Mladi za napredek Maribora 2016

33. srečanje

PROBLEM UMETNOSTNE GALERIJE

MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: NEŽA URBAS

Mentor: BARBARA PEĆANAC

Šola: II. GIMNAZIJA MARIBOR

2016, Maribor

Mladi za napredek Maribora 2016

33. srečanje

PROBLEM UMETNOSTNE GALERIJE

MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

2016, Maribor

Povzetek:

V tej raziskovalni nalogi sem iskala rešitve problema, s katerim se srečujejo v galerijah ali drugih zgradbah, ki želijo zavarovati svoje prostore na najbolj učinkovit in ekonomičen način, torej z najmanjšim številom stražarjev ali varnostnih kamer. V matematiki je to splošen problem in se imenuje problem umetnostne galerije, pri katerem je potrebno poiskati najmanjše število točk, torej stražarjev, v poljubnem mnogokotniku, ki predstavlja zgradbo, od koder so vidne vse točke v mnogokotniku. Stražar, torej poljubna točka v mnogokotniku, vidi drugo točko, če ju povezuje daljica, ki ne seka stranic mnogokotnika. Namen raziskovalne naloge je torej poiskati najmanjše število stražarjev potrebnih za celoten pregled zgradbe ter ugotoviti, kakšne so metode reševanja problema. Prav tako je namen ugotoviti, kako na rešitve problema vpliva oblika mnogokotnika in če se metode reševanja razlikujejo pri različnih poligonih, kot so poljubni mnogokotniki, pravokotniki in mnogokotniki z luknjami.

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorici za potrpežljivo in strokovno vodenje in čas, ki ga je namenila za pomoč pri ustvarjanju raziskovalne naloge.

Kazalo

1. UVOD

V tej raziskovalni nalogi sem raziskovala Problem umetnostne galerije. To je problem vidljivosti, s katerim se ukvarjajo v računalniški geometriji. To je veja v računalništvu, kjer se geometrijski problemi rešujejo s pisanjem različnih algoritmov s pomočjo računalniških programov. Vidljivost pa je pojav v matematiki, kadar sta dve točki v večkotniku v takšnem razmerju, da daljica med njima ne seka nobene od stranic večkotnika.

Teorem umetnostne galerije se je razvil iz problema o postavitvi najmanjšega števila stražarjev ali varnostnih kamer v galeriji ali muzeju. S problemom se je prvi ukvarjal ameriški matematik Victor Klee leta 1973. Teorem pa je kasneje razvil češki matematik Vaclav Chvatal, zato se teorem tudi imenuje Chvatalov teorem umetnostne galerije, ki predstavlja rešitev na vprašanje, kaj je najmanjše število točk v večkotniku, od katerih so vidne vse ostale točke večkotnika. Kasneje je matematik Fisk našel enostavnejši dokaz Chvatalovega teorema in ta dokaz bo tudi predstavljen v tej raziskovalni nalogi. Problem je raziskovalo tudi veliko drugih matematikov in računalničarjev, ki so problem razširili in našli rešitve za veliko različnih oblik galerij.

Moje **raziskovalno vprašanje** je torej, kaj je rešitev problema umetnostne galerije, kaj so metode iskanja rešitve, kako na rešite vpliva oblika večkotnika in kakšne so omejitve rešitev problema umetnostne galerije.

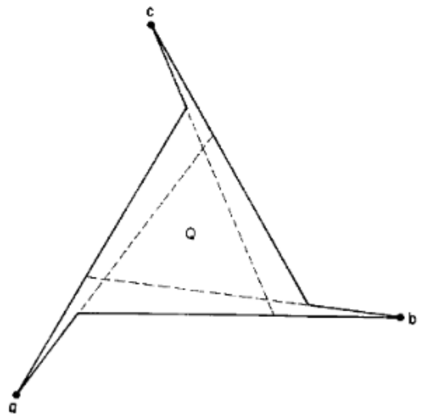
2. PROBLEM UMETNOSTNE GALERIJE

Na začetku bom predstavila besedišče in spremenljivke, ki jih bom uporabljala skozi celotno raziskovalno nalogo (O'Rourke, 1987).

Najprej bom definirala večkotnik oziroma poligon P. Poligon je množica točk v dve-dimenzionalni ravnini, ki so obdane z daljicami, ki so povezane v ogliščih. Večkotnik je torej množica n oglišč $v_1, v_2, \ldots v_n$ in n stranic $v_1v_2, v_2v_3, \ldots\ v_{n-1}v_n$. Množica vseh oglišč in strani v P bo označena z δP.

