. Skrivnosti števil in oblik 7. Ljubljana, Rokus, 2003.

Berk J., Draksler J., Robič M. Skrivnosti števil in oblik 9. 2. izdaja, 1. ponatis. Ljubljana, Rokus Klett, 2015.

Babilonska matematika. V: Wikipedia (online). Ogled: 12. 11. 2015.
Dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Babilonska_matematika

Hladnik, M. Babilonska matematika: predavanja iz zgodovine matematike. Ljubljana, FMF Univerza v Ljubljani, 2012. Ogled: 12. 11. 2015.
Dostopno na: http://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/Babilon(b).pdf

Pavlič, G. Slikovni pojmovnik: Matematika. Ljubljana, Tehniška založba Slovenije, 1998.

Pitagora: Grški filozof, matematik, modrec in duhovni učitelj (online). Ogled: 15. 11. 2016.
Dostopno na: http://lkm.fri.uni-lj.si/xaigor/slo/modrosti/ucitelji/pitagora.htm

Pitagora. V: Wikipedia (online). Ogled: 15. 11. 2015.
Dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Pitagora

Pitagorejci. V: Wikipedia (online). Ogled: 15. 11. 2015.
Dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Pitagorejci

Slovenski Veliki leksikon: 9 knjiga. Ljubljana, Mladinska knjiga, 2007.

Slovenski veliki leksikon: p – ž. Ljubljana, Mladinska knjiga Založba, 2004.

Struik, D. J. Kratka zgodovina matematike. Ljubljana, DZS, 1978.

Ivamec, D., et al. Vega 2: i-učbenik za matematiko v 2. letniku gimnazij (online). Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, 2014. Strani 135 -140. Ogled: 6. 12. 2015.
Dostopno na: https://eucbeniki.sio.si/index.html

Verdnik, A. Pravilni poliedri: diplomsko delo (online). Ljubljana, PeF Univerza v Ljubljani, 2013. Ogled: 22. 12. 2015.

Dostopno na: http://pefprints.pef.uni-lj.si/1971/1/pravilni_poliedri_andreja_verdnik.pdf

Znani matematiki in njihova dela: Pitagora (online). 2014. Ogled: 15.11.2016.

Dostopno na: http://www.matematiki.si/pitagora/

Slike:

Glinena ploščica iz časa Babilonske matematike (slika 2). Ogled: 14. 11. 2015.

Dostopno na: http://www.akropola.org/zanimivosti/zanimivost.aspx?id=109

Tablica YBC 7289: Izračun dolžine diagonale kvadrata (slika 3). Ogled: 14. 11. 2015.

Dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Babilonska_matematika

Pitagora (slika 4). Ogled: 20. 12. 2015.

Dostopno na: http://www2.arnes.si/~mtanko/pitagora.htm