»Mladi za napredek Maribora 2013«
30. srečanje

KOLIKO MATEMATIKE NAJDEMO V KOPALNICI

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Avtor: LAURA KEKEC, TILEN HUZJAK

Mentor: MATEJA FOĠNARIĻ

Ġola: II. GIMNAZIJA MARIBOR

5.2.2013

KAZALO VSEBINE

KAZALO TABEL

KAZALO SLIK

POVZETEK

Ko so v zgodovini ljudje pričeli graditi hiše in prekrivati tla ali stene s kamni, so začeli uporabljali bolj ali manj pravilne oblike kamnov, da bi naredili prijeten vzorec. Že pri Sumercih najdemo prve mozaike narejene iz pravilnih geometrijskih likov. Z matematičnega vidika pa je prvi pričel raziskovati pravilna tlakovanja Kepler na začetku 17. stoletja.

V nalogi sva se ukvarjala s pravilnimi in delno pravilnimi tlakovanji ravnine. Taka tlakovanja imenujemo tudi Arhimedska tlakovanja. Pokazala sva, da obstajajo natanko tri pravilna tlakovanja ravnine s samim skladnimi pravilnimi konveksnimi večkotniki ter da obstaja natanko osem takih delno pravilnih tlakovanj ravnine z dvema ali več pravilnimi konveksnimi večkotniki, da se v vsakem oglišču stikajo enaki večkotniki v enakem zaporedju.

Obravnavala sva tudi pojem izometrije v ravnini ter se ukvarjala s simetrijami. Že Stari Grki so vpeljali pojem friz za ponavljajoče se vzorce ornamentov na zidovih templjev. Za različne linearne ornamente bi v današnjem času rekli, da predstavljajo modele različnih friznih grup.

Vzorec na neskončnem traku, ki ga ohranja diskretna grupa translacij, imenujemo frizni vzorec. Grupa simetrij takega vzorca pa je ena izmed friznih grup. Pokazala sva, da obstaja natanko sedem friznih grup in da lahko vsak linearni ornament – frizni vzorec uvrstimo v natanko eno grupo.

Na koncu sva teoretično znanje uporabila. V domačih kopalnicah in katalogih kopalniške opreme sva si pogledala, kakšne možnosti tlakovanja tal in kakšne vzorce bordur nam nudijo proizvajalci keramičnih ploščic danes. Ugotavljala sva za kakšen tip tlakovanja gre in kakšen tip frizne grupe se najpogosteje pojavlja pri bordurah.

ZAHVALA

Zahvaljujeva se prijaznim in strpnim prodajalcem trgovin, ki so nama dovolili fotografiranje bordur in ploščic, mentorici, ki nama je pomagala pri iskanju virov in načinu dela, staršem, ki so nama omogočili prevoz do želenih tehničnih trgovin in šoli, ki nama je omogočala tiskanje raziskovalne naloge.

1 UVOD

Ustvarjanje geometrijskih oblik, ki se ujemajo in pokrivajo ravnino brez vrzeli ali prekrivanje, ima dolgo zgodovino. Simetrija ponavljajočih se vzorcev je zbudila globok estetski, čustveni in celo duhovni odziv ljudi že odkar beležimo zgodovino. Takoj, ko je človek začel graditi, je začel uporabljati kamne, da pokrije tla in stene ter izbirati oblike ter barve kamnov, ki so mu najbolj ugajali.

Vsaka človeška združba je uporabljala tlakovce in vzorce v takšni in drugačni obliki. Sumerci okoli leta 4000 pr.n.št. v Mezopotamski vasi so gradili hiše in templje okrašene z mozaiki iz geometrijskih oblik. Perzijci so kasneje izkazali svoje znanje v okraševanju. Podobno so Mavri uporabljali večbarvne oblike na stenah in tleh svojih domov. Še danes so zelo znane muslimanske in islamske ploščice s kričečimi barvnimi vzorci. Rimljani so pri okraševanju svojih stanovanj prvič uporabili izraz »tlakovci« (tessellate), iz katerega se je razvil izraz »tlakovanje ravnine« oziroma »teselacija« (tessellation).

Cilji najine raziskovalne naloge:

1. Predstaviti frizne vzorce ter načine tlakovanja večim ljudem, saj je ta tema v Sloveniji dokaj nepoznana, čeprav se z njo velikokrat srečujemo v vsakdanjem življenju, vendar le malokrat pomislimo, da so vzorci, ki jih vidimo na bordurah ter ploščice v naši kopalnici povezane z matematiko.
2. S to raziskovalno nalogo sva želela ugotoviti, kateri načini tlakovanja ter frizni vzorci so najbolj in najmanj pogosti v vsakdanjem življenju.
3. Izpostaviti raznolikost vzorcev v našem vsakdanjiku.
4. Pokazati, da so frizni vzorci in tlakovanje ravnine prisotni v naravi.

Predpostavila sva:

1. Da bodo najpogostejši najbolj enostavni frizni vzorci (tj. prva grupa - translacija) ter tlakovanje, ki vsebuje izključno kvadrate (4, 4, 4, 4).
2. Da bodo najmanj pogosti vzorci, ki so bolj zapleteni (tj. sedma grupa) ter tlakovanje z večkotniki, ki imajo več kot 8 stranic (npr. 10-kotnik).
3. Zaradi daljšega, zahtevnejšega in dražjega tlakovanja ne bova srečala kombinacije treh ali več različnih pravilnih večkotnikov.

2 TLAKOVANJE RAVNINE

Predno sva se lahko resno lotila raziskovanja in praktičnega dela, sva potrebovala neko teoretično podlago. Na začetku samega dela so bili potrebni naslednji pojmi.

Definicija: *Pravilni večkotnik* je večkotnik, ki ima vse stranice enako dolge.

Definicija: *Konveksen večkotnik.* Večkotnik je konveksen, ko za poljubni dve točki velja, da je daljica, ki te dve točki povezuje, podmnožica večkotnika

Definicija: *Tlakovanje ravnine T* je števna družina zaprte množice, ki pokriva ravnino brez vrzeli in prekrivanja. $T = \{T_1, T_2, \ldots\}$; kjer so $T_1, T_2, \ldots$ delci tlakovanja ravnine *T*.

Tlakovanje mora biti:

a) Števno: Število delcev v tlakovanje je lahko prešteto. Delcev je lahko neskončno mnogo.

b) Zaprto: Vsak delec je omejen.

c) Brez vrzeli: Unija vseh množic $T_1, T_2, \ldots$ mora tvoriti celotno ravnino.

$\{T_1 \cup T_2 \ldots\}$ = celotna ravnina.

d) Brez prekrivanja: Notranjost množic mora biti paroma disjunkta.

{notranjost T_i ∩ notranjost $T_j\} = \emptyset$; kjer $i \neq j$ za vsak i in j.

Definicija: *Arhimedska tlakovanja* so rob – ob – rob tlakovanja s pravilnimi večkotniki, pri katerih so vsa oglišča istega tipa.

Definicija: *Rob – ob – rob tlakovanje* je tlakovanje pri katerem sta lahko katerakoli dva delca v medsebojnem odnosu le na en način od sledečih treh načinov.

1. Sta disjunkta (nimata skupnih točk).
2. Imata natanko eno skupno točko, ki je oglišče vsakega od izbranih dveh večkotnikov.
3. Delita si segment, ki je stranica vsakemu izmed izbranih dveh večkotnikov.

2.1 Tlakovanje ravnine s pravilnimi skladnimi večkotniki

2.1.1 Izrek: Obstajajo 3 možnosti tlakovanja ravnine s pravilnimi skladnimi večkotniki. To so enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik.

Dokaz: Vemo, da notranji kot v pravilnem n-kotniku znaša $(n-2) \cdot 180°$. Od tod sledi, da en notranji kot v pravilnem n-kotniku meri $\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$. Označimo z m število pravilnih večkotnikov, s katerimi tlakujemo ravnino. Ravnina je tlakovana, ko je vsota kotov, ki se stikajo v nekem oglišču enaka 360°.

$m, n \in \mathbb{N}$; $m, n \geq 3$

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} \cdot m = 360°$$

Predpostavimo, da sta m in n naravni števili, ki sta večji ali enaki 3. Pravilni dva-kotnik ali ena-kotnik namreč ne obstajata. Delimo našo enakost s 180° in dobimo:

$$\frac{n-2}{n} \cdot m = 2$$

Pomnožimo z n, da se znebimo ulomka.

$$(n-2) \cdot m = 2n$$

$$mn - 2m = 2n$$

$$mn - 2m - 2n = 0$$

Dobimo nelinearno diofantsko enačbo. Iščemo vse naravne pare rešitev (m, n). Razstavimo enačbo in jo dopolnimo do enakosti.

$$(m-2) \cdot (n-2) - 4 = 0$$

$$(m-2)(n-2) = 4$$

Ločimo tri možnosti, saj lahko 4 zapišemo kot produkt dveh števil na tri načine.

$(m-2)(n-2) = 1 \cdot 4$ $\quad m-2 = 1 \Rightarrow m = 3 \wedge n-2 = 4 \Rightarrow n = 6$ $\quad (3, 6)$

$(m-2)(n-2) = 4 \cdot 1$ $\quad m-2 = 4 \Rightarrow m = 6 \wedge n-2 = 1 \Rightarrow n = 3$ $\quad (6, 3)$

$(m-2)(n-2) = 2 \cdot 2$ $\quad m-2 = 2 \Rightarrow m = 4 \wedge n-2 = 2 \Rightarrow n = 4$ $\quad (4, 4)$

Dobimo tri pare rešitev. Ugotovimo, da obstajajo res le tri možnosti, kako tlakovati ravnino s samimi enakimi pravilnimi večkotniki. Tlakujemo jo lahko s šestimi enakostraničnimi trikotniki (6, 3), s štirimi kvadrati (4, 4), ali s tremi pravilnimi šestkotniki (3, 6).

Uvedimo oznako n^r, kjer n predstavlja število stranic oz. oglišč pravilnega večkotnika, r pa število n-kotnikov, ki tlakujejo ravnino.

Naše tri možnosti sedaj zapišemo $3^6, 4^4$ in 6^3.

Ravnino lahko pokrijemo tudi s kombiniranjem različnih pravilnih večkotnikov.

