Mladi za napredek Maribora 2014

31. srečanje

MISLITI MATEMATIKO S POMOČJO FILOZOFIJE

FILOZOFIJA

Raziskovalna naloga

Avtor: IVAN KOVAĻ IĻ

Mentor: MIHA DEBENAK

Ġola: PRVA GIMNAZIJA MARIBOR

2014, Maribor

Mladi za napredek Maribora 2014

31. srečanje

MISLITI MATEMATIKO S POMOČJO FILOZOFIJE

FILOZOFIJA

Raziskovalna naloga

2014, Maribor

KAZALO

1. POVZETEK 3
2. ZAHVALA 4
3. UVOD 6
    2.1. HIPOTEZE 7
    2.2. METODOLOGIJA DELA 7
3. PREHOD IZ MYTHOSA V LOGOS – ROJSTVO MATEMATIKE IN FILOZOFIJE OB SOČASNEM RAZVOJU KRITIČNEGA MIŠLJENJA 8
    3.1. MYTHOS – SREDSTVO UTEMELJEVANJA 8
    3.2. »LOGOS JE VSEMU SKUPEN« 9
    3.3. LOGIKA – UDEJANJENJE LOGOSA IN KLJUČNO ORODJE MATEMATIČNE MISELNOSTI 11
        3.3.1. Logika in *logos* 11
        3.3.2. Formalna in neformalna logika 12
        3.3.3. Dedukcija v matematiki in matematična ali popolna indukcija 14
        3.3.4. Odmik od mitoloških prepričanj k logično-kritičnemu mišljenju 16
        3.3.5. Parakonsistentna logika v matematiki po zgledu Nikolaja Kuzanskega 17
        3.3.6. Logicizem 19
    4.1. PLATONSKI DUALIZEM KOT MODEL BIVANJA MATEMATIKE 20
        4.1.1. »Vidni in miselni svet« 20
        4.1.2. Platonov nauk o idejah in pojmovni svet matematike 21
    4.2. KRITIKA PITAGOREJSKE FILOZOFIJE POČELA – O OBŠIRNOSTI IN OMEJENOSTI MATEMATIČNE MISELNOSTI 23
        4.2.1. Dvom v pitagorejsko filozofijo 23
        4.2.2. Pitagorejski pomen sodih in lihih števil 23
        4.2.3. Pomen števnih števil 25
        4.2.4. Matematični dokaz obstoja neštevnih števil 26
5. INTERPRETACIJA REZULTATOV 29
    5.1. ANALIZA HIPOTEZ 29
6. SKLEP 30
7. VIRI IN LITERATURA 31
8. KAZALO SLIK 31

1. POVZETEK

Misliti matematiko s pomočjo filozofije, to je pot, ki jo je mogoče zasledovati po najrazličnejših poteh. V nalogi sem raziskoval, kakšne so omejitve in razsežnosti matematične miselnosti. Ker je filozofija tista, ki misli celoto bivajočega, sem z njeno pomočjo lahko reflektiral početje matematikov. Želel sem pokazati, da predstavlja matematika odmik od »*mythosa*« in prehod v »*logos*«, ki je vsemu skupen. V izrekanju »*logosa*« sem prepoznal skupno jedro filozofije in matematike, to je pravilnost logičnega mišljenja. Gre za način mišljenja, ki zasleduje potek sklepanja. Vendar je potrebno opozoriti, da je logika mnogotera. Pokazal sem, kako je vselej odvisna od aksiomov, ki jih predhodno sprejmemo. Še več, s filozofijo Nikolaja Kuzanskega sem poskušal misliti celo sovpadanje nasprotij, kar presega okvirje tradicionalne logike. S pomočjo Platona je mogoče razumeti, kako se matematika kaže na najrazličnejše načine, a deleži v skupni *ideji*. Matematična teorija sodi, po Platonu, v pojmovni svet. Na koncu izpostavljam kritiko pitagorejske filozofije, ki postavi število kot počelo vseh stvari. Le-ta se namreč izkaže kot problematična zaradi določenih omejitev v vidiku števila. Jasno se pokaže ključna potreba po kritičnem premisleku matematičnih postavk. Tako sovpada potreba po prepletu matematike in filozofije.

2. ZAHVALA

Želel bi se iskreno zahvaliti mentorju za obilo časa, napotkov, podpore in virov znanja, ki mi jih je podajal skozi celoten postopek izdelovanja raziskovalne naloge. Ob vodstvu mentorja sem dosegel ogromno novih miselnih obzorij, ki so mi omogočili izdelavo naloge, prav tako pa nekaj novih pogledov na matematiko.

3. UVOD

V življenju se ljudje tako ali drugače srečujejo z matematiko – bodisi v sodobnem izobraževalnem sistemu bodisi ob reševanju kakšnega miselnega problema. Ker je matematika ena izmed najbolj abstraktnih znanosti, je še toliko bolj zanimiva v svojih zmožnostih in omejitvah. Prav te želim raziskati v tej raziskovalni nalogi. Za nalogo bodo bistvena vprašanja, zakaj ne moremo trditi, da so matematična prepričanja mitološkega značaja, kakšen je odnos med matematiko in logiko ter kakšni so vidiki logike, nato pa je še pomembno vprašanje, kako sploh matematične bitnosti bivajo. Denimo - Ali so matematične resnice omejene z materialnim svetom ali bivajo tudi onkraj njega? Nazadnje še želim raziskati ter skušati kritično premisliti o značilnostih pitagorejske filozofije, ki zgodovinsko velja kot nekakšna povezava med matematičnimi in filozofskimi vidiki.

2.1. HIPOTEZE

H1: Matematika predstavlja nasprotje mitološkemu načinu mišljenja.

H2: Teoretične resnice v matematiki (in drugih vedah) zajema pojem *logos*.

H3: Logika igra ključen pomen v matematiki, sama pa ni popolnoma matematično determinirana**.**

H4: Matematična ali popolna indukcija sklepa zmeraj na nujnost in ne verjetnost.

H5: Znotraj matematike obstajajo matematične ideje, ki jih je možno zgolj uvideti.

H6: S pomočjo matematike je mogoče razširiti pitagorejski pojem števila.

2.2. METODOLOGIJA DELA

Potek izdelave raziskovalne naloge je sledeč: Najprej je potrebno zbrati in preučiti ustrezno literaturo, ki vsebuje temeljne koncepte in ideje, uporabne za vsebino naloge. Nato je potrebno posamezne misli razdelati in razrešiti konkretne miselne probleme. Ugotovitve je nato potrebno strniti v celoto tako, da je sosledje premislekov smiselno.

3. PREHOD IZ MYTHOSA V LOGOS – ROJSTVO MATEMATIKE IN FILOZOFIJE OB SOČASNEM RAZVOJU KRITIČNEGA MIŠLJENJA

3.1. MYTHOS – SREDSTVO UTEMELJEVANJA

Zgodovinski zapisi pričajo o bogastvu človekove miselnosti vse od začetkov klasičnih kultur, ki so posredno vplivale tudi na razvoj današnjih t.i. postmodernih družb. Gotovo je bila človekova miselnost v zgodovini pomembno obarvana z mitologijo. O mitologiji pričajo številni zapisi iz antike. Čeprav se bom ustavil pri antični misli, to ne pomeni, da so etruščanski, egipčanski, slovanski idr. mitični zapisi za obravnavo manj pomembni. Smiselno je vzeti pod obzir prav antično Grčijo, kjer se je matematika kot taka rodila. V najstarejših nam znanih zapisih iz antične Grčije nastopajo literarna dela, predvsem avtorjev Homerja in Hesioda. Literatura teh dveh mož priča o bogati zakladnici grške mitologije. Ker zapis nujno odraža neko miselnost pisarja, lahko sklepamo, da je bila mitologija splošno prisotna v omenjenem času.

Kaj je mitologija in kakšno je njeno miselno jedro? Slehernemu človeku se v življenju pojavi vprašanje o bivajočem, bodisi v kakšni življenjski stiski, ko vznikne eksistencialno vprašanje po obstoju, Camus v Mitu o Sizifu zapiše: »Obstaja en sam zares resen filozofski problem in to je vprašanje samomora« – bodisi v splošnem procesu kritičnega mišljenja kdaj izpostavimo t.i. temeljno vprašanje metafizike: »Zakaj je bivajoče in zakaj ni raje nič?«[1] Vprašanje bivajočega je eksistencialno vprašanje naše narave, to pomeni, da obravnava človekov obstoj, obenem pa je vprašanje bivajočega v bistvu vprašanje stvarstva/vsega kar *je* v najširšem filozofskem smislu. Na vprašanje stvarstva mitologija odgovarja s pomočjo mita. Mitološka zgodba je zgolj posebna vrsta miselne (»logične«) predpostavke – je sredstvo za odgovor na neko zelo splošno vprašanje, katerega se ne da na enostaven način racionalno razčleniti. Vprašanje po nastanku in razvoju vsega materialnega (*physis*), odgovor na vprašanje po namenu bivanja ipd. se zdi, da še danes presega človekove razumske sposobnosti mišljenja.