Zdaj bom predstavila tudi točki $x \in P$ in $y \in P$, ki sta druga drugi vidni če in samo če je daljica xy podmnožica δP. Funkcija g(n) predstavlja število vseh stražarjev, ki so zmeraj zadostni in včasih potrebni, da zavarujejo notranjost celotnega prostora.

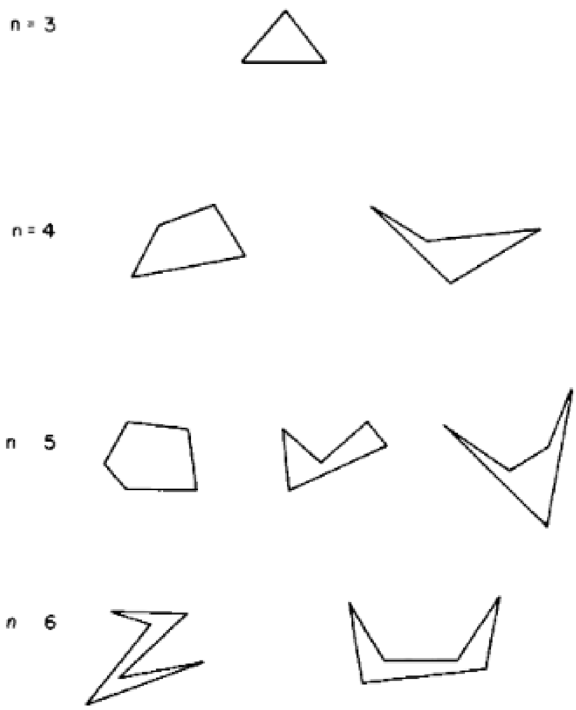
Slika 1 predstavlja primer poljubnega poligona s stražarji postavljenimi na oglišča a, b in c. Namen te slike je, da se razjasni, da morajo stražarji videti vse točke v prostoru. Vendar v primeru tega večkotnika na Sliki 1, imajo stražarji pregled le nad vsemi stranicami, ne pa tudi nad notranjostjo prostora, torej bi s tat z lahkoto skril v mrtvi kot stražarja, v notranjosti prostora. To pomeni, da ni pogoj, da do vidne vse stene v prostoru in tako morda razstavljene slike, da bi bila soba popolnoma zavarovana.



Slika 1: Stražarji a, b in c opazujejo vse stene prostora, s pogledom pa ne pokrijejo tudi notranjosti sobe. (O'Rourke, 1987, str. 4).

Enostavni primeri:

Slika 2 predstavlja primere večkotnikov z oglišči $n \leq 6$. Očitno je, da trikotna oblika galerije potrebuje le enega stražarja, torej je g(3) = 1. Večkotnik z $n = 4$ ima le dve možni obliki, s konveksnimi ali ne konveksnimi oglišči, in za obe obliki je potreben le en stražar, g(4) = 1 (Slika 2). Večkotnik z $n = 5$ oglišč ima tri možne oblike, z nič, enim ali dvema konveksnima ogliščema (Slika 2), in tudi vse te oblike potrebujejo le enega stražarja, da pokrije celoten prostor, g(5) = 1. Nekoliko drugače je za večkotnik z $n = 6$ oglišči, saj so za stražo šestkotnika z dvema konveksnima ogliščema, kot to prikazuje Slika 2, potrebna dva stražarja (O'Rourke, 1987, str. 2).



Slika 2: Poligoni z n≤6 oglišči (O'Rourke, 1987, str. 3).

2.1 TRIANGULACIJA VEČKOTNIKOV

Triangulacija mnogokotnikov je eden izmed najpomembnejših algoritmov v računalniški geometriji. Triangulacija je razdelitev večkotnikov na trikotnike.

S triangulacijskim izrekom je dokazano, da je triangulacija zares možna. Izrek pravi, da je večkotnik z n oglišči lahko razdeljen z $n - 3$ diagonalami v $n - 2$ trikotnike, ker je $n \geq 3$ (O'Rourke, 1987, str. 12).

Dokaz je bil najden s pomočjo indukcije (O'Rourke, 1987, str. 12):

Predstavimo večkotnik P s tremi zaporednimi oglišči v_1, v_2, v_3 in številom oglišč $n \geq 4$. Trditev je očitno resnična za $n = 3$, saj je to trikotnik, ki z diagonalami ne more biti razdeljen v še dodatne trikotnike.