2.1.2 Izrek: Obstaja natanko 21 možnosti tlakovanja ravnine s pravilnimi večkotniki.

Dokaz: Iščemo torej vse možne kombinacije tlakovanj, ki jih tvorijo pravilni večkotniki.

Če želimo ravnino najprej tlakovati z nekim n-kotnikom in m-kotnikom, (to pomeni z dvema različnima pravilnima večkotnikoma), morata skupaj dati kot 360°, kar pa ni mogoče. Naša večkotnika morata biti konveksna, kar v našem primeru ne bi bilo mogoče, saj bi moral eden izmed njiju dati kot, ki je večji ali enak 180°. Vendar takoj, ko bi temu pogoju zadoščal, ne bi bil več konveksen.

Nadaljujmo s tlakovanjem s tremi različnimi pravilnimi večkotniki. Pravilni n-kotnik, m-kotnik in k-kotnik morajo skupaj tvoriti kot 360°. Trdimo lahko tudi, da so izbrani večkotniki drug z drugim v naslednjem razmerju: $m \leq n \leq k$. Vemo tudi, da morajo imeti vsi najmanj tri oglišča, saj pravilni dvokotnik in enokotnik ne obstajata. Zapišimo to v matematičnem jeziku.

$m, n, k \geq 3; m, n, k \in \mathbb{N}$

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} + \frac{(m-2)\cdot 180°}{m} + \frac{(k-2)\cdot 180°}{k} = 360°$$

Preoblikujemo; znebimo se ulomka (pomnožimo s kmn) in krajšajmo enakost s 180°.

$$km(n-2)\cdot 180° + kn(m-2)\cdot 180° + mn(k-2)\cdot 180° = 360°\cdot kmn$$

$$km(n-2) + kn(m-2) + mn(k-2) = 2\cdot kmn$$

Razrešimo oklepaje in seštejemo oziroma odštejemo podobne enočlenike.

$$kmn - 2km + kmn - 2kn + kmn - 2mn = 2kmn$$

$$3kmn - 2km - 2kn - 2mn = 2kmn$$

$$-2km - 2kn - 2mn = -kmn$$

Pomnožimo z -1 in celotno enakost delimo s kmn.

$$2kn + 2kn + 2mn = kmn$$

$$\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1$$

Enakost smo preoblikovali v preglednejšo obliko. Eno izmed trojic, ki rešijo dano enačbo že poznamo. Znano nam je, da lahko ravnino tlakujemo s tremi pravilnimi šestkotniki (6^3). V tem primeru so notranji koti izbranih treh večkotnikov enaki. Notranji kot vsakega znaša 120°, kar izračunamo z že znano enačbo $\frac{(m-2)\cdot 180°}{m}$. Če sedaj večamo vrednost najmanjšega večkotnika (m-kotnika), (povečujemo število kotov v njem), s tem povečujemo tudi notranji kot le-tega večkotnika. Istočasno pa se manjša vsota dveh kotov preostalih dveh večkotnikov (n in k-kotnika).

V primeru, da je naš m-kotnik šestkotnik, znaša kot, ki ga oklepata n-kotnik in k-kotnik 240°. V trenutku, ko pa je naš m-kotnik več kot šestkotnik ($m > 6$), pa kot, ki ga oklepata n-kotnik in k-kotnik znaša manj kot 240°. Predpostavili smo, da je m-kotnik najmanjši izmed izbranih večkotnikov, kar pomeni, da mora imeti tudi najmanjši notranji kot, kar pa v primeri, da je $m > 6$ ni mogoče. Preostala dva večkotnika (n-kotnik in k-kotnik) morata tedaj oklepati kot manjši od 240° in vsak izmed njiju mora imeti notranji kot večji od 120°, kar pa ni možno.

Ugotovimo torej, da je lahko najmanjši večkotnik (m-kotnik) le tri, štiri, pet ali šestkotnik.

Vstavimo v preoblikovano enakost najprej vrednost za $m = 6$.

$$\frac{2}{6} + \frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1$$

Okrajšamo dobljeni ulomek, in dobljeno enačbo poenostavimo (se znebimo ulomka).

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1$$

$$kn + 6k + 6n = 3kn$$

$$2kn - 6k - 6n = 0$$

Ko enačbo delimo z 2 dobimo diofantsko enačbo, ki jo zapišemo kot produkt razlik.

$$kn - 3k - 3n = 0$$

$$(k - 3)(n - 3) = 9$$

Ugotovimo, da je edina možna rešitev le $k = n = 6$, kar potrdi naša domnevanja.

Pri vrednosti $m = 6$ imamo torej eno samo trojico m, n, k, ki rešijo enačbo.

Ko pa je naš m-kotnik petkotnik $(m = 5)$ sledi naslednje. Pravilni petkotnik ima notranji z velikostjo $108°$, kar pomeni, da ostala večkotnika oklepata kot $360° - 108° = 252°$. Prav tako vemo, da je najmanjši možni notranji kot v n-kotniku $108°$ $(m \leq n \leq k)$, iz tega sledi, da je največji notranji kot v k-kotniku $252° - 108° = 144°$. Od tod lahko sklepamo da največji k-kotnik zadošča enačbi $\frac{(k-2)\cdot 180°}{k} = 144° \Rightarrow 180k - 360 = 144k \Rightarrow k = 10$. Če sedaj izračunamo še vse ostale notranje kote, ki jih dajo pravilni večkotniki, ki so več kot petkotniki in manj kot desetkotniki, pridemo do naslednjih ugotovitev (Tabela 1).

Št. kotov	Petkotnik	Šestkotnik	Sedemkotnik	Osemkotnik	Devetkotnik	Desetkotnik
Notranji kot	108°	120°	128,57°	135°	140°	144°

Tabela 1: Notranji koti v pravilnem pet, šest, sedem, osem, devet in desetkotniku.

Vsota dveh kotov iz tabele nam mora biti enaka 252°. Hitro opazimo, da je to možno le pri petkotniku in desetkotniku. To pomeni $n = 5$ in $k = 10$. Dobili smo drugo trojico, ki reši enačbo in s tem drug način kako tlakovati ravnino s tremi pravilnimi večkotniki.

V naslednjem primeru naj bo $m = 4$. $\left(\frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1$$

Kot v primeru, ko je $m = 6$ se znebimo ulomkov.

$$kn + 4k + 4n = 2kn$$

$$kn - 4k - 4n = 0$$

$$(n-4)(k-4) = 16$$

Poiščemo vse rešitve za dobljeno diofantsko enačbo in pri tem upoštevamo $m \leq n \leq k$.

$(n-4)(k-4) = 1 \cdot 16$	$n - 4 = 1 \Rightarrow n = 5 \wedge\ k - 4 = 16 \Rightarrow k = 20$	$(5, 20)$
$(n-4)(k-4) = 2 \cdot 8$	$n - 4 = 2 \Rightarrow n = 6 \wedge\ k - 4 = 8 \Rightarrow k = 12$	$(6, 12)$
$(n-4)(k-4) = 4 \cdot 4$	$n - 4 = 4 \Rightarrow n = 8 \wedge\ k - 4 = 4 \Rightarrow n = 8$	$(8, 8)$

Dobimo tri trojice, ki rešijo enačbo. $(4, 5, 20), (4, 6, 12)$ in $(4, 8, 8)$.

Ostanemo nam samo še možnost $m = 3$.

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1$$

Ponovno poenostavimo dobljeno enačbo.

$$2kn + 6k + 6n = 3kn$$

$$kn - 6k - 6n = 0$$

$$(n-6)(k-6) = 36$$

Poiščemo vse rešitve in upoštevamo zvezo $m \leq n \leq k$.

$(n-6)(k-6) = 1 \cdot 36$	$n - 6 = 1 \Rightarrow n = 7 \wedge\ k - 6 = 36 \Rightarrow k = 42$	$(7, 42)$
$(n-6)(k-6) = 2 \cdot 18$	$n - 6 = 2 \Rightarrow n = 8 \wedge\ k - 6 = 18 \Rightarrow k = 24$	$(8, 24)$
$(n-6)(k-6) = 3 \cdot 12$	$n - 6 = 3 \Rightarrow n = 9 \wedge\ k - 6 = 12 \Rightarrow k = 18$	$(9, 18)$
$(n-6)(k-6) = 4 \cdot 9$	$n - 6 = 4 \Rightarrow n = 10 \wedge\ k - 6 = 9 \Rightarrow k = 15$	$(10, 15)$
$(n-6)(k-6) = 6 \cdot 6$	$n - 6 = 6 \Rightarrow n = 12 \wedge\ k - 6 = 6 \Rightarrow k = 12$	$(12, 12)$

Dobimo zadnje tri trojice, ki rešijo našo enačbo, in s tem tudi zadnje trojice pravilnih večkotnikov s katerimi lahko tlakujemo ravnino. Pri tlakovanju s tremi pravilnimi večkotniki imamo torej 10 možnosti: $(6, 6, 6), (5, 5, 10), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (3, 7, 42),$ $(3, 8, 24), (3, 9, 12), (3, 10, 15), (3, 12, 12)$.