»...torej ne bodi presenečen, Sokrat, če med mnogimi mnenji o bogovih in o nastanku sveta ne moremo podati pojmov, ki so povsem in v vseh pogledih eksaktni in medsebojno

[1] Heidegger, M. (1995). Uvod v metafiziko. Ljubljana: Slovenska matica.

konsistentni. Dovolj je, da tukaj podamo verjetnosti - ki so verjetne med drugimi verjetnostmi - kajti ne smemo pozabiti, da sem jaz “Timaj”, ki govorim, in vi, ki moj govor presojate, zgolj smrtni ljudje, in zato moramo sprejeti zgodbo “*mythos*”, ki je verjetna, in ne sprašujemo več dalje« (Platon, Timaios 29cd). V delu Timaj, starogrškega filozofa Platona, se odvija dialog med Sokratom in mislecem Timajem, obravnava pa vprašanja stvarstva. Timaj reče, da je mit sredstvo za doseganja miselno nemogočega preko prispodobe. Mitološka govorica je onkraj logičnega jezika, zato se vzpostavi nivo verjetnosti, o čemer govori Platon. Takšno misel, ki je lahko poljubna, je težko določiti eksaktno in medsebojno konsistentno, ker je po definiciji logično nedosegljiva. Obstoj božanstev je namreč s pomočjo razuma nemogoče dokazati. Pomislimo na dolgo pot teološkega dokazovanja. Bog je, če obstaja, vsemogočen in presega sposobnosti racionalnega dokazovanja.

Mit je pogosto v obliki prispodob – najrazličnejših miselnih oblik, ki imajo nek pomen, ki ni razložen v sami vsebini prispodobe, temveč je zgolj predpostavljen in poljubno verjeten, nikoli pa nujen. Hesiod, Teogonija 116: “V samem začetku je Kaos nastal, nato pa še Zemlja, širno prsata, nesmrtnikov trajno obstojno domovje, njih, ki prebivajo zgoraj na snežnih vrhovih Olimpa…«. Ta misel je inducirana iz prepričanja ali vere v bivanje božanstev oz. drugih mitoloških bitnosti kot odgovor na vprašanje stvarstva, počela (bistva bivajočega) itd. Kot način mišljenja pa mit nikdar ne more biti del matematične vsebine, saj so jedro matematične vsebine izreki in definicije. Da razumemo naravo le teh, je nujno potreben odmik k pojmu, še natančneje: »*logosu*«.

3.2. »LOGOS JE VSEMU SKUPEN«

Mit oz. »*mythos*« je torej sredstvo za doseganje resnice o bivajočem s pomočjo prispodob. Takšna misel je lahko samo poljubno verjetna. Logičnemu sistemu mišljenja je vsebina *mythosa* dvomljiva, kajti v kolikor iščemo pravilne sklepe, le-ti terjajo predpostavke (denimo obstoj bogov), ki jih praviloma ne moremo miselno dokazati kot resnične – resnične v tej meri, da lahko dodobra trdimo, da je misel sprejeta kakor logična intersubjektivna trditev. To pomeni, da mit ne more biti sam po sebi miselno sprejemljiv, ne glede na to, kdo ga misli. Odvisen je od zgodovinsko-kulturnega horizonta. Za razvoj matematike in hkrati filozofije je večjega pomena le-takšna miselnost, ki je lahko intersubjektivna. Gre za pravilnost in logično preverljivost. Vendar je s tem logično mišljenje tudi omejeno, kakor pravi Platon, o nastanku sveta ne moremo podati eksaktnih pojmov.

Jedro nadaljnjega premisleka bo predstavitev pomena pojma *logos* in njegova povezava s filozofijo in matematiko. »Beseda *logos* je ena izmed pogostejših besed v grškem jeziku nasploh, še posebej v filozofiji; pri tem pa se odgovor na vprašanje, kaj je *logos* , največkrat konča z naštevanjem številnih pomenov ali izpostavljanjem določenega »pravega« pomena, z določenega vidika pa bi lahko rekli, da je beseda docela neprevedljiva.«[2] Beseda »*logos«* nima natančnega pomena – lahko pomeni beseda, govor, razlog, razum, um. »Jasno je, da se večpomenskost tega izraza ne tiče toliko obzorja starih Grkov, kolikor se tiče našega lastnega. Tako lahko postavimo izhodiščno tezo, da grška raba besede ni poljubna in da dejstva, da uporabljajo prav to besedo in ne kakšne druge, ne smemo zanemariti, navkljub privlačni rešitvi, ki bi zagovarjala postavko, da *logos* na določenem mestu pomeni eno, drugje pa nekaj drugega.« [3] Rabo besede *logos* v vsakdanjem življenju zasledimo pri imenih znanosti – na primer besedo biologija etimološko razčlenimo na korena »*bios«* in »*logos«,* kjer *logos* predstavlja v bistvu to, kar je v filozofskem pomenu. Seveda znanstveniki ne delajo interpretacij dotičnih imen »svojih« znanosti. Da natančneje razumemo povezanost pojma *logosa* z matematiko kot tudi filozofijo, je smiselno, da skušamo razumeti razsežnost pomena *logosa* natančneje. V nadaljevanju želim izpostaviti skupno jedro matematike in filozofije. Omenjeni znanosti, pri čemer je filozofija tista, ki misli celoto bivajočega, druži *logos,* ta *pravilnost* mišljenja.

»Najpopolnejši grški slovar, oxfordski Greek-English Lexicon avtorjev Lidella, Scotta in Jonesa, ki upošteva vsa antična besedila, razvršča pomene v naslednje skupine (povzemam):

I. **Račun(anje), ocenjevanje: račun** (kot vsota denarja), mera, velikost, vsota, skupni znesek porabe, presoja itd.
II. **Odnos, ujemanje, razmerje**: matematično razmerje; slovnična analogija, pravilo
III. **Razlaga**: priziv, izgovor, vzrok, primer (v pravu, pogovoru), trditev, dokaz, naslov dela, razprave, logična propozicija (premisa ali sklep) itd.
IV. **Notranji pogovor duše**: mišljenje, razmišljanje, refleksija, premišljevanje, teorija itd.
V. **Nepretrgana izjava, pripoved (dejstva ali fikcija), govor**; basen, legenda, pripovedka, zgodba itd.

[2] ZORE,Franci. Obzorja grštva – Logos in bit v antični filozofiji. Ljubljana: Znanstveno in publicistično središče, 1997. (str. 64-67)
[3] Prav tam.

VI. **Besedni izraz ali izrek,** ponavadi v smislu fraze..

VII. **Poseben izrek, reklo:** božanski izrek, orakelj, pregovor ….

VIII. **Izraz,** izrek, govor, umni izrek…..

IX. **Beseda ali Modrost Boga,** uteležena kot božji izvajalec stvarjenja sveta in vladanja svetu.«[4]

Logos odraža mnogo pomenov, ki se prepletajo s filozofijo in matematiko. Besede račun, odnos, razmerje, trditev, dokaz, mišljenje, teorija, izrek so besede, tesno povezane prav z matematiko ter filozofijo. Slednja želi s sistematičnim mišljenjem priti do dna splošnim vprašanjem o bivajočem, matematika (*máthēma*), ta ljubezen do učenja, pa raziskuje svet abstraktnih lastnosti števil, struktur, sprememb, prostora itd. Pomembno je izpostaviti, da je svet matematike zelo abstrakten in splošen, tako se bistveno razlikuje od vseh empiričnih znanosti, ki se ukvarjajo s konkretnejšimi pojmi. Tako lahko sklepamo, da je pomen *logosa*, gledano sodobno interpretacijsko, povezan z matematiko in filozofijo, pri čemer filozofija omogoča mišljenje matematike v strukturi vsega bivajočega, slednja, torej matematika, pa daje filozofiji podporo v iskanju trdnosti deduktivnih in drugih logičnih sklepov.