Predpostavimo, da je oglišče v_2 konveksno oglišče. To pomeni, da je notranji kot med stranicama, ki se dotikata v v_2 večji od 180°. Nato želim poiskati diagonalo d. Če daljica v_1v_3 ne seka δP, potem je $v_1v_3 = d$. Večkotnik je posledično razdeljen na dva nova večkotnika P_1 in P_2 z diagonalo $v_1v_3 = d$. Če daljica v_1v_3 seka δP, potem ima večkotnik P vsaj še eno drugo oglišče x in če je to oglišče najbližje v_2 potem je $d = v_1x$. Večkotnik je v obeh primerih razdalje na dva nova večkotnika P_1 in P_2 z diagonalo d.

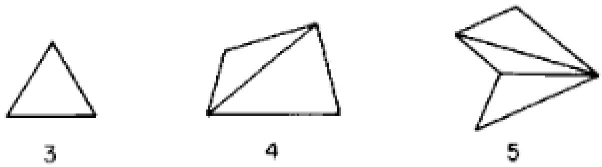
Če obstaja P_i in ima n_i oglišč in je $i = 1{,}2$, potem je $n_1 + n_2 = n + 2$, ker dva večkotnika delita dva oglišča in sta oba oglišča všteta pri obeh poligonih. Posledično, $n_i \geq 3$ $(i = 1, 2)$, torej, $n_i < n$, $i = 1{,}2$. To vodi do zaključka, da ima vsak večkotnik $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$ trikotnik in $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$ diagonal po triangulaciji.

Vsak graf je lahko obarvan s tremi barvami po triangulaciji, vendar bo to predstavljeno kasneje, ko bo opisan Fiskov dokaz problema umetnostne galerije, saj je obarvanje poligona pomemben del njegovega dokaza.

2.2 CHVATALOV PROBLEM UMETNOSTNE GALERIJE

Chvatalov teorem umetnostne galerije pravi, da je število stražarjev, ki so zmeraj zadostni in včasih potrebni za popoln pregled notranjosti prostora $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$[1]. Vendar je potrebno opozoriti, da $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ne pomeni, da so lahko stražarji postavljeni na vsako tretje oglišče v večkotniku (O'Rourke, 1987, str. 6).

Chvatal je trdil, da je s triangulacijo večkotnik razdeljen na g(n) ≤ $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ trikotnikov, ki so vsi postavljeni v skupno izhodišče oziroma si delijo eno oglišče, kjer je $n \geq 6$, saj je za $n = 3, 4$ or 5 možna le triangulacija iz enega oglišča (Slika 3).



Slika 3: Triangulacija poligona na trikotnike iz istega oglišča in je n = 3, 4 in 5 (O'Rourke, 1987, str. 6).

Teorem je bil dokazan z indukcijo in prvi korak dokaza je bil odstranitev dela večkotnika po triangulaciji, saj obstaja diagonala, ki odreže stran eno od oglišč in n samo za 1. V drugem koraku je uporabil indukcijo in v tretjem dodal nazaj odstranjen del večkotnika. Ampak je to sledilo v $g(n) + 1$, torej bi moralo število oglišč n biti zmanjšano vsaj za 3 (O'Rourke, 1987), zato da bi formula $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ bila manj oziroma enako kot g(n). To je pomenilo, da je potrebno poiskati diagonalo, ki odreže 4, 5 ali 6 stranic (O'Rourke, 1987, str. 6).

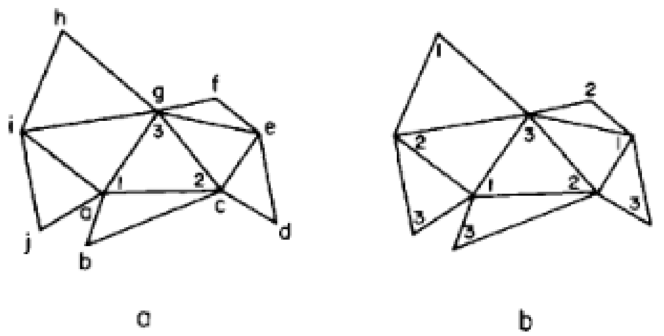
Chvatalov dokaz je zelo kompleksen in presega moje znanje in razumevanje, zato je v tej raziskovalni nalogi predstavljen le Fiskov dokaz.

---

[1] Funkcija spodnji celi del, ki število med oklepaji zaokroži na navzdol na najbližje celo število.

2.3 FISKOV DOKAZ

Enostavnejši in krajši dokaz je razvil matematik Fisk nekaj let kasneje za Chvatalovim dokazom (O'Rourke, 1987, str. 4-6). Njegov prvi korak v dokazovanju je bila triangulacija večkotnika, drugi korak pa obarvanje oglišč večkotnika s tremi različnimi barvami. To pomeni da je vsako oglišče dobilo eno izmed treh barv, vendar pri barvanju velja pravilo, da nobeno sosednje oglišče ne sme imeti iste barve. To bomo predstavili na primeru, vendar bomo namesto barv uporabljali številke 1, 2 in 3, kot to vidimo na Sliki 4.