Nadaljujmo s tlakovanjem s štirimi pravilnimi večkotniki. Dodajmo že omenjenim večkotnikom (m, n in k-kotniku) še p-kotnik, za katerega lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je večji ali enak k-kotniku. Odnos naših večkotnikov je tako naslednji:

$m, n, k, p\ \geq 3;\ m, n, k, p \in \mathbb{N};\ m \leq n \leq k \leq p.$

Ponovno zapišemo notranji kot vsakega večkotnika v matematičnem jeziku

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}+\frac{(m-2)\cdot 180°}{m}+\frac{(k-2)\cdot 180°}{k}+\frac{(p-2)\cdot 180°}{p}=360°$$

Pomnožimo enakost s $kmnp$ in krajšamo s $180°$.

$$kmp(n-2)+nkp(m-2)+mnp(k-2)+mnk(p-2)=2mnkp$$

Odpravimo oklepaje in seštejemo oziroma odštejemo podobne člene.

$$-2kmp-2nkp-2mnp-2mnk=-2mnkp$$

Pomnožimo z -1 in delimo z $2mnkp$.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}+\frac{1}{p}=1$$

Po preoblikovanju dobimo podobno enakost kot pri tlakovanju s tremi večkotniki. Razmišljamo enako kot pri treh večkotnikih. Ravnina je pokrita, ko vsota kotov znaša 360°. Če večamo velikost kota v m-kotniku, torej število oglišč v le-tem oz. vrednost n, zmanjšujemo vrednost m, k in p. Poznamo eno izmed rešitev, ki rešijo dano enačbo. Kadar so naši pravilni večkotniki med seboj enaki, je njihova vrednost 4, to pomeni tlakovanje ravnine s štirimi kvadrati. Notranji kot v kvadratu meri 90°, zanima nas kaj se zgodi, če večamo vrednost notranjega kota v m-kotniku, ki je najmanjši, ali enak drugim trem večkotnikom. V trenutki, ko kot v našem m-kotniku preseže vrednost 90°, enačba ni več rešljiva. Pri pravem kotu, morajo ostali večkotniki tvoriti kot 270°, kar je mogoče samo na način, ki smo ga pravkar omenili, saj bi v nasprotnem primeru, dobili kot, ki meri več kot 360°. Pridemo do zaključka, da je pri tlakovanju ravnine s štirimi pravilnimi večkotniki, najmanjši večkotnik lahko le štirikotnik ali trikotnik. Naj bo naš najmanjši večkotnik, sedaj trikotnik, torej $m=3$.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}+\frac{1}{p}=1$$

Ulomek prenesemo na desno stran enačbe.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{k}+\frac{1}{p}=\frac{2}{3}$$

Preostali trije večkotniki sedaj morajo tvoriti kot 300°, saj je $360°-60°=300°$. Največja vrednost, ki jo lahko ima n, je tako 100°, če to vrednost preseže, naša predpostavka $m\leq n\leq k\leq p$ ne more biti pravilna. Ker pravilni večkotnik z notranjim kotom 100° ne obstaja, vzamemo večkotnik, ki je tik pod to vrednostjo - kvadrat s kotom 90°. Naslednji večkotnik (n-kotnik) je prav tako lahko le tri- ali štiri-kotnik. Naj bo n-kotnik trikotnik, $n=3$.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{k}+\frac{1}{p}=\frac{2}{3}$$

Dobimo nelinearno diofantsko enačbo. Znebimo se ulomkov in enačbo poenostavimo, tako, da vse člene zapišemo na levo stran.

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{p}-\frac{1}{3}=0$$

$$3p+3k-pk=0$$

Razstavimo in dopolnimo do enakosti.

$$(k-3)(p-3)=9$$

Poiščemo vse naravne pare, ki rešijo enačbo in upoštevamo: $m,n=3$, torej $3\leq 3\leq k\leq p$.

$(k-3)(p-3)=1\cdot 9$ $\quad k-3=1\Rightarrow k=4\wedge\ p-3=9\Rightarrow p=12$ $\quad (4{,}12)$

$(k-3)(p-3)=3\cdot 3$ $\quad k-3=3\Rightarrow k=6\wedge\ p-3=3\Rightarrow p=6$ $\quad (6,6)$

Dobimo dve novi četvorki rešitev: $(3,3,4,12)$ in $(3,3,6,6)$

Naj bo sedaj $m=3$ in $n=4$. Preostala pravilna večkotnika morata tako tvoriti kot: $360°-60°-90°=210°$. Po že znanem načinu sklepamo, da je najmanjši notranji kot v preostalih dveh večkotnih 105° (saj je 105° polovica od 210°, in če bi manjši od preostalih dveh meril več kot 105°, naša neenakost $k\leq p$ ne bi bila mogoča). S pomočjo tabele 1 je razvidno, da pravilni večkotnik s takim kotom ne obstaja, zatorej vzamemo kot 90° ki pripada pravilnemu štirikotniku. P-kotnik mora v tem primeru imeti notranji kot 120° $(210-90°=120°)$, in ta kot ima samo pravilni šestkotnik. Naslednja četverka je $(3,4,4,6)$.

Pri tlakovanju ravnine s štirimi pravilnimi večkotniki dobimo naslednje možnosti: $(3,3,6,6),(3,4,4,6),(3,3,4,12)$ in $(4,4,4,4)$.

Na vrsti je tlakovanje s petimi pravilnimi večkotniki. Dodajmo še r-kotnik, ki je z ostalimi večkotniki v naslednji relaciji: $m\leq n\leq k\leq p\leq r$; $m,n,k,p,r\geq 3$; $m,n,k,p,r\in\mathbb{N}$.

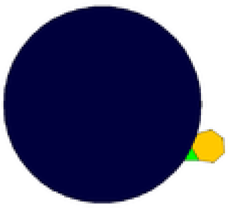
Ponovno razmišljamo o najmanjšem možnem večkotniku. To bi bil večkotnik z notranjim kotom 72°, saj je $360°:5=72°$, ko so vsi večkotniki enaki. Ker ne obstaja pravilni večkotnik s takim kotom, nam preostane samo trikotnik s kotom 60°. Preostali štirje tvorijo 300°, torej $300°:4=75°$. Pridem do istega zaključka, torej je tudi drugi večkotnik (n-kotnik) lahko samo trikotnik. Postopek nadaljujemo; $240°:3=80°$, pravilnega večkotnika s tem kotom ni, torej je tudi k-kotnik enakostranični trikotnik s kotom 60°. Prestala dva torej gradita kot z velikostjo 180°. Manjši izmed preostalih tako lahko meri 60°, potem največji meri 120°. Zadnja možnost je $90°+90°=180°$, torej dva kvadrata. Ugotovimo, da je ravnino s petimi pravilnimi večkotniki možno tlakovati na dva načina: $(3,3,3,3,6)$ in $(3,3,3,4,4)$.

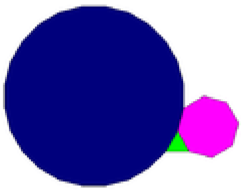
Nazadnje je na vrsti tlakovanje s šestimi pravilnimi večkotniki. Eno možnost (hkrati edino) smo poiskali že na začetku; to je možno s samimi enakostraničnimi trikotniki, saj $360°:6=60°$, kar pomeni da je najmanjši dovoljen notranji kot 60°; $(3,3,3,3,3,3)$.

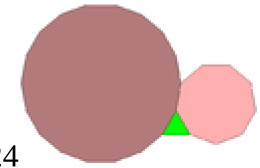
Skupaj imamo sedaj 17 možnosti:

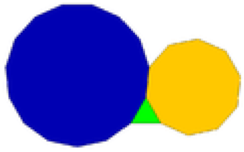
$(6,6,6), (5,5,10), (4,5,20), (4,6,12), (4,8,8), (3,7,42), (3,8,24), (3,9,12), (3,10,15),$ $(3,12,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6), (3,3,4,12), (4,4,4,4), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4),$ $(3,3,3,3,3,3)$.

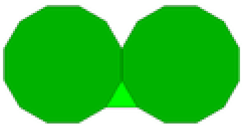
Izrek pravi, da je možnosti 21. Pod drobnogled vzameva kombinacije $(3,3,6,6)$, $(3,4,4,6)$, $(3,3,4,12)$ in $(3,3,3,4,4)$. Ugotoviva, da je možno večkotnike, ki sodelujejo pri tej kombinaciji razvrstiti na dva načina, tako dobiva še zadnje 4 možnosti in s tem dokaževa začetni izrek. Vse možnosti so slikovno prikazane na spodnjih slikah.

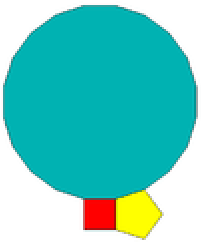

3.7.42

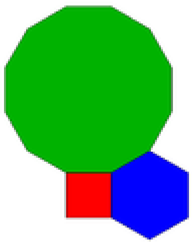

3.8.24

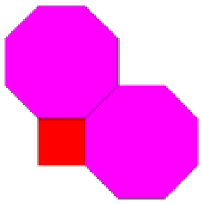

3.9.18

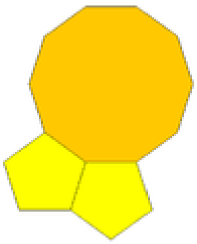

3.10.15

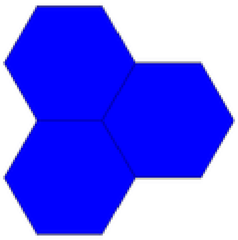

3.12.12

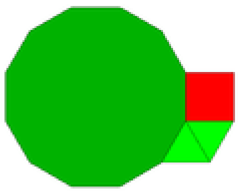

4.5.20

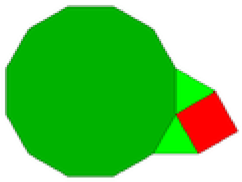

4.6.12

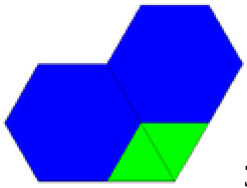

4.8.8

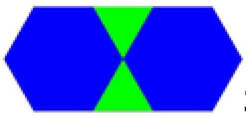

5.5.10

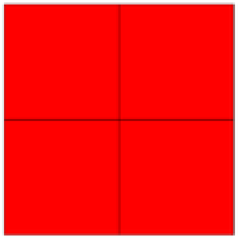

6.6.6

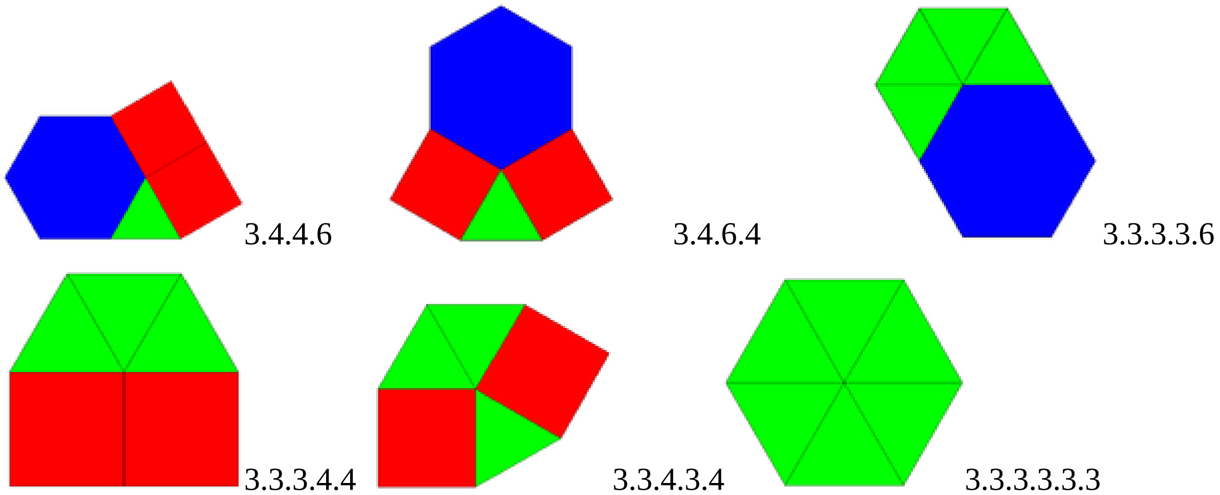

3.3.4.12


3.4.3.12


3.3.6.6


3.6.3.6


4.4.4.4



Slika 1: Vseh 21 možnosti pravilnega tlakovanja ravnine.