3.3. LOGIKA – UDEJANJENJE LOGOSA IN KLJUČNO ORODJE MATEMATIČNE MISELNOSTI

3.3.1. Logika in *logos*

Za boljše razumevanje matematične povezave z *logosom* je smiselno vzeti v obzir logični način mišljenja. Logika deluje po principu aksiomov – postavljenih načel, ki so umu samo razvidni. Ti aksiomi so zgolj predpostavljene logične trditve, zaradi tega, ker so, kot bi rekel Aristotel, za vsakega človeka razvidni sami po sebi, sprejeti so intersubjektivno. To pomeni, da so trditve sprejete med ljudmi enako, ne glede na predznanje in miselno ozadje tistega človeka. Poleg tega so aksiomi nujni pogoj nadaljnjega racionalnega mišljenja. Klasični aksiomi matematike, če se tako izrazim, kot so npr. evklidski aksiomi in npr. Peanovi aksiomi odražajo neko očitno resnico (ni pa nujno), so pa, kot rečeno, zgolj predpostavljeni in niso sami po sebi utemeljeni. Logika deluje po principu omenjenih predpostavk. Denimo, osnovna predpostavka logike je, da je določena stvar vedno enaka sama sebi (A=A). To je

[4] ZORE,Franci. Obzorja grštva – Logos in bit v antični filozofiji. Ljubljana: Znanstveno in publicistično središče, 1997. (str. 64-67)

tako imenovano načelo identitete. To je zgolj primer tovrstnih aksiomov. »Ko govorimo o logiki pri Aristotelu, večinoma gledamo nanjo z vidika sodobne formalne logike in na Aristotela kot njenega začetnika. Toda logika je pri Aristotelu predvsem nauk o logosu oziroma resničnosti logosa, pri tem pa resničnost z vidika antične filozofije ne more biti samo formalna, temveč je vedno utemeljena ontološko.«[5] Logika torej predstavlja nauk o *logosu* oziroma udejanjenje logosa v pravilnosti premisleka, ki ne more delovati brez besede. »Snov izgovorjenega logosa je glas, ki ga lahko tudi zapišemo. Tako lahko rečemo, da je logos z vidika snovi sestavljen iz glasov in črk (pismenk), ali pa tudi zlogov, ki jih te sestavljajo. Zlogi so sestavljeni deli besed, ki jih Aristoteles – tako kot pred njim Platon – deli na imena in glagole.« Vloga besede v logiki je torej pomembna. Vzporednost pisane in govorjene besede je smiselna, saj obe v logiki porajata nove misli. Tako tudi matematično mišljenje ne more biti omejeno samo na zapis, temveč na tako zapis in govorjeno besedo. To je bistveno, saj tako lahko razumemo, da matematika ni znanost, ki bi se jo dalo raziskovati izključno s pomočjo simbolike, saj logika sama ni taka, da bi vselej morala biti zapisana. *Logiko* torej razumem kot udejanjenje *logosa*, ki ni vselej formalno zapisan niz simbolov. Vrednost filozofije se kaže prav v govorjeni besedi, torej dialogu. Pogovornega partnerja nikoli ne bi smeli potlačiti z argumenti, temveč bi vselej morali stvarno pretehtati njegovo mnenje s pomočjo logičnih argumentov, ki so intersubjektivni. Tako sta si matematika in filozofija v svojem jedru podobni. *Logos* je tok, ki izhaja iz takega mišljenja in pozvanja skozi usta. *Logos* je mesto pravilnega in resničnega.

3.3.2. Formalna in neformalna logika

Logika ni enoličen način mišljenja. Lahko govorimo o logiki *besedno,* tako da s pomočjo razumskega premisleka tvorimo intersubjektivne trditve. Na primer: »Vse je to, kar je.« (G. Leibniz) ali »ne obstaja več stvari, ki bi lahko bile enake, kajti v tem primeru nebi bilo več stvari, pač pa ista stvar sama. Zatorej vse stvari sovpadajo druga z drugo in se hkrati med seboj razlikujejo« (N. Kuzanski, De genesi, 1447). Tovrstni pristop razumevanja pravil logike je bolj posplošen – razumeti logiko s pomočjo »*logosa*« – s pomočjo besede in razuma. Lahko pa, na primer, isto pravilo, načelo identitete, zapišemo simbolno: A = A. Takšen zapis je s simboli − znaki, ki jih razumemo preko dogovora. Proces spremembe

[5] ZORE,Franci. Obzorja grštva – Logos in bit v antični filozofiji. Ljubljana: Znanstveno in publicistično središče, 1997. (str. 66)

besednega nauka logike v simbolni zapis se odraža v matematiki. To bom v nadaljevanju imenoval formalizacija logike. S pomočjo formalizacije logike je matematični pristop mišljenja dejansko utemeljen. Matematika se na formalni način – zapis s simboli in dogovori, loteva logike, prav logiko pa potem uporablja vselej, pri vsakem matematičnem razmišljanju. Če razumemo logiko kot sistem pravilnosti mišljenja, ki je utemeljena na aksiomih. Četudi se je v zgodovini teorije matematike formalizacija logike začela šele v 19. stoletju, se izkaže, da se vsaka matematična resnica iz vse teorije matematike lahko razgradi na formalno logiko. Razlog za to je preprost: Kot rečeno, je matematična teorija takšna, da je sestavljena vselej iz dokazov – ti pa so vselej predstavljivi s formalno logiko. Zanimivo je, da je načeloma matematično definirano prav vse, kar je možno iz materialnega sveta abstrahirati. Vendar o tem v nadaljevanju. Smiselno je izpostaviti, da se matematične definicije temeljno prepletajo z logiko. Matematika in filozofija sta si torej zelo podobni. Trdnost matematičnih sodb se skriva v njenih deduktivnih sklepih. V nadaljevanju bom pokazal, da celo matematična indukcija vsebuje logično nujne sklepe. Zato pravi Galileo: »Kdor razume geometrijo, poseduje moč razumevanja sveta« ali s pomočjo Laplacea: »Vsa dela narave so samo matematične posledice malega števila ustaljenih zakonov«.

3.3.3. Dedukcija v matematiki in matematična ali popolna indukcija

Kako sploh uporabiti logiko? Osnova logike je racionalna podpora sklepa – trditve, ki iz danega problema sporoči neko rešitev miselnega problema. Vsak sklep je v osnovi lahko bodisi deduktivnega bodisi induktivnega značaja – torej poznamo deduktivne in induktivne sklepe. Slednji, induktiven način mišljenja, se v matematiki uporablja redkeje. Sicer je indukcija na nek način povezana z matematiko – pa vendar ne vsebinsko. Matematika uporablja namreč posebno vrsto induktivnega sklepanja, ki je po značilnosti bistveno kontrastna navadnim induktivnim sklepom – temu rečemo popolna indukcija ali matematična indukcija. »Matematična indukcija si privošči, bolj kot karkoli drugega, tisto esencialno karakteristiko po kateri je končno razločeno od neskončnega. Princip matematične indukcije bi lahko bil izražen popularno kot: »Kar je možno sklepati iz sledečega na sledečega je prav tako možno sklepati od prvega na zadnjega. To je res, kadar je število korakov vmesnega sklepanja končno in ne drugače.«[6] Tako je zapisal filozof in matematik Bertrand Russell. Russell meni, da matematična ali popolna indukcija nastopi natanko tedaj, ko je zajeto končno število sklepov iz enega dela na drugega. Splošni induktivni sklep oz. nepopolna indukcija nima takšne lastnosti.

»Vsakdo, ki je že kdaj videl tovorni vlak naložen s tovornjaki kako spelje, je opazil, kako je pogon vlaka komuniciral z majhnim tresljajem vsakega od tovornjakov naloženih na vlaku, dokler se končno ni zatresel še zadnji tovornjak. Če bi bil vlak neskončno dolg, bi bilo neskončno preskokov tovornjakov, vlak pa ne bi nikoli speljal. Vendarle, če bi bila vsota tovornjakov nič daljša od vsote t.i. induktivnih števil (ki, kot opazimo, so slučaj najmanjše vrste neskončnosti), bi se vsak tovornjak zatresel prej ali slej, v primeru, da bi motor vlaka zdržal, četudi bi bila vedno še neka količina tovornjakov, ki se ne bi premaknilo. Ta prizor bo pomagal potrditi, da je bistvo matematične indukcije končno število sklepov iz enega dela na drugega. Namreč, ko pridemo do neskončnih števil, kjer matematična indukcija ni več smiselna, bodo le-ta števila pomagala pokazati preko kontrasta, skoraj podzavestno rabo matematične indukcije, ki je rabljena le, kjer so končna števila vzeta v obzir.«[7]

---

[6] Russell, Bertrand. Introduction to mathematical philosophy. New York : Dover Publications, 1993. (str.16-23)
[7] Prav tam.