Slika 4: Označevanje oglišč s tremi različnimi številkami (O'Rourke, 1987, str. 5).

Prva tri oglišča so po triangulaciji poljubno izbrana in so označena z 1, 2 in 3. Ko bomo oštevilčevali tudi druga oglišča moramo upoštevati pravilo, da nobena oglišča, ki so med seboj povezana s stranico večkotnika ali diagonalo večkotnika, ne smejo biti oštevilčena enako, in da se nobeno število ne sme pojaviti več kot $\frac{1}{3}$ časa. Razlog za to je, ker je število vseh oglišč n in če označimo, kolikokrat se pojavijo številke 1, 2, 3 z a, b in c, po istem vrstnem redu, potem velja, da $a + b + c = n$. Vendar če bi se ena številka pojavila več kot $\frac{1}{3}$ časa, potem bi bilo število oglišč v večkotniku večje od n.

Če se potem osredotočimo na številko na ogliščih, ki se pojavi najmanjkrat, opazimo, da če na ta oglišča postavimo stražarje, bodo potem vsi deli galerije zavarovani. To je jasno zato, ker je v vsakem trikotniku triangulacije vsaj eno oglišče bilo obarvano s to barvo in vsak trikotnik potrebuje le enega stražarja, zato so iz teh oglišč vidne vse točke v večkotniku. Prav tako pa je jasno, da se ta številka ne bo pojavila več kot $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ krat (O'Rourke, 1987, str. 6). Tako bo pokrita celotna notranjost sobe s stražarji. Tako Chvalatov kot Fiskov dokaz veljata le za ogliščne stražarje, saj je barvanje večkotnika po triangulaciji s tremi barvami možno le na ogliščih. Število stražarjev potrebnih za zaščito prostora bi se še celo zmanjšalo, če bi lahko bili postavljeni kjerkoli v prostoru, vendar razumljivega dokaza za to nisem našla.

3. GALERIJE RAZLIČNIH OBLIK

3.1 PRAVOKOTNA GALERIJA

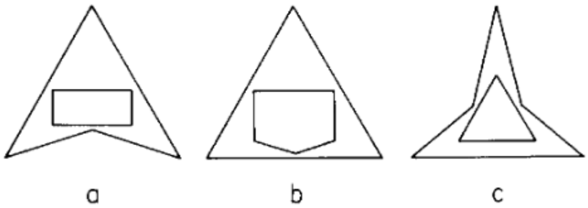
Do zdaj smo pogledali rešitve problema umetnostne galerije le za poljubne oblike večkotnikov oziroma zgradb in prostorov. Vendar so prostori lahko različnih oblik in zelo pogosto so pravokotni, zato bomo zdaj pogledali primer, kakšne so rešitve problema za sobe, kjer so koti med stenami 90° ali 270°. Rešitev, ki je bila najdena na podlagi lastnosti pravokotnih večkotnikov, se rahlo razlikuje od rešitve za poljubne večkotnike.

Pravokotni večkotniki so večkotniki, katerih sosednje stene so pravokotne druga na drugo. Število stražarjev, ki so potrebni za pregled pravokotne oblike sobe, je $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. To so dokazali matematiki Kahn, Klawe in Kleitman leta 1983, s pomočjo dejstva, da so lahko pravokotni večkotniki razdeljeni na konveksne štirikotnike – kvadrilateralizacija. Za postopkom kvadrilateralizacije, je bila uporabljena metoda barvanja oglišč pravokotnega večkotnika s štirimi različnimi barvami. Vsako oglišče prvega štirikotnika po kvadrilateralizaciji je pobarvano z eno od štirih barv, v štirikotniku, se ena barva ne sme ponoviti. Isti postopek se ponovi za vse ostale štirikotnike, na katere je razdeljen poligon. Oglišča, ki so obarvana z barvo, ki se najmanjkrat ponovi, so točke na katerih lahko stojijo stražarji in imajo celoten pregled po prostoru. Ker teh oglišč ne more biti nikoli več kot $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$, je torej izrek za pravokotne večkratnike resničen. Število stražarjev, potrebnih za zaščito prostora, je manjše za pravokotne večkotnike, kot pa poljubne večkotnike (O'Rourke, 1987, str. 46).