3 FRIZNI VZORCI IN FRIZNE GRUPE

Frizni vzorec je vzorec na neskončnem traku, ki ga ohranja diskretna grupa translacij. Vsak frizni vzorec lahko razvrstimo v eno izmed friznih grup. To grupo določa grupa simetrij tega vzorca. Da lahko sploh razumemo posamezne frizne grupe, moramo najprej razumeti izometrije.

3.1 Izometrija

Izometrija je preslikava, ki ohranja razdalje (grško: isos – enako, metron – mera). Pri friznih vzorcih uporabljamo izometrijo ravnine, zato uporabljamo evklidsko razdaljo med točkama $A(a_1, a_2)$ in $B(b_1, b_2)$:

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Izometrija ravnine je torej taka preslikava *f*, da je $d\,(f\,(A), f\,(B)) = d\,(A, B)$ za vse točke A, B.

V nadaljevanju bomo spoznali izometrije evklidove ravnine.

3.1.1 Identiteta ali identična preslikava

Identična preslikava je preslikava, ki preslika vsak element sam vase. Lahko jo označimo tudi kot funkcijo z enačbo $f(x) = x$.

3.1.2 Translacija ali pomik

[1]Translacija, oziroma pomik je preslikava določenega elementa v ujemajoči se element za dolžino vektorja translacije.

Primer: Premaknimo daljico AB za vektor *v*.

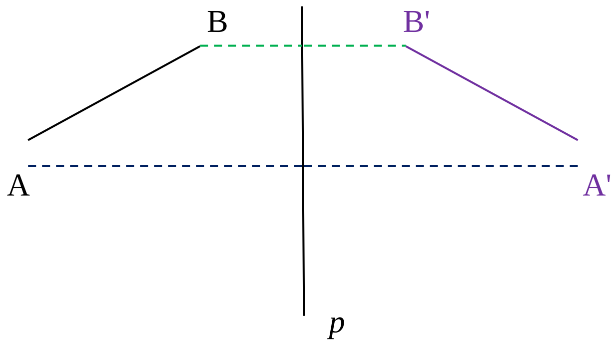
3.1.3 Zrcaljenje čez premico

[2]Zrcaljenje na premici imenujemo tudi osno zrcaljenje. Če je točka T na osi zrcaljenja, pravimo, da se točka T preslika samo vase oziroma, je negibna. Premica *p* je os zrcaljenja. Točko A' imenujemo zrcalna slika točke A glede na premico *p*.

---

[1] Centralna izometrija [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://portal.skola.ba/start/Portals/0/izometrije-translacija,osna%20i%20centralna%20simetrija.pdf [uporabljeno 27.12.2012].
[2] Zrcaljenje čez premico [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2000/dira/jelka/zrcaljenjecezpremico.html[uporabljeno 27.12.2012].

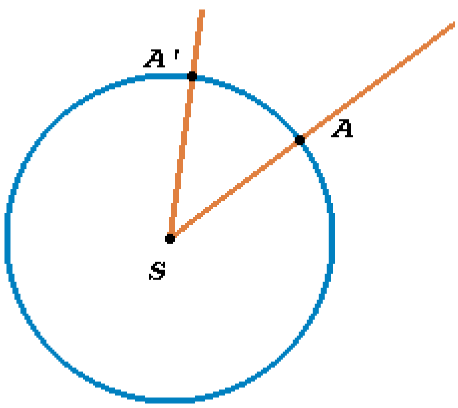
Primer: Preslikajmo daljico AB čez premico *p*.



3.1.4 Vrtež okoli točke

Vrtež okoli točke je predpis, ki element preslika za določen kot. Točka S je središče vrteža ali rotacije. Središče vrteža je pri vrtenju negibno oziroma miruje. Vrtež za kot 180° okoli točke S je enak zrcaljenju čez točko S.

Primer: Zavrtimo točko A okrog točke S za 45°.



Slika 2: Vrtež okoli točke.[3]

3.1.5 Zrcaljenje čez točko

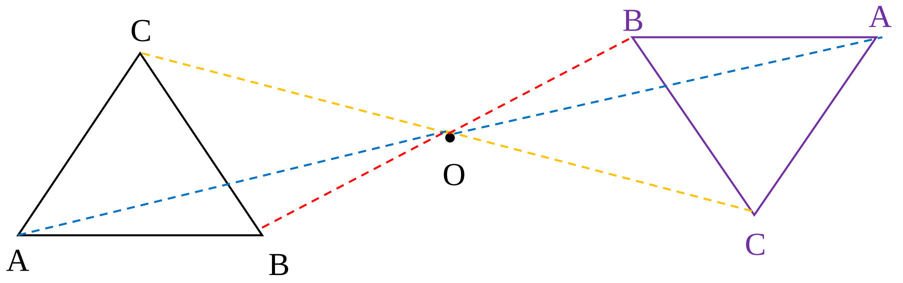
Dve točki A in A' sta središčno simetrični v odnosu na točko O, če je točka O središče daljici AA'. [4]Točko A' imenujemo zrcalna slika točke A glede na točko O. Točka O je središče zrcaljenja. Središče zrcaljenja pri zrcaljenju čez točko miruje oziroma je negibno.

---

[3] Vrtež [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2000/dira/jelka/vrtezi.html [uporabljeno 27.12.2012].

[4] Zrcaljenje čez točko [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2000/dira/jelka/zrcaljenjeceztocko.html[uporabljeno 27.12.2012].

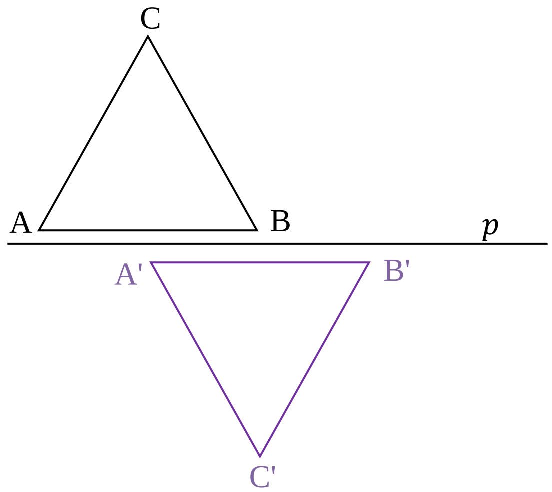
Primer: Preslikajmo trikotnik ABC čez točko O.



3.1.6 Zrcalni zdrs

[5]Zrcalni zdrs je zrcaljenje na ravnini, kateremu sledi translacija, vzporedna s to ravnino. Drsenje elementa poteka vzdolž določene osi.

Primer: Zrcalni zdrs trikotnika ABC vzdolž osi *p*.



3.2 Frizne grupe

Frizne grupe so kombinacije petih različnih izometrij:

- translacija ali pomik
- vrtež za pol kroga (za kot 180°)
- horizontalno zrcaljenje
- vertikalno zrcaljenje
- zrcalni zdrs (v vodoravni smeri)

Izrek: Poznamo 7 različnih friznih grup.[6]

[7]Za lažji prikaz sva si pomagala z metodo matematika Johna Conwaya, ki je ustvaril imena, povezana s stopinjami, ki predstavljajo posamezno frizno grupo.

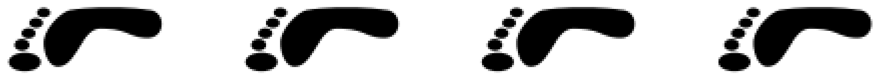
---

[5] Prostorska skupina [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://sl.wikipedia.org/wiki/Prostorska_skupina [uporabljeno 7.1.2012].

[6] Frizne grupe [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.fmf.uni-lj.si/~vavpetic/seminar/Vavpetic-FrizneGrupe.pdf [uporabljeno 28.12.2012].

3.2.1 Prva grupa

Prva grupa vsebuje translacijsko simetrijo. Ime po Conwayu: hop.

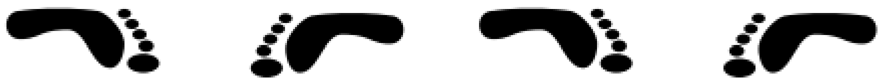


3.2.2 Druga grupa

Druga grupa vsebuje translacijo in zrcalni zdrs. Ime po Conwayu: korak.

3.2.3 Tretja grupa

Tretja grupa vsebuje translacijo in vertikalno zrcaljenje. Ime po Conwayu: hoja po strani.



3.2.4 Četrta grupa

Četrta grupa vsebuje translacijo, horizontalno zrcaljenje in zrcalni zdrs. Ime po Conwayu: skok.

3.2.5 Peta grupa

Peta grupa vsebuje translacijo in vrtež za pol kroga. Ime po Conwayu: vrteči hop.

---

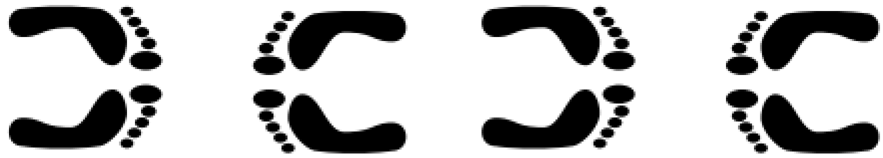
[7] Sedem friznih grup [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://mathdl.maa.org/images/upload_library/4/vol1/architecture/Math/seven.html [uporabljeno 28.12.2012].