Bistvo Russellove misli o končnosti in neskončnosti je ključna za razumevanje posebnosti matematične indukcije. Le ta je ravno zaradi končnosti števila elementov, ki jih indukcija vzame v obzir taka, da ima »popoln« učinek, oziroma, da velja za vsak element, ki ni tako logično utemeljen posebej. Zaradi tega definitivno ne moremo trditi, da je matematična indukcija primerljiva s klasičnim induktivnim sklepanjem in da tako vodi zgolj do verjetnosti, ne pa nujnosti. Sicer pa matematična veda statistika »proizvaja« podatke, ki služijo induktivnemu sklepanju. Ti podatki so po naravi takšni, da skušajo zajeti zgolj nek del celote ter s pomočjo njega skušajo predstavljati celoto s pomočjo vzorčenja – predstavljati celoto s pomočjo njegovega dela. Klasično induktivno sklepanje je prav takšno, da zmeraj sklepa iz dela celote na celoto. Takšno sklepanje je v osnovi zmotno. Seveda induktivno sklepanje lahko vodi do poljubne stopnje verjetnosti, vendar je problem, da vselej ne drži. Tako šteje rezultat indukcije za logično neresnico. Omenjeni primer induktivnega sklepanja s pomočjo statističnih podatkov (ki nastanejo s pomočjo matematike) imenujemo statistična generalizacija. Takšne vrste sklepov so bolj produkt matematike kot orodja za poljubno korist, kot pa produkt teoretičnih dognanj same matematike.

Obratno od induktivnega sklepanja je deduktivno sklepanje oz. dedukcija sklepanje s pomočjo definicij pojmov. Definicije pojmov so obrazložitve, kaj nek pojem sploh je s pomočjo navedbe njegovih bistvenih lastnosti in posebnosti. So take, da skušajo veljati za neko vrsto celote. Sklepanje znotraj te celote je posledično, v kolikor natančno upoštevamo definicijo, nujno pravilno, če je seveda sklep pravilen. Le tega se matematika vselej loteva. Matematična teorija skuša definirati pojme, ki jih štejemo kot matematična področja preučevanja – npr. količino, prostor, spremembo ipd. Matematično mišljenje, ki sledi iz omenjenih pojmov, se izkaže za zelo sistematično. Razlog za to je predvsem v tem, da se matematično mišljenje zmeraj omejuje na predpostavke iz definicij. Tako vemo, da je matematika omejena, saj zmeraj misli le znotraj sama sebe in to znotraj aksiomov, ki jih sama določa. Ali obstaja natanko ena vrsta aksiomov v matematiki? Odgovor na to vprašanje je ne, matematika pozna veliko različnih aksiomatičnih predpostavk, ki so v enem miselnem svetu (z eno vrsto aksiomov) smiselne, v drugem pa protislovne. Več o tem lahko razmislimo, ko pogledamo onkraj logično definiranih pojmov. Slednje je meja matematičnega mišljenja in šele s pomočjo filozofije lahko vidimo celoto kot tako.

3.3.4. Odmik od mitoloških prepričanj k logično-kritičnemu mišljenju

Bistven prehod iz mitološkega načina mišljenja k logično-kritičnemu je uspel Tales iz Mileta, efektivni začetnik zahodne filozofije in hkrati utemeljitelj matematičnega izreka, ki predstavlja začetek klasične matematike. »Pamfila pravi, da se je geometrije naučil od Egipčanov in da je prvi vrisal v krog pravokotni trikotnik. Za počelo (vseh) stvari je postavil vodo in rekel, da je svet oživljen in poln božanstev.«[8] Tales je torej trdil, da je pojem počela – »začetek« ali bistvo bivajočega prav naravni element – voda. S tem dejanjem je prešel iz »*mythosa*« k »*logosu*«. Vodo je vključil kot pojem, ki spada pod domeno »*logosa*« − to, kar je miselno oprijemljivo. Četudi se zdi Talesovo razmišljanje o počelu mitološkega značaja, ne moremo trditi, da gre za mit – Tales je namreč opisoval lastnosti vode, ki se zdijo intersubjektivno sprejemljive – torej jih lahko štejemo kot nekakšne predpostavke, ki so lahko le zmotno utemeljene – vendar je vanje težko podvomiti brez takšnih ali drugačnih znanstvenih predznanj. Tako je Tales začel zahodno filozofijo.

Kot rečeno, je Tales tudi utemeljitelj matematičnega izreka. Nekoč je opazil, da so pod poljubnim kotom vpada sončnih žarkov dolžine senc predmetov v posebnem razmerju z dolžino predmetov samih. To trditev je logično formaliziral in zapisal. Danes pravimo takim trditvam matematični izreki. Matematični izrek je vselej sestavljen kot logična struktura. Gre za trditev matematične teorije, ki je največkrat tipa bodisi »če-potem« bodisi »*A* natanko tedaj, ko *B*«. Vsa matematična teorija danes je zasnovana izrecno na podlagi izrekov in podobnih logičnih struktur. Ker je ta teorija logično utemeljena, hkrati pa je izključno deduktivno izpeljana, so njeni izsledki, ki sledijo iz matematičnih aksiomov vselej nujni. S tem je razvidno, da matematika vselej biva pod domeno »*logosa*« in nikdar pod domeno »*mythosa*«. Prav Tales pa je tisti, ki je na evropskem prostoru naredil prvi korak in tako spodbudil miselne potomce na področju tako matematike kot tudi filozofije. Vendar, četudi se strinjamo s Keplerjem, da je mogoče: »…vso naravo izraziti v simbolih geometrijske umetnosti,« ni moč misliti geometrijske umetnosti brez pomoči filozofije. Četudi ima R. Bacon prav, da: »Nobene znanosti ne moremo razumeti brez obvladovanja matematike«, zgoraj sem namreč pokazal, da je matematična dedukcija ali indukcija vir nujnih sodb, matematika ne more misliti sama sebe: »Seveda naravoslovci in družboslovci pogosto

[8] Predsokratiki. / izbral in prevedel, [predgovor in opombe napisal] Anton Sovrè. - [Reprint izd. iz leta 1946]. - V Ljubljani : Slovenska matica, 1988

reflektirajo svoje lastno početje. Toda zavedati se moramo, da dokler se npr. fizik ukvarja s čisto fizikalnimi problemi, v pravem pomenu besede ne razmišlja o fiziki, ko pa se prične spraševati o njej, denimo o načinih oblikovanja fizikalnih zakonov in o njihovi gotovosti, pa ni več fizik, temveč filozof.«[9]

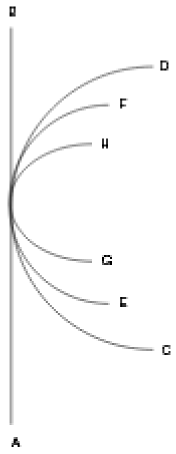
3.3.5. Parakonsistentna logika v matematiki po zgledu Nikolaja Kuzanskega

Ko poznamo pomen, vidike in lastnosti logike, je smiselno začeti razmišljati, kakšne so omejitve logike in kakšen je njen ontološki status. Ta premislek ima večji pomen v nadaljevanju. Mogoče je podvomiti v enotnost in stalnost logike, če pogledamo primer, kjer logična protislovja sovpadajo. V tem primeru govorimo o tako imenovani parakonsistentni logiki, ki se prav tako pojavlja pri nekaterih matematičnih povezavah. Mogoče je misliti celo onkraj aksioma neprotislovnosti ($A \neq B$). Primer omenjene parakonsistentne logike se pojavi pri Nikolaju Kuzanskemu, zgodnjerenesančnem mislecu. Kuzanski je skušal razumeti zgradbo stvarstva in mesto Boga v njem s pomočjo prispodobe krožnice oz. sfere. Zamislimo si omenjeno krožnico s premerom, obodom, središčem in tangento.

Če miselno povečamo krožnico v neskončnost; torej je krožnica neskončno velika, se zgodi, da obod krožnice sovpada s tangento, prav tako pa središče sovpada z obodom, torej tudi s tangento. »Premer krožnice je ravna črta, in obod krožnice je kriva črta, ki je večja od premera. Če torej krivulja postane manj ukrivljena v razmerju s povečanim obodom, postane tako minimalno ukrivljena in tako maksimalno izravnana.«[10] Kuzanski meni, da je vse to Bog, ki ima lastnosti, da je povsod in hkrati nikjer.

[9] FNM, Filozofija na maturi, 1997, Ljubljana.