3.2 GALERIJA Z LUKNJAMI

Včasih so prostori veliko zahtevnejših oblik in pogled ni zakrit samo zaradi različnih kotov med stenami. Včasih so lahko ovire večji objekti postavljeni v sredino prostora, kot so omare ali velike instalacije v galerijah ali pa razni stebri, ki držijo strop. Stražar zaradi teh objektov ne vidi prostora za njimi, zato je to nov problem, ki se ga mora rešiti pri problemu umetnostne galerije.

Objekte, ki zakrivajo pogled stražarjem, si lahko matematično predstavljamo kot večkotnike z luknjami. Poligon P_1 ima luknjo, ko je znotraj njega še en poligon P_2 in se stranice obeh poligonov ne sekajo.



Slika 5: Primeri večkotnikov z eno luknjo (O'Rourke, Chapter 5: 1987, str. 128).

Poligoni z luknjami so lahko prav tako razdeljeni na trikotnike.

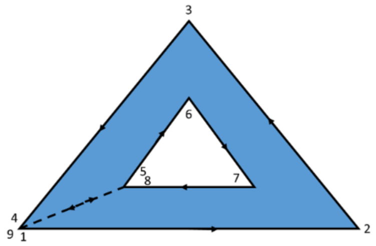
<u>Dokaz z indukcijo:</u>

Imamo poligon P z n oglišči in h luknjami. Kot smo videli prej, ko je h = 0 izrek je resničen, večkotnik je lahko trianguliran. Oglišče v_2 je konveksno oglišče z v_1 in v_3 sosednjima ogliščema. Potem je $d = v_2x$ notranja diagonala, ki povezuje v_2 z najbližjim ogliščem. Če je druga točka d oglišče notranjega poligona, torej luknje, potem diagonala poveča n za 2 in d zmanjša za 1. Če je a druga točka oglišče zunanjega poligona, sta dva nova poligona ustvarjena, ki imata oba manjše število oglišč kot prvoten večkotnik

Število lukenj v večkotniku vpliva na število trikotnikov po triangulaciji. Novo število trikotnikov je: $t = n + 2h - 2$.

Zunanji poligon P ima n_o število oglišč in i-ta luknja ima n_i oglišč, torej je skupno število oglišč v poligonu P $n = n_0 + n_1 + \cdots + n_h$. Vsota notranjih kotov v poligonu P je $(n_0 - 2) * 180°$ in zunanjih kotov je $(n_i + 2) * 180°$. To pomeni, da je $180° * [(n_0 - 2) + (n_1 + 2) + \cdots + (n_h + 2)] = 180° * t$ in iz tega sledi, da je število trikotnikov $t = n + 2h - 2$ (O'Rourke, Chapter 5: 1987, p. 125-128).

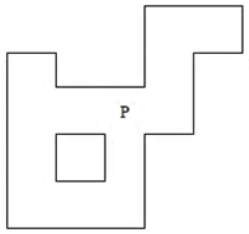
Matematik O'Rourke je leta 1982 trdil, da za poligon z n oglišči h luknjami, število stražarjev, ki so potrebni za pregled prostora je $\left\lfloor \frac{n+2h}{3} \right\rfloor$. To rešitev je našel tako, da je odstranil luknje s prerezom poligona po diagonali, ki povezuje oglišče zunanjega in notranjega večkotnika (Slika 6). Tako dobimo nov večkotnik ki ima $h-1$ lukenj in hkrati dva nova oglišča. Prerez mora vedno voditi do enega poligona brez notranjih večkotnikov. Z vsakim prerezom po diagonali med oglišči zunanjega in notranjega večkotnika in posledični odtranitvi luknje, se pojavita dva nova oglišča, zato je novo število oglišč $n+2h$. Iz tega sledi, da je število stražarjev potrebnih za pregled prostora $\left\lfloor\frac{n+2h}{3}\right\rfloor$ (Żylinski, 2006, str. 1-2).



Slika 6: Prerez večkotnika z luknjo od oglišča zunanjega poligona do oglišča notranjega poligona. (Brundritt, 2013).

3.3 PRAVOKOTNA GALERIJA Z LUKNJAMI

Zdaj pa poglejmo še problem umetnostne galerije za pravokotne večkotnike z luknjami, torej ima soba objekte, ki stražarju zakrivajo pogled (Slika 7). Kot v primeru poljubnih poligonov in pravokotnih poligonov brez lukenj, se končna formula za izračun števila stražarjev, potrebnih za pregled prostora, nekoliko razlikuje. Podoben dokaz kot pri prejšnjih večkotnikih je tudi za pravokotne večkotnike z luknjami. Rešitev problema umetnostne galerije za takšne prostore je $\left\lfloor\frac{n+2h}{4}\right\rfloor$ (O'Rourke, Chapter 5: 1987, str. 140-145).