3.2.6 Šesta grupa

Šesta grupa vsebuje translacijo, vrtež za pol kroga, zrcalni zdrs in vertikalno translacijo. Ime po Conwayu: vrteča hoja po strani.

3.2.7 Sedma grupa

Sedma grupa vsebuje translacijo, horizontalno ter vertikalno translacijo, vrtež za pol kroga in zrcalni zdrs. Ime po Conwayu: vrteči skok.



3.3 Dokaz

V tem poglavju bova dokazala, da obstaja natanko 7 friznih grup.

3.3.1 Poiščemo vse možne izometrije, ki jih lahko ima frizni vzorec.

Že iz definicije vemo, da ima frizni vzorec vedno translacijsko izometrijo. Ostale možne izometrije so še vrtež, zrcaljenje in zrcalni zdrs, saj ne spreminjajo vzorca (velikosti, oblike,…). Edina rotacija, ki preslika vzorec nazaj v samega sebe je vrtež za 180°, oziroma za pol kroga. Zaradi enakega razloga, sta edini možni zrcaljenji čez navpično os (vertikalno zrcaljenje) in čez vodoravno os (horizontalno zrcaljenje). Ker lahko vzorec premikamo samo v vodoravni smeri, zrcalni zdrs pa je translacija v horizontalni smeri, tudi ta spada pod možne izomerije. Torej imamo 5 možnih izometrij. Te so: translacija, vrtež za pol kroga, horizontalno zrcaljenje, vertikalno zrcaljenje in zrcalni zdrs.

3.3.2 Določimo možne kombinacije izometrij, ki jih lahko najdemo v friznem vzorcu.

Najprej določimo vse možnosti kombinacij. Vsaka frizna grupa mora vsebovati translacijo. Od ostalih štirih možnosti lahko izberemo eno, dve, tri, vse štiri ali nobeno. To nam da 16 možnih kombinacij.

$$1 + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$$

Za boljšo preglednost določimo vsaki izometriji simbol:

- translacija ali pomik - ***t***
- vrtež ali rotacija za pol kroga - ***r***
- horizontalno zrcaljenje - ***h***
- vertikalno zrcaljenje - ***v***
- zrcalni zdrs (v vodoravni smeri) – ***z***

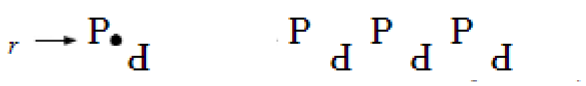
Z njimi zapišemo vse možne kombinacije izometrij: *t, r, h, v, z, hv, hr, hz, vr, vz, rz, hvr, hvz, hrz, vrz, hvrz.*

3.3.3 Preverimo ali posamezne kombinacije obstajajo.

Nekatere kombinacije niso ločene ampak lahko predstavljajo eno izmed izometrij.

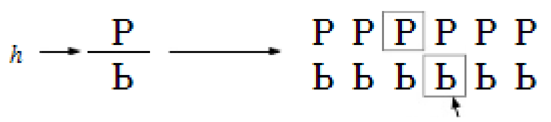
Poglejmo si najprej r, h, v in z posebej.

Rotacija za pol kroga:



ni drugih izometrij

Horizontalno zrcaljenje:



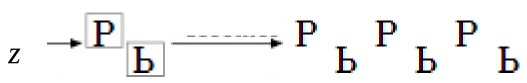
vsebuje tudi *z*

Ker *h* vedno vsebuje *z*, sam po sebi ni možen.

Iz tega ugotovimo tudi, da je kombinacija *hz* možna.

Vertikalno zrcaljenje in zrcalni zdrs posamezno:

ni drugih izometrij



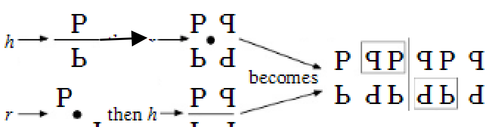
ni drugih izometrij

Torej *r, v* in *z* so možni.

V nadaljevanju preverimo vse pare možnih izomerij.

Dejstvo 1: Če vzorec vsebuje *h* in *v*, potem vsebuje tudi *r*. Torej izključimo vse možnosti, ki vsebujejo *v* in *h*, ne pa *r*.

hr:



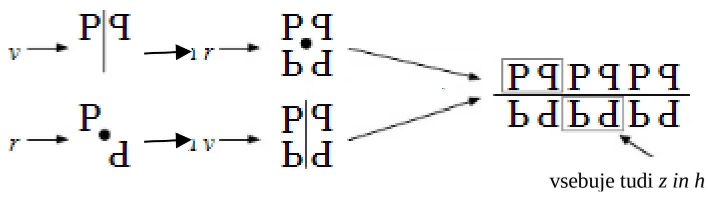
vsebuje tudi *z in v*

Dejstvo 2: Če vzorec vsebuje *h* in *r*, potem mora vsebovati *v* in *z*.

Torej so kombinacije *hr, hvr* in *hrz* neveljavne, kombinacija *hvrz* pa je možna.

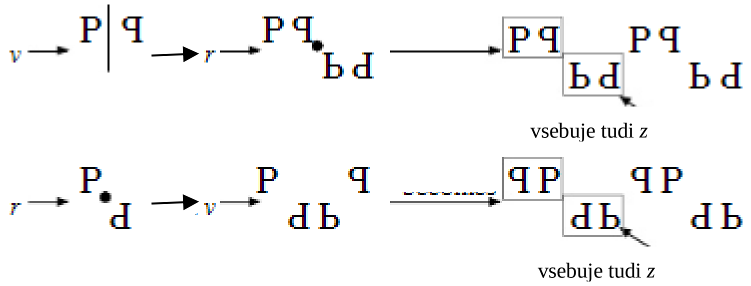
Do sedaj imamo 6 možnih kombinacij: *t, v, r, z, hz* in *hvrz*. Preveriti še moramo *vr, vz, rz* in *vrz*.

vr:



Spet v resnici dobimo kombinacijo *hvrz*, saj če vzorec vsebuje *v* in *r*, vsebuje tudi *z* in *h*.

Če je središče vrteža premaknjeno iz vertikalne osi, potem dobimo kombinacijo *vrz*:



Iz tega izvemo tudi, da so kombinacije *vr*, *rz* in *vz* neveljavne, saj vedno ko sta skupaj 2 izmed teh treh izometrij (*v*, *r* in *z*), je tretja vedno vključena.

Še enkrat povzamemo, katere kombinacije so možne in katere ne ter zakaj (pomnimo, da vse kombinacije vsebujejo *t*).

Kombinacija	**Obstoj**	**Kombinacija**	**Obstoj**
t	obstaja	*~~hrt~~*	mora imeti *v*
~~ht~~	mora imeti *g*	*~~hvrt~~*	mora imeti *v*
vt	obstaja	*~~hrzt~~*	mora imeti *v*
rt	obstaja	*~~vrt~~*	mora imeti *z*
zt	obstaja	*~~vzt~~*	mora imeti *r*
~~hvt~~	mora imeti *r*	*~~rzt~~*	mora imeti *v*
hzt	obstaja	*vrzt*	obstaja
~~hvgt~~	mora imeti *r*	*hvrzt*	obstaja

Tabela 2: Obstoj kombinacij.

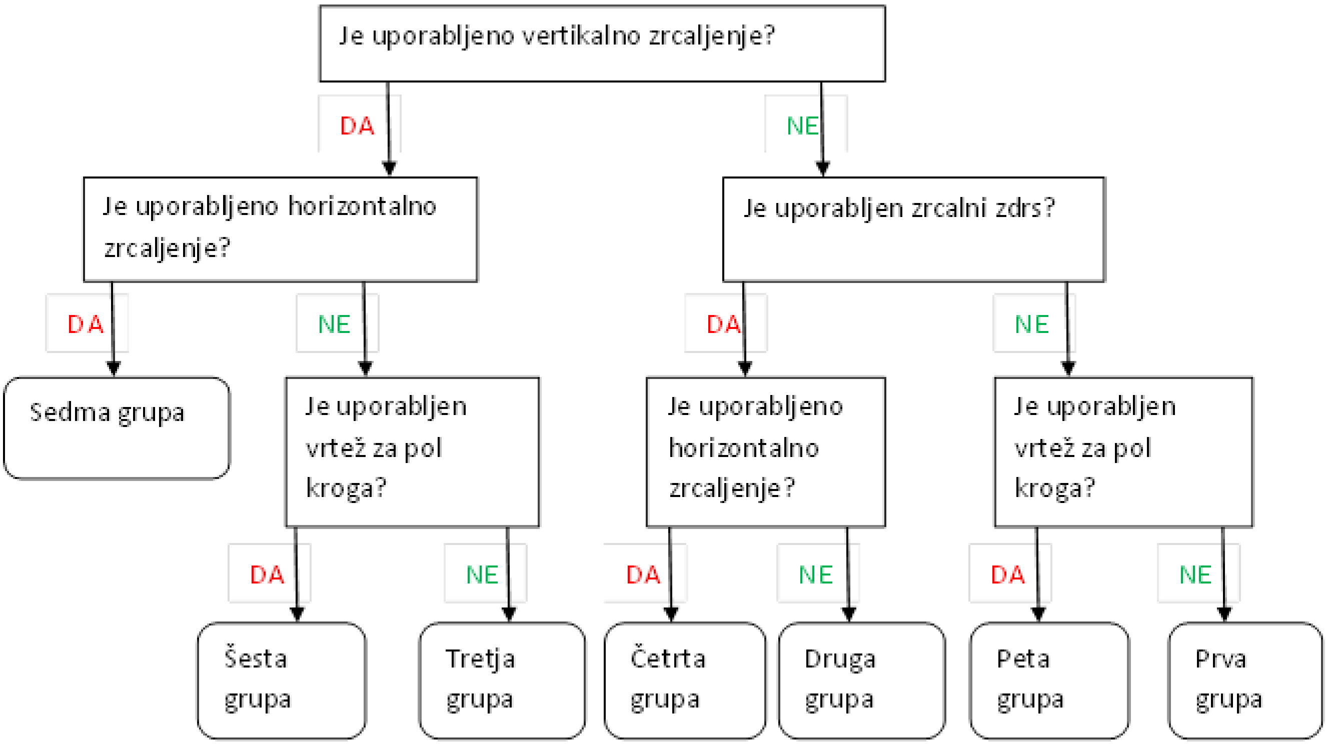
Iz tega smo ugotovili, da obstaja 7 možnih kombinacij izometrij. Imenujemo jih frizne grupe.

t	*zt*	*vt*	*hzt*	*rt*	*vrzt*	*hvrzt*
prva grupa	druga grupa	tretja grupa	četrta grupa	peta grupa	šesta grupa	sedma grupa

Tabela 3: Razvrstitev kombinacij v grupe.