[10] Uršič, Marko. Concidentia oppositorum pri Nikolaju Kuzanskem in sodobne parakonsistentne logike. V: Filozofski vestnik ISSN: 0353-4510.- Let. 18, št. 3 (1997), str. 67-83



Slika 1: Sovpadanje oboda s tangento

Enako se zgodi, če v mislih krožnico neskončno pomanjšamo, pomislimo, da je premer neskončno majhen, torej je razdalja med središčem in obodom neskončno majhna. Na ta način ponovno središče, premer in obod sovpadajo, tangenta pa prav tako, saj je tangenta pravokotna na premer. Izkaže se, da nasprotji neskončno velikega in neskončno malega sovpadata. Takšna logika se zdi protislovna, pa vendar je veljavna, ker so vključeni sklepi iz logičnega vidika popolnoma sprejemljivi. Kuzanski je s svojo filozofijo o neskončnosti na primeru te krožnice in z drugimi izjavami, ki jih je podajal, miselno vplival na utemeljitelje diferencialnega in integralnega računa. Oba namreč vključujeta pogled v neskončnih razsežnostih. Bistvo diferencialnega računa je matematična operacija, ki jo imenujemo odvod. Pove nam obnašanje matematične funkcije v poljubni točki. Bistvo integralnega računa pa je integral, vsota neskončno majhnih delov. Izkaže se, da sta ti dve navidez povsem tuji si operaciji ravno nasprotni, in da nasprotje ene porodi drugo. Ker je to dejstvo povsem proti človeški intuiciji, se zdi preprosto domnevanje o tej nasprotnosti protislovno. Logični dokaz tega, to je tako imenovani osnovni izrek diferencialnega računa, pa nam s pomočjo logike dokaže, da ti dve povsem kontrastni operaciji sovpadata. Tako vidimo, da logična resnica ni nujno omejena z nasprotji, ki bi bile vidne same po seboj. Le-te se namreč lahko izkažejo kot sovpadajoče, če je v ozadju ustrezna logika, ki pa je dosegljiva onkraj običajnih miselnih okvirov. Ali je torej logika res enotna? Premislek kaže pomen filozofije, ki seže onkraj meja tradicionalne aksiomatizacije logike.

3.3.6. Logicizem

Kot uvod v nadaljevanje naloge je smiselno premisliti pomen logicizma, ta kaže na mnogoterost pogledov znotraj matematike. V zgodovini so se razvile različne šole matematičnih disciplin. Le te pomenijo posebno vrsto filozofije, t.i. matematično filozofijo. To ni filozofija matematike kot take, temveč filozofija matematičnih problemov. Ena izmed takšnih disciplin, ki jo želim izpostaviti, je logicizem. Kot že samo ime navaja, je logicizem močno povezan z logiko. Trdi namreč, da je matematiko potrebno razgraditi na formalno logiko. Ali je v matematiki besedna vsebina matematičnih problemov odvečna? »Ker bi logika morala biti neodvisna od stvari, zadevajočih ontološki status, je bil projekt logicizma skladen z protiplatonsko atmosfero tistega časa.«[11] Prav Platonova filozofija sporoči pomembne vidike obsega in tudi omejitev matematike. Več o tem v nadaljevanju. » Jasno je, da če je formalno sklepanje tisto, ki ga želimo doseči, pridemo posledično do izjave, kot je zgornja, kjer ni omenjenih nobenih stvari ali lastnosti; to se zgodi ob želji, da ne zapravimo časa dokazovati določen primer, če lahko dokažemo stvar v splošnem.« [12]Russell je bil eden izmed matematikov, ki je zagovarjal vrsto logicizma. S tem je želel, kot rečeno, doseči razgradnjo matematike na logične izjave. Tako bi postala matematika bližje formalni logiki, in bi tako bila v abstraktnejši obliki. Ali mora logika res biti več kot le jedro matematičnih vsebin? Ideja logicizma ostaja odprto vprašanje. Morda se prav v tej mnogoterosti pogledov na to, kaj in kakšna je logika, kaže nujnost miselne odprtosti za vsebine, ki se ne skladajo nujno z ustaljenim prepričanjem nekega določenega horizonta mišljenja. Na nek način je to pot začrtal že Platon. Zatorej je smiselno, da vzamemo pod obzir prav tiste vidike, ki nam nudijo možnost za premislek, kako matematika biva v odnosu z logiko.

---

[11] [Online] Dostopno na: http://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/#Log

[12] Russell, Bertrand. Introduction to mathematical philosophy. New York : Dover Publications, 1993 (str. 1)

4. ONTOLOŠKA STRUKTURA MATEMATIČNIH BITNOSTI

4.1.PLATONSKI DUALIZEM KOT MODEL BIVANJA MATEMATIKE

4.1.1. »Vidni in miselni svet«

Vprašanja, ki vprašujejo po 'izvoru' matematike, so tesno povezana z razumevanjem ontološkega statusa matematičnih bitnosti. Ali matematika biva večno ali so pojmi le predmet naših misli? Kako torej bivajo matematični pojmi? Da lažje raziščemo to vprašanje, predpostavimo, da je matematika zgolj nekaj, kar je možno misliti in teoretično vsebinsko širiti. To lastnost, da je matematika predmet mišljenja, vendar ima svoj lasten obstoj, lahko opišemo s pridevnikom inteligibilno, nanašajoč se predvsem na Platonovo misel iz »druge plovbe«. Kaj vse torej je inteligibilno in kako matematika spada v ta »svet« večnih resnic? »Posamične stvari lahko vidimo, ne moremo si jih pa misliti, a ideje si lahko mislimo, ne moremo pa jih videti,«[13] Misel je mogoče razumeti s pomočjo prispodobe o daljici iz Platonove Države. Razdeliti bivajoče na dva »svetova«– popolnoma kontrastna kraja bivanja, to je ta miselni projekt. »Torej, kakor smo rekli, sta dve stvari. Ena vlada miselnemu svetu, druga pa vidnemu – nebu nočem reči, da ne bi zbudil videza besedne igre. Potemtakem obstajata – kajne – dva svetova: vidni in miselni«[14] in nadalje: »Zamisli si ju kot črto, ki je razdeljena v dva neenaka dela; razdeli potem ta dva dela še enkrat v enakem razmerju. Prvi (glavni) del predstavlja vidni svet, drugi (glavni) del pa miselni svet. En pododdelek vidnega sveta je v skladu z načelom o večji ali manjši jasnosti namenjen paslikam. S paslikami mislim predvsem sence predmetov in potem zrcalne podobe v vodi in na vseh trdnih, gladkih in sijočih stvareh ter podobnem. Me razumeš?«[15] Vse miselno je torej razdeljeno od vsega vidnega. Pojavi se vprašanje, kako je matematika v razmerju z miselnim in vidnim? Prav na primeru matematike in s tem mislim skupen pojem za aritmetiko in geometrijo, nadaljuje Platon: »Ti veš, da uporabljajo ljudje, ki se ukvarjajo z geometrijo, računanjem in podobnim, določene supozicije, namreč pojme, kot so: premica, krivulja, liki, tri vrste kotov in podobno. Te pojme uporabljajo tako, kakor da bi si bili o njih popolnoma na jasnem, in se jim ne zdi potrebno, da bi o tem dajali račun sebi in drugim, ker so pojmi vsem razumljivi. Izhajajoč od tod, dosežejo naposled cilj, ki ga postavijo svojemu raziskovanju.«[16] Prav takšen način

[13] Platon. Država. (1995). Ljubljana: Založba Mihelač. (str. 197-205)
[14] Prav tam.
[15] Prav tam.
[16] Prav tam.

mišljenja je značilen za matematiko in tudi druge teoretične znanosti. Razmišljanje o matematičnih pojmih, denimo geometrijskih likih, je običajno izvedeno s pomočjo podob – v našem mišljenju se ustvarja takšna ali drugačna vizualna predstava. Slike so zmeraj bližje materialnemu svetu, saj so povezane s človeško percepcijo. Poleg tega so močna vez med materialnim in inteligibilnim svetom, kajti ob njihovem proučevanju s pomočjo abstrahiranja materialnega spoznavamo pojme, ki jih mislimo, vendar po Platonu ne brez prapodob, ki jih s pomočjo spominjanja tvorimo v našem mišljenju. Slednje so seveda po Platonu večne in nespremenljive bitnosti. »In zdaj dalje! Čeprav si pomagajo z vidnimi liki in jih raziskujejo, pri tem ne mislijo na like, temveč na prapodobe, katerim so podobni; tako raziskujejo četverokotnik kot tak in njegovo diagonalo kot tako, a ne narisane, in podobno tudi drugo. Like, ki jih oblikujejo in rišejo in ki tudi ustvarjajo sence in zrcalne podobe v vodi, uporabljajo samo kot paslike in pri tem skušajo spoznati tiste prave, resnične prapodobe, ki jih je moč videti samo v duhu.«[17] Mnenje Platona torej nakaže, da je matematične resnice možno opisati kot prapodobe. Te prapodobe so matematične bitnosti, ki so umne in jih je tako mogoče skušati umeti s pomočjo paslik. V slikah lahko preučujemo lastnosti denimo geometrije.

4.1.2. Platonov nauk o idejah in pojmovni svet matematike

Po Platonu so ključne ideje, ki se v Platonovi razdelitvi sveta nahaja v inteligibilnem svetu, natančneje so ideje še abstraktnejše od pojmov. So zamisli, ki so umne, pa vendar nikoli definirane, saj bi kot take imele lastnosti pojmov. Možno jih je doumeti s pomočjo dialektike. Dialektika po Platonu pomeni neke vrste pogovor, pri katerem lahko z govorjeno besedo doumemo *logos* in s tem tudi ideje. Pojem ideje je ključen ravno v razumevanju omejitev logike in posledično tudi matematike.