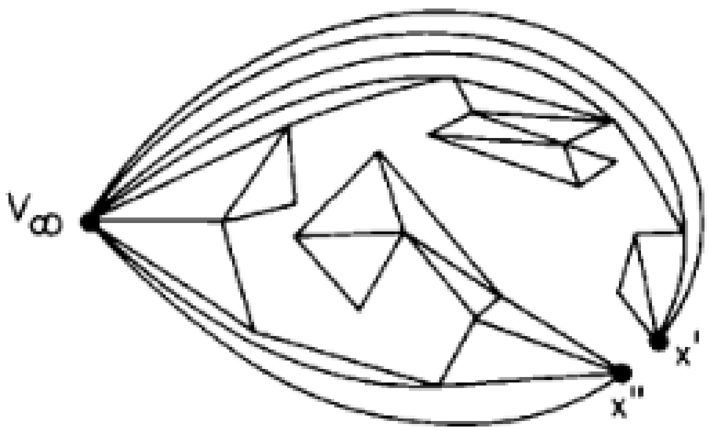


Slika 7: Pravokotni večkotnik z luknjo (Pape, Vasilev, 2012).

3.4 PROBLEM TRDNJAVE

Do zdaj smo se srečevali le s problemom iskanja stražarjev, ki opazujejo notranjost prostorov. Razširitev tega problema pa je, da se ne osredotočimo samo na zavarovanje notranjih prostorov, ampak tudi zunanjosti zgradbe, saj je tako, na primer, veliko večja površina opazovana in je lažje ujeti tatu. Predstavljajmo si problem trdnjave. Stražarji so lahko postavljeni na zidu in imajo pregled tako nad notranjostjo, ki jo obdaja zid, in zunanjostjo. Koliko stražarjev je torej potrebnih, da sta zavarovana in notranjost in zunanjost trdnjave?

O'Rourke in Wood sta leta 1983 dokazala, da je število stražarjev, ki je vedno zadostno in včasih potrebno za pregled prostora, $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$. Tudi dokaz te rešitve je bil izpeljan na podoben način kot prejšnji primeri. Sprva moramo triangulirati zunanjost večkotnika, kar nam da nov graf P' z n oglišči. Predpostavimo, da obstaja novo oglišče v_∞ zunaj poligona, ki je postavljeno tako daleč stran, da je sosednje vsakemu oglišči poligona. Posledično ima nov graf $n+1$ oglišč. Nato vzamemo enega izmed oglišč x in ga razdelimo na x'in x'', tako da je poligon še zmeraj v isti ravnini in vse povezave z x ostanejo z novimi oglišči x'in x'' kot je prikazano na Sliki 10.



Slika 9: Triangulacija zunanjosti poligona in postavitev novih oglišč x', x'' in v_∞ (O'Rourke, Chapter 6: 1987, str. 148).

Poligon ima zdaj $n+2$ oglišč in ga trianguliramo, torej so lahko oglišča pobarvana s tremi barvami, na isti način kot smo to naredili v prejšnjih primerih. Število oglišč, katerih barva se najmanjkrat ponovi je na podlagi dokazov, ki so opisano prej v raziskovalni nalogi, $\left\lfloor\frac{n+2}{3}\right\rfloor$. Vendar so stražarji lahko postavljeni na ta oglišča samo v primeru, če v_∞ ni obarvan s to barvo, saj je $\left\lfloor\frac{n+2}{3}\right\rfloor \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$. To pa ni res, če je v_∞ pobarvan s to barvo, ker v_∞ ni oglišče prvotnega poligona in nanj ne more biti postavljen stražar.. Če so a, b in c števila, ki predstavljajo, kolikokrat se neka barva ponovi, potem je $a \leq b \leq c$ in $a + b + c = n + 2$. $a \geq 1$ zato, $b + c = n + 1$ in iz tega sledi, da je $b \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Torej, lahko zaključimo, da je število stražarjev potrebnih za pregled zunanjosti in notranjosti zgradbe $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ (O'Rourke, Chapter 6, 1987, str. 146-148).