3.3.4 Razvrščanje friznih vzorcev v frizne grupe.

Pri razvrščanju friznih vzorcev gledamo na posamezne izomerije, ki določajo grupo. Načinov in postopkov je veliko. Midva sva si pomagala z naslednjim diagramom:[8]



Slika 3: Diagram za določanje friznih grup.

[8] Diagram [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://mathdl.maa.org/images/upload_library/4/vol1/architecture/Math/frieze.html [uporabljeno 28.12.2012].

4 PRAKTIČNI DEL, METODOLOGIJA, REZULTATI, RAZPRAVA

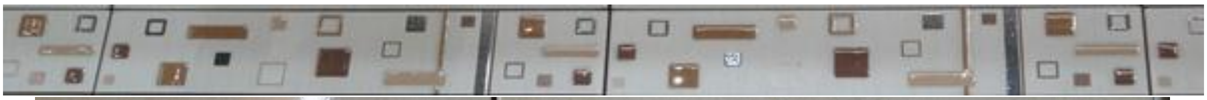
4.1 Praktični del: tlakovanje in frizni vzorci v trgovinah

V drugem delu najine raziskovalne naloge sva obiskala tehnične trgovine in fotografirala ploščice ter bordure, ki jih ponujajo. Kasneje sva bordure razvrstila med sedem grup in ugotavljala vzorci katere grupe so najpogostejši oziroma najmanj prisotni. Pri tlakovanju sva bila pozorna na prisotnost posameznih kombinacij s pravilnimi večkotniki. Razne možnosti tlakovanj in frizne vzorce sva iskala tudi v vsakdanjiku. Želela sva izvedeti, kateri vzorec je najpogostejši in zakaj ravno ta.

Opomba: Fotografije uporabljene v tem poglavju sva posnela sama.

4.1.1 Frizni vzorci, bordure najdene v trgovinah

1. Grupa: translacija



Slika 4: Vzorci prve grupe (slike 4-18).

2. Grupa : translacija in zrcalni zdrs

Slika 5: Vzorci druge grupe (sliki 19-20).

3. Grupa: translacija in vertikalno zrcaljenje


Slika 6: Vzorci tretje grupe (slike 21-27).

4. Grupa: translacija, horizontalno zrcaljenje, zrcalni zdrs

Slika 7: Vzorci četrte grupe (sliki 28-29).

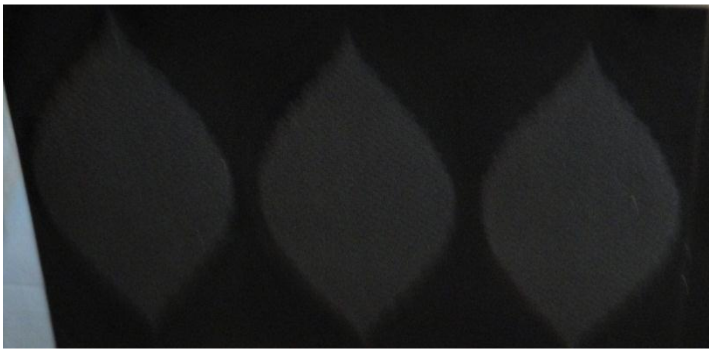
5. Grupa: translacija, vrtež

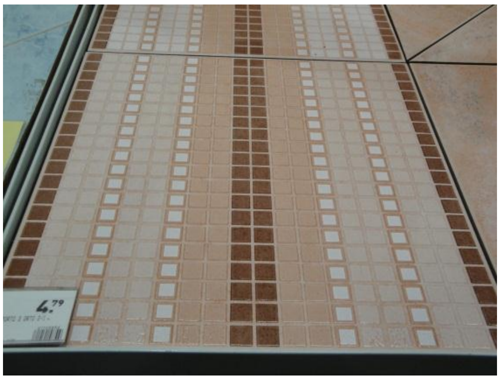
Slika 8: Vzorec pete grupe (slika 30).

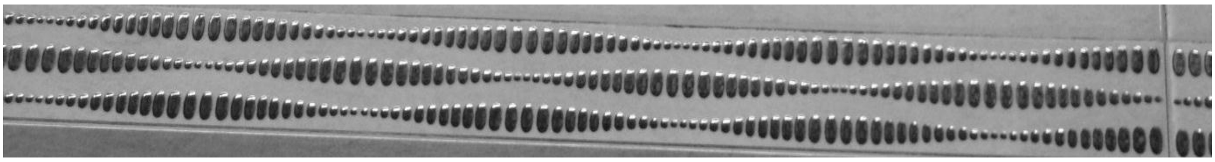
6. Grupa: translacija, zrcalni zdrs, vertikalno zrcaljenje, vrtež

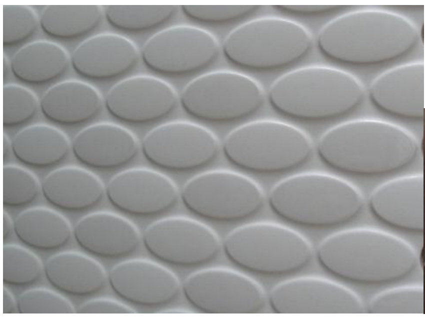
Slika 9: Vzorci šeste grupe (slike 31-33).

7. Grupa:translacija, zrcalni zdrs, vertikalno zrcaljenje, horizontalno zrcaljenje, vrtež









Slika 10: Vzorci sedme grupe (slike 34-41).

GRUPA	IZOMERIJE	ŠTEVILO PRIMEROV	DELEŽ [%]
1. grupa	translacija	16	39,0
2. grupa	translacija, zrcalni zdrs	2	4,88
3. grupa	translacija, vertikalno zrcaljenje	7	17,1
4. grupa	translacija, horizontalno zrcaljenje, zrcalni zdrs	4	9,76
5. grupa	translacija, vrtež	1	2,44
6. grupa	translacija, zrcalni zdrs, vertikalno zrcaljenje, vrtež	3	7,32
7. grupa	translacija, zrcalni zdrs, vertikalni zrcaljenje, horizontalno zrcaljenje, vrtež	8	19,5
Skupaj		41	100

Tabela 4: Deleži različnih grup v najinem vzorcu.

Po najinih rezultatih je najpogostejša prva grupa, ki vsebuje samo translacijo. Glede na to, da je ta najenostavnejša, je razumljivo, da se tudi največ pojavlja v vsakdanjem življenju. S tem potrjujeva prvo predpostavko o grupah.

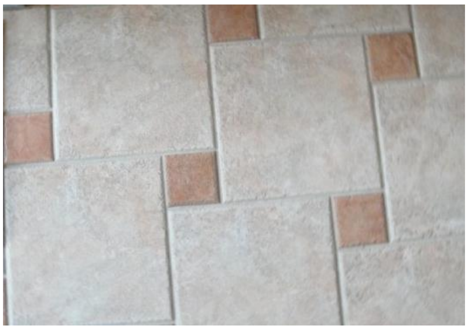
Druga najpogostejša grupa je sedma grupa, ki vsebuje translacijo, zrcalni zdrs, vertikalni zrcaljenje, horizontalno zrcaljenje in vrtež. Glede na to, da od vseh grup ta vsebuje največ izometrij sva predvidevala, da bo najmanj razširjena, vendar ker je druga najpogostejša grupa, sva to hipotezo ovrgla. Razlog, za veliko razširjenost te grupe je ta, da se pojavi velikokrat pri zelo enostavnih oblikah in velik občutek simetrije, ki nastane pri tem friznem vzorcu. Ljudje večinoma lažje vzljubimo in uporabimo simetrijo.

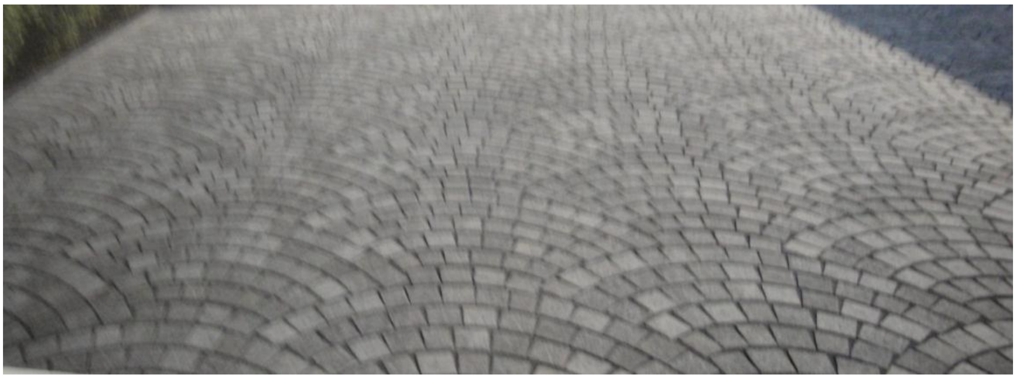
Tretja najbolj pogosta grupa je tretja grupa. To je razumljivo, saj je ena izmed najenostavnejših. Sledijo grupe, ki vsebujejo zrcalni zdrs ali vrtež. Ti dve izometriji ne izgledata tako znane kot ostale, zato tudi nista tako pogosto uporabljeni. Najmanj pogosta je peta grupa, česar nisva predvidevala, saj vsebuje samo dve izometriji.