» Pri tem je odločilno vprašanje, kako in zakaj je Platon prišel do nauka o idejah, saj bo šele od tu razvidno, kaj ta nauk sploh pomeni. Platonov nauk o idejah se opira na Sokratove uvide«. Ideja je po Platonu tisto, kar je neposredno povezano s tako imenovano resnico. »Platon izhaja iz prepričanja, ki ga deli s Sokratom, da resnica obstaja in da mora človek storiti vse, da bi se mu razkrila.« In nadaljuje: » Resnica pa lahko pomeni le razkritje tistega, kar je, saj se nebivajoče ne more razkriti, razen kolikor se nam nekaj bivajočega lahko pokaže kot nekaj nebivajočega, toda v tem primeru gre pravzaprav za prikritje oziroma »lažnost«

[17] Platon. Država. (1995). Ljubljana: Založba Mihelač. (str. 197-205)

tega bivajočega«. Tako je po Platonu tudi matematika taka, da so njene ideje povezane z resnico. Ideje pa je možno uvideti samo zato, ker deležijo na resnici, ki je v temelju teh idej večno bivajoča, še več, je nekako onkraj vsega bivajočega. Ideje so tiste, preko katerih je po Platonu možno iskati resnico. »Na ta način je duša »prisiljena iskati iz "hipotez", saj ji je "nehipotetični" začetek nedosegljiv. Toda "hipoteza" tu še ne pomeni samo nedokazane predpostavke ali verjetne trditve "*ypothesis*" pomeni to, kar drugemu že leži v temelju in je prek drugega vedno že prišlo na svetlo, tudi ko mi ljudje tega takoj in vedno posebej ne opazimo. Ko to opazimo, smo spoznali "*eidos*" – idejo stvari.« Prav pojem ideje je tisti, ki nam pomaga razumeti večne omejitve matematike. Četudi so matematične resnice večne, kakor meni Platon, so tudi omejeno dosegljive. Pojem ideje je namreč tisto, kar preseže pojmovni svet in je vselej možno zgolj uvideti, ne pa definirati. Primer: V matematiki se lahko dogovorimo, da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka 180 kotnih stopinj, toda zakaj pa ne bi predpostavili, da je vsota denimo 90? Takšen dvom je upravičen – matematični aksiomi so tisti, ki matematiko omejujejo, toda, ali jih je možno zamenjati? Seveda, obstajajo matematične teorije, ki so postavljene na drugih aksiomih. Geometrija je v zgodovini temeljila na delu Evklida, zato geometriji pravimo kar evklidska geometrija. V novem veku pa se je s spremembo Evklidovih aksiomov razvilo tudi nekaj neevklidskih geometrij, ki so prav tako matematične, kot je evklidska. Tako se je smiselno vprašati, ali je geometrija sploh enotna stvar, če so njene razlage tako različne? S pomočjo Platona je mogoče razumeti, da obstaja ideja geometrije, ki jo lahko uvidi matematik-filozof, razumejo pa jo vselej v nekem okviru predpostavljenih aksiomov. Ko se zavedamo koncepta ideje po Platonu, lahko sami uvidimo, da je matematika mnogotera po poteh mišljenja. Mislim, da šele filozofija omogoča odmik od pojmov, ki so ustaljeni v določenem miselnem sistemu, denimo evklidski geometriji, saj lahko s kritičnim in splošnim premislekom uvidimo, kako je pojmovni svet matematike mnogoter, vendar deleži v enosti tega, čemur pravimo geometrija ali splošneje matematika. Podobno velja tudi za ostale znanosti. Zgoraj sem pokazal, kako je logika skupno jedro matematike in filozofije, a vendar slednja omogoča mišljenje onkraj meja aksiomov posameznih miselnih področij. To sem pokazal tudi na primeru parakonsistentnih logik.

4.2. KRITIKA PITAGOREJSKE FILOZOFIJE POČELA – O OBŠIRNOSTI IN OMEJENOSTI MATEMATIČNE MISELNOSTI

4.2.1. Dvom v pitagorejsko filozofijo

V nadaljevanju bi želel pokazati, kako je mogoče kritizirati pitagorejsko filozofijo. Menim, da Pitagora ni uspel odmika od stališča, da je število počelo vseh stvari. To bi mu omogočil šele splošen filozofski premislek, ki ga je kasneje uspel Platon. V nalogi sem že omenil Talesa in njegovo razmišljanje o počelu. Počelo (*arhé*) lahko razumemo kot temelj ali večni izvor vsega bivajočega. S pomočjo Platona je mogoče zaključiti, da razmišljanje o počelu presega racionalna mišljenje. Po Platonu naj bi bili filozofi zmožni po dolgi poti dialektičnega mišljenja uvideti idejo počela, zanj idejo d/Dobrega, vendar lahko resnico *zremo*, ne moremo pa je definirati. Lahko namreč trdimo, da pitagorejci niso uspeli odmika od svojega prepričanja. Potrebno je namreč dvomiti v aksiomatizacijo, ki ni podprta s filozofskim premislekom, ki ne bi namerno spregledal miselnih vrzeli v teoriji.

4.2.2. Pitagorejski pomen sodih in lihih števil

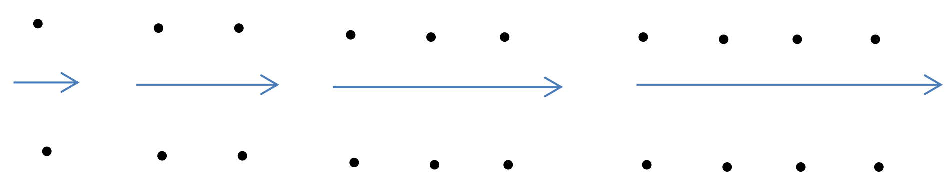
Pitagorejci so torej verjeli, da so števila počelo vseh stvari. Števila so pojmi, povezani z matematičnim preučevanjem količine. Količino poimenujemo kot eno izmed matematičnih bitnosti ali matematičnih biti. Očitno je, da je izjava, da je število počelo vseh stvari, izjava, ki opisuje bivanje matematičnega pojma, kakor so ga razumeli pitagorejci – torej gre za opis ontološke strukture pojma števila. »Pa tudi, ker so videli, da note in glasbeni akordi sestojijo iz števil; in slednjič, ker se jim je zdelo, da so vse ostale stvari v vsej resničnosti narejene po podobi števil in da so števila to, kar je prvo v vsej resničnosti, so mislili, da so prvine števila prvine vseh stvari in da je celotno vesolje harmonija in število.«[18] Pitagorejci so torej imeli (dobre) razloge, da so menili, da so števila počelo vseh stvari. Izkaže pa se, da je pitagorejski pojem števila bistveno drugačen od pojma števila danes, kar bo, kot bo kasneje dokazano, predstavljalo miselni problem. »Števila je mogoče razdeliti v dve vrsti, soda in liha (razen števila ena, ki je izjema, saj more porajati tako soda kot tudi liha števila; če pa dodamo lihemu številu ena, dobimo sodo, kar dokazuje, da ima število ena sposobnost porajati tako soda kot liha števila in je zatorej udeleženo v obeh naravah). Ker pa je, kot vemo, vsako stvar mogoče zvesti na število, je vsaka stvar bodisi izraz sodega bodisi lihega števila. Filolaj

[18] Giovanni Reale, Zgodovina antične filozofije. Studia humanitatis. Maribor: 2002. (str. 77 – 88)

pravi:“Število ima dve posebni lastnosti, lihost in sodost, tretja je mešanica obeh; sodolihost. Obstaja veliko sodih in lihih oblik in vsaka stvar jih razodeva v svoji notranjosti.”«[19] Zapisi pričajo, da je bil Filolaj eden izmed najzgodnejših Pitagorovih učencev, ki je objavljal spise o pitagorejski filozofiji. Bil je sodobnik Sokrata. Reale nadaljuje: »Vendar sodo in liho še nista poslednji prvini. Filolaj (ki izraža in privede do dovršitve pojmovanja, ki je bilo verjetno lastno že prvemu pitagorejstvu, če ne celo samemu Pitagoru) nam izrecno govori o neomejenem (ali brezmejnem ali neskončnem) ter o meji (ali zamejujočem ali omejujočem) kot najvišjih počelih vseh stvari.«[20] Pojem končnega in neskončnega je danes prav tako veliko bolje raziskan, kot je bil v času pitagorejcev. Prav omejitev na končnost je tista, ki pitagorejcem povzroča miselno vrzel v domnevah. Pitagorejci so namreč verjeli v tako imenovane prvine števila in med te so uvrščali harmonijo in (ne)omejenost. Za njih so namreč soda števila predstavljala neomejenost in nedoločenost, liha števila pa omejenost in določenost.