4. ZAKLJUČEK

V tej raziskovalni nalogi smo se osredotočili na problem umetnostne galerije. Cilj iskanja rešitve tega problema je, poiskati najmanjše število stražarjev potrebnih v prostoru, da imajo pregled nad vsako točko v sobi. Prvi je našel to število matematik Klee, ki je trdil, da je rešitev problema $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$. Njegova ugotovitev je bila kasneje dokazana z indukcijo. Prvi korak dokaza je triangulacija, pri kateri je večkotnik razdeljen na trikotnike. Drugi korak je obarvanje oglišč večkotnika s tremi različnimi barvami, tako da ima vsak trikotnik iz triangulacije oglišča pobarvana z vsemi tremi barvami. Oglišča, na katerih se specifična barva ponovi najmanjkrat, so točke, od koder so vidne vse ostale točke večkotnika. Na teh točkah so potem lahko postavljeni stražarji.

Problem so kasneje reševali tudi za različne druge oblike večkotnikov, kot so pravokotni večkotniki, večkotniki z luknjami ali pravokotnimi večkotniki z luknjami. Končna formula za izračun najmanjšega števila stražarjev potrebnih za zaščito prostora se je razlikovala pri različnih oblikah večkotnikov. Tako so ugotovili, da je rešitev problema odvisna od oblike poligona, vendar kljub temu, je bila metoda iskanja števila oziroma dokazovanje rešitve, zmeraj bila ista.

Za pravokotne večkotnike je prvi korak dokazovanja bila razdelitev večkotnika na štirikotnik, drugi korak pa tehnika barvanja oglišč s štirim različnimi barvami. Oglišča z barvo, ki se najmanjkrat ponovi, so točke od koder lahko stražarji oziroma varnostne kamere vidijo celoten prostor.

Ugotovitve tega raziskovanja so torej, da obstaja formula, s katero lahko izračunamo najmanjše število stražarjev, ki so potrebni, da je notranjost prostora popolnoma zavarovana. Vendar se formula spreminja v odvisnosti od oblike večkotnika. Za poljubne večkotnike je rešitev problema g(n) = $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, za pravokotne večkotnike g(n) = $\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$, večkotnike z luknjami g(n) =$\left\lfloor\frac{n+2h}{3}\right\rfloor$, in za pravokotne večkotnike z luknjami g(n) = $\left\lfloor\frac{n+2h}{4}\right\rfloor$. Metode dokazovanja teh rešitev se sicer ne razlikujejo, edina razlika je le v delitvi večkotnikov na večkotnike z $n = 3$ in $n = 4$, torej na trikotnike in štirikotnike. Poljubni poligoni se delijo z triangulacijo, pravokotni poligoni pa z kvadrilateralizacijo.

Nisem pa raziskovala le, koliko stražarjev je potrebnih za popoln pregled nad notranjostjo prostorov, ampak sem problem razširila in razmislila, kako se rešitve problema raziskujejo, ko želimo zavarovati tudi zunanjost zgradbe. Raziskovala sem torej kakšna naj bo postavitev stražarjev v trdnjavi, kjer imajo le-ti pregled ne samo nad notranjostjo stavbe ampak tudi zunanjostjo. Rešitev, ki sem jo našla je bila $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ število stražarjev, ki so potrebni, da je zavarovana tako notranjost kot zunanjost zgradbe.

Najdene rešitve problema umetnostne galerije pa imajo tudi nekaj pomanjkljivosti in omejitev. Že od začetka je bilo predpostavljeno, da da je stražarjev zorni kot 360°, kar je nemogoče za človeško oko. Isti zorni kot bi veljal tudi v primeru varnostnih kamer, vendar so tudi takšne kamere zelo redke. Prav tako pa je bilo predpostavljeno, da so stražarji stacionirani, torej se nimajo možnosti premikati po prostoru. Če bi bilo upoštevano, da so stražarji mobilni, bi rešitev problema bila veliko zahtevnejša, saj bi v tem primeru morali upoštevati hitrost stražarjeve hoje in to, da se s premikanjem po prostoru zmeraj ustvari del sobe, ki je zakrit za stražarja. To bi bilo zanimivo raziskovalno vprašanje za nadaljnje raziskovanje, vendar bi bilo preveč obsežno in zahtevno za to raziskovalno nalogo, v kateri smo se osredotočili le na stacionarne stražarje.

Še ena omejitev je, da kljub temu da je očitno, da so stražarji lahko postavljeni kjerkoli v prostoru, noben dokazne najde dejanske rešitve za poljubno postavitev v prostoru, ampak samo za ogliščne stražarje. Rešitev problema za ogliščne stražarje sicer predstavlja zmeraj zadostno število stražarjev, potrebnih za pregled prostora, vendar je cilj problema najti najmanjše možno število, da bi lahko na najbolj učinkovit in ekonomičen način zavarovali stavbo.