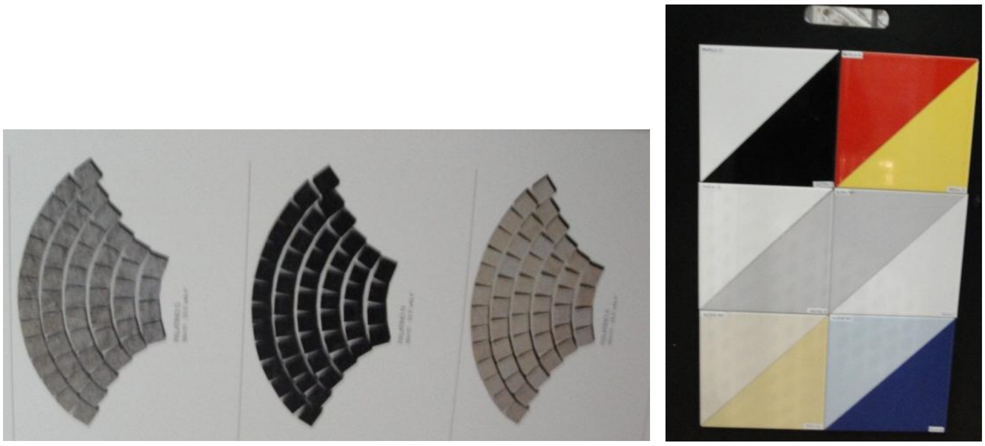
Zakaj torej ni najmanj pogosta katera grupa, ki vsebuje translacijo, vrtež ter še katero drugo izometrijo? Kot lahko vidimo na najinem edinem primeru pete grupe, so vzorci razporejeni tako, da tvorijo krožne vzorce. Ti se zelo poredko pojavljajo kot frizni vzorci, razen če je uporabljena samo translacija celotnega vzorca, vendar se pogosto uporabljajo kot način tlakovanja, vendar ne celotne ravnine, ampak samo delov ravnine. Po tem lahko glede na to, da sva dobila razumljive rezultate lahko rečeva, da je najina metoda dela bila primerna. Za bolj natančne rezultate bi lahko vzela še večji vzorec, približno 100 primerov, ki bi nam dal zelo dobro sliko o pogostosti posameznih friznih grup v vsakdanjem življenju.

4.1.2 Tlakovanje ravnine, ploščice in tlakovci

1. Tlakovanje s kvadrati

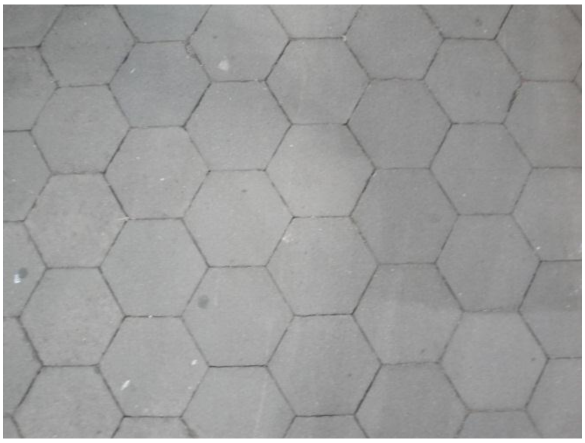






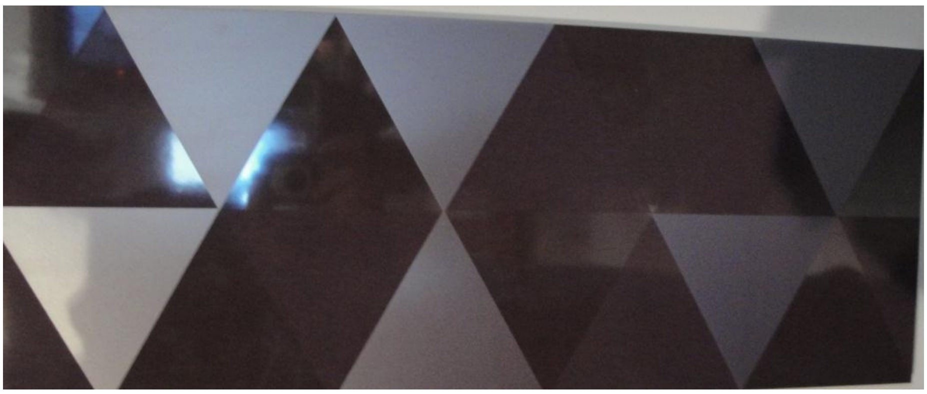
Slika 11: Tlakovanje s kvadrati (slike 42-48).

2. Tlakovanje s šestkotniki



Slika 12: Tlakovanje s šestkotniki (slika 49).

3. Tlakovanje s trikotniki



Slika 13: Tlakovanje s trikotniki (slika 50).

4. Tlakovanje z nepravilnimi večkotniki

Slika 14: Tlakovanje z nepravilnimi večkotniki (slike 51-57).

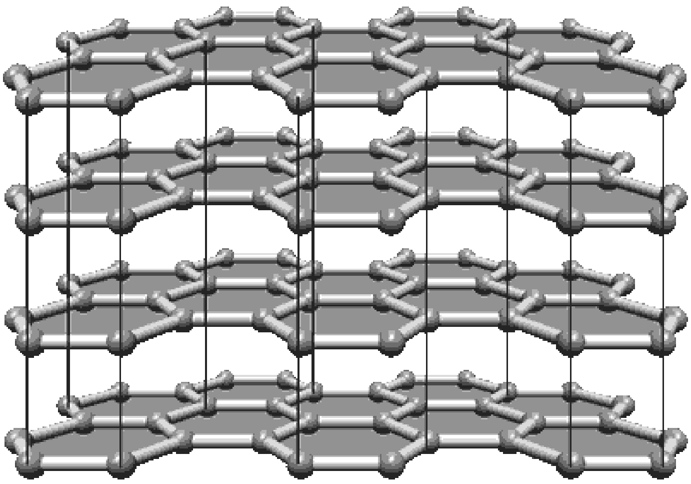
NAČIN TLAKOVANJA	ŠTEVILO PRIMEROV	DELEŽ [%]
Tlakovanje s kvadrati	7	43,75
Tlakovanje s šestkotniki	1	6,25
Tlakovanje s trikotniki	1	6,25
Tlakovanje z nepravilnimi večkotniki	7	43,75
Skupaj	16	100

Tabela 5: Deleži različnih tlakovanj v najinem vzorcu tlakovanj.

1. Predpostavljala sva, da bo največ tlakovanj izključno s kvadrati. V vsaki tehnični trgovini so tla pokrivale kvadratne ploščice takšnih ali drugačnih barv. Srečala sva tudi kombinacijo malih kvadratov in kvadrate, ki so vsebovali različne vzorce. Tlakovanje s kvadrati sva srečala tudi na mestnih trgih (granitne kocke) in šolskih hodnikih. Hipotezo sva potrdila. Vzrok je verjetno preprostost tlakovanja. Polaganje kvadratnih ploščic je najenostavneje, najhitreje in zaradi tega tudi najceneje.
2. Največji pravilni večkotnik, ki sva ga srečala pri teselaciji s ploščicami je bil šestkotnik. Predpostavila sva, da bodo največji večkotniki, ki jih bova srečala osemkotniki, vendar očitno bi bilo tlakovanje s ploščicami, ki presegajo šest stranic že preveč dolgotrajno.
3. Upala sva, da bova srečala vsaj eno kombinacijo vsaj treh različnih pravilnik večkotnikov, ampak opazila nisva niti ene same kombinacije različnih pravilnih večkotnikov, kljub temu, da jih obstaja kar 18. Vzrok tega je lahko: slabo poznavanje možnosti tlakovanj s pravilnimi večkotniki, velika cena tlakovanj, nedostopnost določenih tlakovcev (ploščic), navajenost na tipične načine tlakovanja in količina dela, ki se ga v vloži pokrivanje tal.

4.2.1 Tlakovanje v naravi

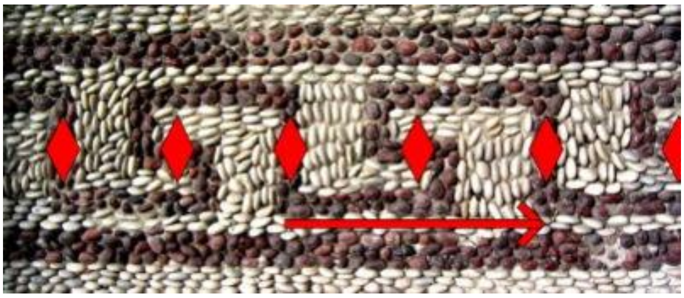
Izbrskala sva tudi različne primere tlakovanja ravnine v naravi. Načini tlakovanja so večinoma preprosti, skoraj vselej s samimi enakimi pravilnimi večkotniki in ne z različnimi kombinacijami (satovje čebel, ogljikove spojine, tlakovanje parkirišč, …).

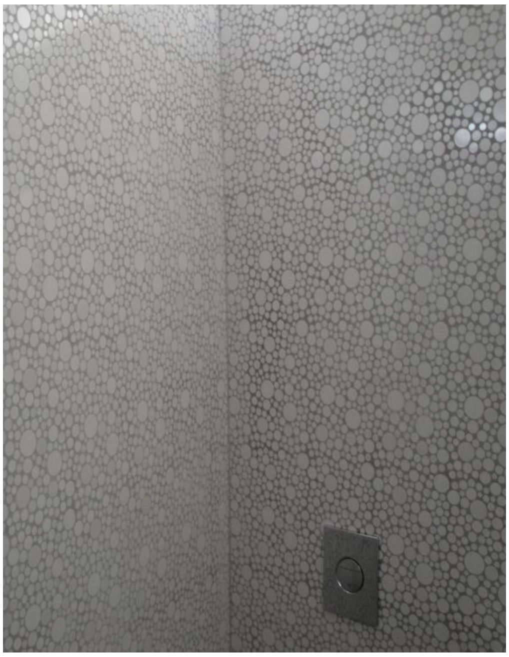


Slika 15: Tlakovanje v naravi, satje čebel in ogljikova spojina (sliki 58-59).