»Zato ne čudi, da so pitagorejci na podlagi nekaterih opažanj, ki jih bomo razjasnili pozneje, videli v sodih številih malodane izraz določene in določujoče prvine in da so znotraj števila obravnavali sodost in lihost prav kot ustreznici nedoločenega in določujočega.

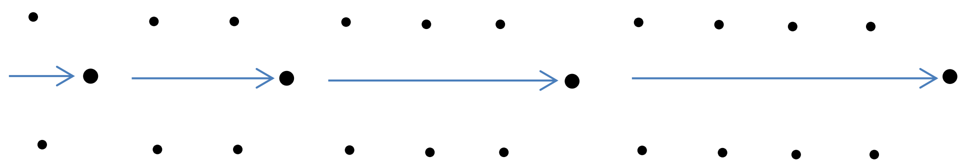
Ti izenačitvi sodo = neomejeno in liho = omejeno je mogoče dobro razložiti, če se vrnemo k prvotnemu, pitagorejcem lastnemu načinu predstavljanja števila: število so si predstavljali kot celoto geometrično razpostavljenih točk. Če si tako predstavljamo katero koli sodo število, je videti, da proces deljenja, ki ga predstavlja puščica, vse do neskončnosti nikakor ne zadene ob mejo:



Slika 2: Brezmejna soda števila

Nasprotno pa v vsakem lihem številu deljivost zadene ob mejno točko v prav tisti enoti, ki število naredi za liho, kot vidimo na skici:

[19] Giovanni Reale, Zgodovina antične filozofije. Studia humanitatis. Maribor: 2002. (str. 77 – 88)
[20] Prav tam.



Slika 3: Omejena liha števila

Za sklep: neomejeno in omejujoče sta prvi počeli; iz njiju izvirajo števila, ki so sinteza ene in druge prvine, vendar v osrčju te sinteze v sodem zaporedju neomejena prvina, v lihem zaporedju pa omejujoča prvina. Toda kot sinteza število še zmeraj predstavlja zauzdanje neomejenega z mejo in kot takšno torej more biti prvina, ki stvari omejuje in opredeljuje.«[21] Takšen je torej opis pitagorejske filozofije števila kot počela vseh stvari.

4.2.3. Pomen števnih števil

Pitagorejci so števila povezovali predvsem s pojmom števnosti. »Pitagorejci so si število predstavljali kot skupek kamenčkov ali pa so ga narisali kot množico točk, torej so ga hkrati videli kot lik; in ker so si predstavljali, da točke zavzemajo prostor, oziroma so si jih predstavljali kot mase, so na število gledali tudi kot na trdno telo. Zatorej je bil prehod od števila k likom, k stvarem, za ta preprosti in izvirni način popolnoma naraven.«[22] Kakor piše Reale je izraz »naraven način« primeren za splošni vidik antičnih Grkov na področju matematike. Izkaže se, da je pitagorejska filozofija o številih, sodosti, lihosti, omejenosti in neomejenosti nekoliko pomanjkljiva, vanjo je možno podvomiti. Da bi razumeli, kje se nahaja problematika pitagorejske ideje števila, je smiselno vzeti v obzir pojem količine. Količina je pojem, ki lahko pomeni enotnost, mnoštvo ali pa tudi nič od tega. Je torej lastnost, ki jo lahko pripišemo bivajočim stvarem. Število je podatek, ki enolično opiše količino. Pomemben je pojem naravnega števila, ki predstavlja edina števila, ki so jih pitagorejci poznali. »Zdi se, da v tem trenutku predstavljajo naravna števila tisto, kar je najlažje in najbližje v matematiki. Čeprav so znana, niso razumljena. Zelo malo ljudi se sreča z vprašanjem o tem, kaj je število ali »0« ali »1«. Ni težko opaziti da, začenši od 0, vse druga naravna števila lahko dosežemo z dodajanjem števila 1.« [23]Problem pitagorejcev je ravno v njihovi omejitvi na števna števila; natančneje naravna števila. Naravna števila niso edina števila, s katerimi je mogoče predstaviti količino. »Matematika je veda, ki je, ko začnemo od

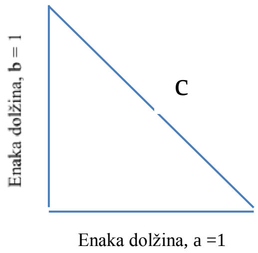
---

[21] Giovanni Reale, Zgodovina antične filozofije. Studia humanitatis. Maribor: 2002. (str. 77 – 88)
[22] Prav tam.
[23] Russell, Bertrand. Introduction to mathematical philosophy. New York : Dover Publications, 1993 (str. 1)

njenih najbolj znanih delov, lahko raziskana v eni izmed obeh smeri. Bližja smer je konstruktivna, nagiba se k postopoma naraščajoči kompleksnosti: od celih števil do ulomkov, realnih števil, od seštevanja k množenju, odvajanju, integriranju...«[24] Pitagorov problem je možno izzvati na sledeči način.

4.2.4. Matematični dokaz obstoja neštevnih števil

Ključna težava pitagorejcev je torej ignoriranje obstoja neštevnih števil, ki prav tako opisujejo količino. Zanimivo je, da je prav matematični dokaz tisti, ki pokaže, da je pogled pitagorejcev nekoliko pomanjkljiv. Denimo, da obstaja takšno številsko razmerje, ki predstavlja dolžino hipotenuze pravokotnega trikotnika, ki ima krajši stranici enako dolgi in to ravno za enoto (1).



Slika 4: Pravokotni trikotnik z enotskimi katetami

Predpostavimo, da ima hipotenuza – stranica nasproti pravemu kotu dolžino, ki jo je mogoče predstaviti s številom. To število je po Pitagori zmeraj predstavljivo kot razmerje dveh drugih naravnih števil. (Danes je to v matematiki poznano kot ulomek. Vendar stari Grki niso poznali ulomkov, poznali so idejo številskih razmerij.) Kot razmerje dveh števil je torej to število (dolžina stranice c) lahko bodisi razmerje dveh lihih števil ali sodega in lihega števila.

Nikakor pa ne more biti razmerje dveh sodih števil, saj je sodo število vedno deljivo z 2, tako bi obe števili v bistvu bili 'razširitev' nekega drugega razmerja na »večjo skalo«. Pitagora, natančneje njegov učenec, zapiše znan Pitagorov izrek: $a^2 + b^2 = c^2$.

[24] Russell, Bertrand. Introduction to mathematical philosophy. New York : Dover Publications, 1993 (str. 9 – 23)

Ta pravi, da sta ploščini kvadratov, ki ju oklepata krajši stranici (kateti) pravokotnega trikotnika enaki ploščini kvadrata, ki ga oklepa hipotenuza. V primeru tega trikotnika mora veljati:

$$1^2 + 1^2 = c^2$$
$$2 = c^2$$

Kvadrat števila c je torej ploščinsko velik natanko 2 enoti. Ob predpostavki, da je c dolžina hipotenuze pravokotnega trikotnika in Pitagorove hipoteze, da je vse v naravi predstavljivo s številom, natančneje številskimi razmerji, pišemo:

$$c = \frac{m}{n}$$

»m« ulomljeno z »n« pomeni številsko razmerje števil m in n, natančneje »m proti n« . Le – to razmerje predstavlja harmonijo, ki jo opisuje Pitagora. Če zapišemo hipotenuzo kot to razmerje, sledi v enačbi:

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$2n^2 = m^2$$

V tej zvezi je m sodo število, saj velja, da je kvadrat sodega števila nujno sodo. Število »m na kvadrat« je sodo, ker je – po tej zvezi - enako 2 krat »n na kvadrat«. To je sodo, saj je deljivo z 2 (na dva enaka dela). Kot tak je očitno m predstavljiv z izrazom 2k.

$$2n^2 = (2k)^2$$

$$2n^2 = 4k^2$$

Delimo s številom 2 na obeh straneh enakosti:

$$n^2 = 2k^2$$

Kvadrat števila n je sod, torej je tudi n sod, iz enakih razlogov kot pred nekaj koraki v primeru števila m. To pa je protislovje, saj začetna predpostavka določa, da nobeno številsko razmerje ne obstaja med dvema sodima številoma.