Problem umetnostne galerije je zelo zanimiva tema raziskovanja, še posebej, ker je zelo vsakdanji primer, s katerim se srečujemo kadarkoli želimo zavarovati razne objekte v zgradbah, kot so slike v galerijah, pomembni zgodovinski predmeti hranjeni v muzejih ali različna tehnologija v podjetjih. Veliko matematikov se je že ukvarjalo s tem problemom in iskalo rešitve, in veliko virov sem našla na to temo, vendar je še zmeraj ostalo nekaj vprašanj neodgovorjenih, kot je, na primer, kako bi se našla formula, če bi imeli možnost stražarji stati na katerikoli točki v prostoru. Za nadaljnje raziskovanje bi bilo torej zelo zanimivo raziskati še več o problemu umetnostne galerije, poiskati več primerov, reševati problem v resničnih zgradbah ter tako poiskati vse omejitve, do katerih pride zaradi posploševanja problema.

5. VIRI IN LITERATURA

American Mathematical Society. Diagonals: Part II. Povzeto 13. novembra 2015, 18:30, po http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-gallery3.

Bogomolny, A. (2015). Chvatal's Art Gallery Theorem from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. Retrieved 13 November 2015, 18:00, from http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/Chvatal.shtml.

Brundritt, R. (2013). Complex Polygons in Bing Maps. Povzeto 14. novembra 2015, 18:00, po http://blogs.msdn.com/b/rbrundritt/archive/2013/11/11/complex-polygons-in-bing-maps.aspx.

Do, N. (2015). Mathellaneous: Art Gallery Theorems. Povzeto 13. novembra 2015, 16.00, po http://www.math.cornell.edu/~web401/mark.artgallery.pdf.

Kandič, M. (2006). Problem umetnostne galerije. Povzeto 11. novembra 2015, 16.00, po http://www.fmf.uni-lj.si/~skreko/Pouk/dm2/2005-6/Seminarske/Kandic_ArtGalery.pdf.

Franc, A. (2014). Problem umetnostne galerije. Obzornik za matematiko in fiziko, Letnik 61, pages 161-172.

O'Rourke, J. (1987). Art Gallery Theorems and Algorithms. Povzeto 11. novembra 2015, 18:00, po http://cs.smith.edu/~orourke/books/ArtGalleryTheorems/Art_Gallery_Full_Book.pdf.

O'Rourke, J. (1987). Art Gallery Theorems and Algorithms. Chapter 5: Holes. Povzeto 12. novembra 2015, 19:00, po http://cs.smith.edu/~orourke/books/ArtGalleryTheorems/Art_Gallery_Chapter_5.pdf.

O'Rourke, J. (1987). Art Gallery Theorems and Algorithms. Chapter 6: Exterior visibility. Povzeto 12. novembra 2015, 20:00, po http://cs.smith.edu/~orourke/books/ArtGalleryTheorems/Art_Gallery_Chapter_6.pdf.

Pape, S. A., Vassilev, T. S. (2012). Visibility: Finding the Staircase Kernel in Orthogonal Polygons. Povzeto 14. novembra 2015, 18:00, po http://article.sapub.org/10.5923.j.ajcam.20120202.04.html.

Povalej, Ž. (2015). Problem umetnostne galerije. Povzeto 15. novembra 2015, 18:00, po http://www.fmf.uni-lj.si/~skreko/DodatnoStudijskoGradivo/UmetnostneGalerije/ZigaPovalej-UmetnostnaGalerija.pdf.

Urrutia, J. (2015). Art Gallery and Illumination Problems. Povzeto 13. novembera 2015, 19:00, po http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.68.3028&rep=rep1&type=pdf.

Wikipedia,. (2015). *Triangle fan*. Povzeto 13. novembra 2015, po https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_fan.

Yiu, S.M. (2015). A Generalized Fortress Problem Using k-Consecutive Vertex Guards. Povzeto 15. novembra 2015, 18:45, po http://www.cccg.ca/proceedings/1995/cccg1995_0023.pdf.

Žylinski, P. (2006). Orthogonal Galleries with holes: a coloring proof of Aggarwal's Theorem. Povzeto 13. novembra 2015, 19:00, po https://www.google.si/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=4&cad=rja&uact=8&ved=0CDYQFjADahUKEwjwhP6wl_LIAhVLthQKHZDRB9U&url=http%3A%2F%2Fwww.combinatorics.org%2Fojs%2Findex.php%2Feljc%2Farticle%2Fdownload%2Fv13i1r20%2Fpdf&usg=AFQjCNEmtg7kxQQ4TcYaT9vIzM7_gG1_tA&sig2=VJ-f6e6x2FDsFt_toETp1g.