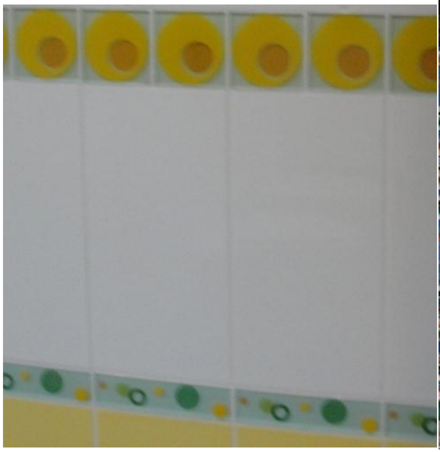
4.2.2 Frizni vzorci v naravi

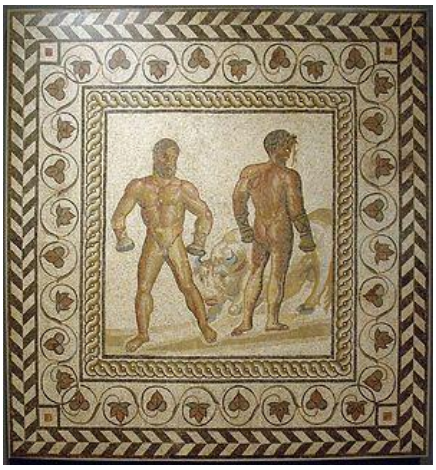
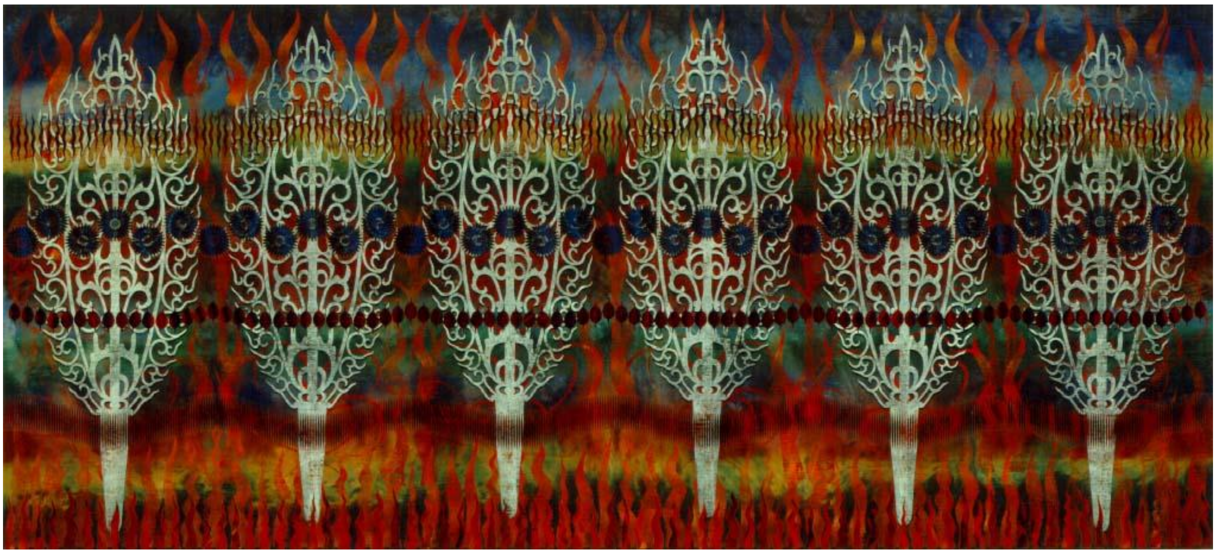
Frizne vzorce nisva opazovala le na ploščicah, temveč sva jih srečala tudi na raznih cerkvah, ograjah, mostovih, cestah, predpražnikih, okvirjih slik, ovitkih, zidovih, živalih, mikroorganizmih, raznih spojinah, odejah in blazinah, …

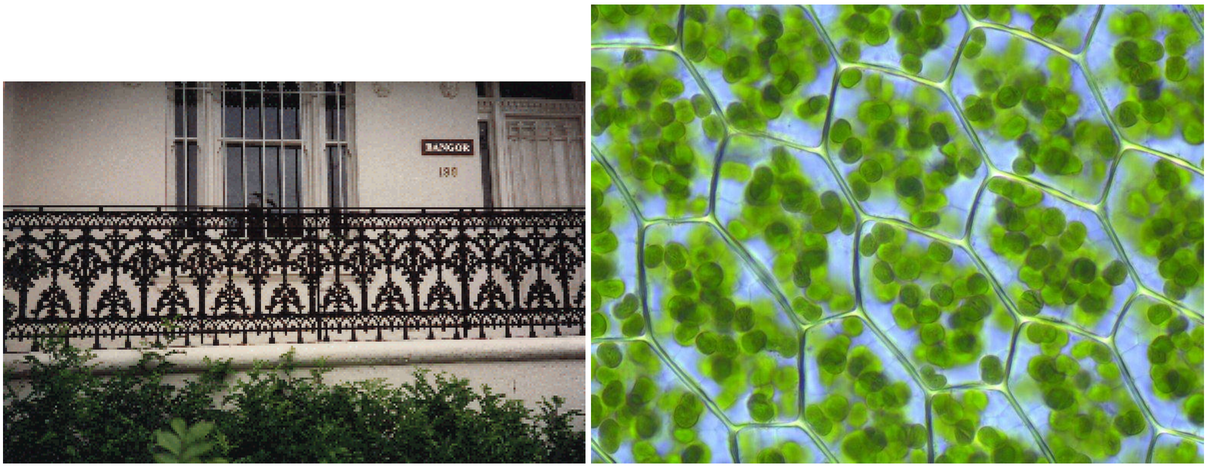





15,95
19,46
Colonial bež





Slika 16: Frizni vzorci v naravi (slike 60-77).

5 ZAKLJUČEK

Po dobljenih rezultatih sva ugotovila, da so najine hipoteze bile dobro postavljene, saj sva potrdila vse, le eno sva potrdila delno, saj sva narobe predvidevala najmanj pogosto frizno grupo. Vendar čeprav sva to narobe predvidevala, nisva naredila nobene napake v metodi dela, saj sva si po dobljenih rezultatih lahko razložila, zakaj je do tega prišlo. Kot lahko sklepamo, so vedno najpogostejši najbolj enostavni vzorci in načini tlakovanja. Zato bordure večinoma sestavljajo identični vzorci, ki se ponavljajo in preslikavajo v neskončnost, ko nam kdo omeni besedo »ploščice« pa najprej pomislimo na kvadrate, ne pa na šestkotnike ali druge večkotnike.

Z raziskovalno nalogo sva tudi dokazala in ponazorila s slikami, da se znanje o različnih načinih tlakovanja in friznih vzorcih ter friznih grupah lahko uporablja v našem vsakdanjiku in naravi. Na najinem terenskem delu sva ugotovila tudi, da se uporaba bordur, ter z njimi uporaba friznih vzorcev v stanovanjih vedno bolj zmanjšuje, saj sedaj trgovine večinoma predstavljajo le še moderne kuhinje in kopalnice, za katere so značilne ravne, naravne linije brez vzorcev.

6 VIRI IN LITERATURA

Literatura

1. Ng Lay Ling (2003/2004 semester 1): Tilings and patterns, Department of Mathematics, National University of Singapore.
2. Branko Grunbaum (1977): Tiling by regular polygons, Mathematics magazine, vol.50, no.5, november 1977, University of Washington.

Elektronski viri

1. Pravilni večkotnik [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://mathworld.wolfram.com/RegularPolygon.html [uporabljeno 22.12.2012].
2. Konveksen večkotnik [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.o-tozagorje.tb.edus.si/_ucitelji/ucitelji/nermin/poli/Konveksen.html [uporabljeno 21.12.2012].
3. Centralna izometrija [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://portal.skola.ba/start/Portals/0/izometrije-translacija,osna%20i%20centralna%20simetrija.pdf [uporabljeno 27.12.2012].
4. Zrcaljenje čez premico [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2000/dira/jelka/zrcaljenjecezpremico.html[uporabljeno 27.12.2012].
5. Vrtež [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2000/dira/jelka/vrtezi.html [uporabljeno 27.12.2012].
6. Zrcaljenje čez točko [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2000/dira/jelka/zrcaljenjeceztocko.html[uporabljeno 27.12.2012].
7. Prostorska skupina [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://sl.wikipedia.org/wiki/Prostorska_skupina [uporabljeno 7.1.2012].
8. Frizne grupe [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.fmf.uni-lj.si/~vavpetic/seminar/Vavpetic-FrizneGrupe.pdf [uporabljeno 28.12.2012].
9. Sedem friznih grup [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://mathdl.maa.org/images/upload_library/4/vol1/architecture/Math/seven.html [uporabljeno 28.12.2012].

10. Diagram [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://mathdl.maa.org/images/upload_library/4/vol1/architecture/Math/frieze.html [uporabljeno 28.12.2012].

Viri slik

1. Slika 1: Vrtež okoli točke [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://en.wikipedia.org/wiki/Tiling_by_regular_polygons [uporabljeno 27.12.2012].
2. Slika 2: Vrtež okoli točke [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2000/dira/jelka/vrtezi.html [uporabljeno 27.12.2012].
3. Slika 59: Satje čebel [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.czs.si/Upload/624786_90299211.jpg [uporabljeno 5.2.2013].
4. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://i32.photobucket.com/albums/d8/gabesmonte/bits.jpg [uporabljeno 5.2.2013].
5. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.ontarioarchitecture.com/revivalbathmetope.jpg [uporabljeno 5.2.2013].
6. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://billbarr.files.wordpress.com/2010/04/img_9068.jpg [uporabljeno 5.2.2013].
7. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://farm6.staticflickr.com/5316/7080097275_a231c1d2cd.jpg [uporabljeno 5.2.2013].
8. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://classconnection.s3.amazonaws.com/683/flashcards/496683/png/fr.png [uporabljeno 5.2.2013].
9. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.philiptaaffe.info/Critical_Commentary/lipseyImages/CerFrieze.jpg [uporabljeno 5.2.2013].
10. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://farm3.staticflickr.com/2673/3760359992_09dbcfc2b4_z.jpg [uporabljeno 5.2.2013].
11. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://math.slu.edu/prep08/images/prep08/thumb/d/d1/GettyMosaic.jpg/300px-GettyMosaic.jpg [uporabljeno 5.2.2013].

12. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://www.nano-enhanced-wholesale-technologies.com/images/structure-graphite.gif [uporabljeno 5.2.2013].
13. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://en.es-static.us/upl/2011/11/plant_cell.jpeg [uporabljeno 5.2.2013].
14. Slika 60-77: [elektronski vir]. Dostopno na URL naslovu: http://nrich.maths.org/content/98/11/art1/gallery/small_bangor.gif [uporabljeno 5.2.2013].
15. **Opomba**: Slike 3-57 sva fotografirala in oblikovala sama. [fotografirano 27.12.2012]