Tako je dokaz končan – Pitagorova domneva, da je vse predstavljivo z naravnimi števili, s tem, da bi bila števila skupni izvor vsega, je napačen. Vidimo lahko, da je pitagorejska ideja števila ohlapna. Napisan dokaz demonstrira obstoj števila, ki porodi količino – dolžino hipotenuze – trikotnika, le to pa ni mogoče predstaviti z naravnim številom *kamenčkov*. Števila, ki predstavljajo dolžine stranic takšnih trikotnikov, imenujemo iracionalna števila. Tovrstno ime niso dobila zastonj − to so števila, ki jih nikdar ni moč prešteti niti zapisati z razmerjem. Obstoj teh števil je Pitagora zanikal in tako ustvaril tako luknjo v matematiki kot tudi v filozofiji. Argument proti pitagorejskim načelom je torej obstoj teh števil. Takih števil, ki predstavljajo neštevne količine, je neskončno. Še več: izkaže se, da je neomejenost oz. neskončnost takih števil še bolj neskončna od neskončnosti števnih števil. Zamislimo si namreč količino števil, ki jih lahko preštejemo. Zamislimo si sedaj količino števil, ki jih dobimo, če vsako od prej omenjenih števil delimo med seboj neštetokrat, nato pa še neštetokrat sestavimo v pravokotne trikotnike, kakršen je bil tudi v zgornjem primeru. Razumno je možno zaključiti, da je slednjih števil več. Tem številom se v matematiki reče realna števila. Bistvo kritike, ki sem jo opisal, je dokaz, da je možno dvomiti v aksiomatizacijo, ki ni podprta s filozofskim premislekom. Zgoraj prikazani matematični dokaz, je hkrati miselni dokaz, da so pitagorejci imeli omejeno predstavo o številu. S pomočjo Platonovega premisleka in dosedanjih dognanj o mnogoterosti same logike lahko sklepamo, da je ideja števila – *arithmosa* pri pitagorejcih neupravičeno omejena zgolj z naravnimi števili. Tako je stabilnost argumentov pitagorejcev na nek način porušena. Ne moremo enačiti ideje počela z idejo števila, če ne uvidimo ideje števila. Vendarle, ker zapisi pitagorejcev sporočajo trditev, da je število zgolj tisto, kar je števno, pomeni to za nas, da lahko podvomimo v to prepričanje in skušamo s pomočjo matematike podpreti naš uvid ideje števila (po Platonu). S pomočjo matematičnega dokaza ne ustvarjamo mitoloških predpostavk, temveč uporabimo logiko in tako poskusimo vzpostaviti prepričanje, ki je trdnejše in intersubjektivno, vendar ob zavedanju, da zasluži vsako prepričanje, četudi trdno, kakor je matematično, kritičen preizkus in dvom.

5. INTERPRETACIJA REZULTATOV

5.1.ANALIZA HIPOTEZ

H1: Matematika predstavlja nasprotje mitološkemu načinu mišljenja.

Hipoteza potrjena. »*Mythos*« predstavlja vselej tisto, kar je predpostavljeno kot prispodoba in ima zgolj poljubno stopnjo verjetnosti. Matematika je veda, ki zmeraj terja nujnost.

H2: Teoretične resnice v matematiki (in drugih vedah) zajema pojem *logos*.

Hipoteza potrjena. Pojem *logosa* zajema vse tisto, kar ima nujno veljavnost, četudi ni prav vse v dosegu racionalnega uma. Logika je tisto udejanjenje *logosa*, ki omogoča človeku, da raziskuje *logos* in da skuša ločiti nujno resnico od zmotnih prepričanj. Prav to predstavlja med drugim ideja matematike.

H3: Logika igra ključen pomen v matematiki, sama pa ni popolnoma matematično determinirana**.**

Hipoteza potrjena. Logika je predstavljena v formalni in neformalni obliki. Formalizacija logike lahko vodi do matematičnih principov sklepanja, neformalna logika pa ostaja neodvisna od matematike. *Logos* je ključni pojem, ki pomaga razločiti ti dve obliki. Namreč, kar je zapisano s simboli in govorjeno z besedami lahko ima enako vrednost, kajti bistvo logike je intersubjektivnost, ki pa jo je zmožno doseči povsem brez matematičnih principov mišljenja ali simbolnih zapisov. Logiko je mogoče uporabiti v splošnejših vprašanjih, kjer jo uporablja filozofija.

H4: Matematična ali popolna indukcija sklepa zmeraj na nujnost in ne verjetnost.

Hipoteza potrjena. Matematična indukcija se razlikuje od običajne po tem, da je omejena na končno število členov, na katerih sklepamo. Tako sklepamo na množico, ki jo lahko razumemo v celoti, na ta način torej ne obstaja način, da se motimo, kar pa je značilnost navadnega induktivnega sklepanja, ki zmeraj sklepa zgolj na poljubno verjetnost.

H5: Znotraj matematike obstajajo matematične ideje, ki jih je možno zgolj uvideti.

Hipoteza potrjena. Po Platonu je mogoče razločiti med tistim, kar je vselej definirano in tistim, kar je možno zgolj uvideti in doumeti kot nekaj resničnega. Tako je denimo ideja geometrije onkraj vseh definicij, bistvo ideje geometrije pa omogoča, da matematiki s pomočjo aksiomov definirajo geometrijo na svojevrsten način. Tako poznamo na primer evklidske in neevklidske geometrije.

H6: S pomočjo matematike je mogoče razširiti pitagorejski pojem števila.

Hipoteza potrjena. Ob kritičnem premisleku o pitagorejski filozofiji opazimo, da le-ta upravlja s pojmom števila preozko. Možno je namreč z matematičnim dokazom pokazati, da tudi neštevna števila morejo obstajati. Vemo, da pitagorejci ne uvidijo obstoja neštevnih števil in tako omejijo svoje utemeljitve zgolj na naravna (števna) števila, kar pa lahko predstavlja miselno vrzel v njihovi filozofiji.

6. SKLEP

Snov mitologije predstavlja *mythos*, sredstvo utemeljevanja s pomočjo prispodobe. Tako je zmeraj vzpostavljen nivo verjetnosti, nikoli na nujnosti. Izkaže se, da matematika predstavlja odmik od »*mythosa*« in prehod v *»logos«*, ki je vsemu skupen in predstavlja tisto, kar je vselej nujno. Udejanjenje »*logosa*« imenujemo logika. Gre za način mišljenja, kjer je bistveno sklepanje. Matematična indukcija je prav poseben sklep Možno je opaziti, da je logika mnogotera. To opazimo pri filozofiji Nikolaja Kuzanskega, kjer nasprotja sovpadajo, kakor tudi pri določenih področjih v matematiki, zlasti v diferencialnem in integralnem računu. S pomočjo Platona je mogoče razumeti model bivanja matematičnih bitnosti. Matematična teorija sodi, po Platonu, v pojmovni svet, ki pa je omejen in ne doseže svet idej. Ideje predstavljajo pomembno vlogo v Platonovi filozofiji. Možno jih je zgolj uvideti in doumeti s pomočjo dialektike, kakor meni Platon.

Vse omenjene misli je omenjeno uporabiti za kritiko pitagorejske filozofije, ki postavi število kot počelo vseh stvari. Problem pitagorejske filozofije je ta, da se pitagorejci omejijo zgolj na števna oz. naravna števila. Tako zožijo svoj vidik zgolj na eno možno razlago pojma števila, po Platonu torej ne uvidijo ideje števila, kakor se je da uvideti s pomočjo obstoja neštevnih števil.

V celotnem procesu izdelave raziskovalne naloge sem spoznal, kako je razdeljen miselni svet matematike in kje se začnejo njegove meje. Proces izdelovanja naloge je bil miselno zame razsvetljujoč.

7. VIRI IN LITERATURA

HEIDEGGER, M. Uvod v metafiziko. Ljubljana: Slovenska matica, 1995.

PLATON. Država. Ljubljana: Založba Mihelač, 1995.

RUSSELL, Bertrand. Introduction to mathematical philosophy. New York : Dover Publications, 1993. ISBN 0-486-27724-0

REALE, Giovanni. Zgodovina antične filozofije. Ljubljana: Studia humanitatis, 2002. ISBN 961-6262-45-9 (zv. 1)

SOVRÉ, Anton. Predsokratiki. Ljubljana: Slovenska matica, 1988.

URŠIČ, Marko. Concidentia oppositorum pri Nikolaju Kuzanskem in sodobne parakonsistentne logike. V: Filozofski vestnik ISSN: 0353-4510.- Let. 18, št. 3 (1997)

ZORE, Franci. Obzorja grštva – Logos in bit v antični filozofiji. Ljubljana: Znanstveno in publicistično središče, 1997. ISBN 961-6014-93-5

[Online] Dostopno na: http://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/#Log (10.2.2014)

8. KAZALO SLIK

Slika 1: Sovpadanje oboda s tangento 18

Slika 2: Brezmejna soda števila 24

Slika 3: Omejena liha števila 25

Slika 4: Pravokotni trikotnik z enotskimi katetami........ 26 [25]

[25] Vse slike so avtorsko delo.