»Mladi za napredek Maribora 2016«

33. srečanje

ANALIZA SITUACIJ POMOČI NA OSNOVI VERJETNOSTI IN TEORIJE IGER

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: NINO CAJNKAR

Mentor: DUŠANKA REISMAN, DAVID GAJSER

Šola: II. GIMNAZIJA MARIBOR

2016, Maribor

»Mladi za napredek Maribora 2016«

33. srečanje

ANALIZA SITUACIJ POMOČI NA OSNOVI VERJETNOSTI IN TEORIJE IGER

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

2016, Maribor

Kazalo vsebine

Kazalo Tabel:

POVZETEK

V raziskovalni nalogi sem raziskal in osvojil osnove verjetnosti, matematičnega upanja in teorije iger. Razlage sem podprl s primeri iz vsakdanjega življenja in različnih variacijah teh problemov. Zanimali so me predvsem matematični modeli povezav med družbo in posameznikom. Obravnaval sem najbolj znan primer iz teorije iger, imenovan *Zapornikova dilema* ter s pomočjo matematičnega upanja izračunal koristi pri medsebojni pomoči med sošolci (seveda samo v teoriji). Raziskal sem, kako je povezano število ljudi v prostoru z verjetnostjo, da bo nekdo izmed njih tudi pomagal poškodovancu. Obravnaval sem tudi pregovor: *»Če bi vsi ljudje postali boljši, bi bil svet boljši.«*

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorjema za vodenje, strokoven pregled naloge in usmeritve ter mladima matematikoma za spodbudne namige in prve preglede.

1 UVOD

K nastanku raziskovalne naloge me je spodbudila želja spoznati teorijo iger kot orodje, s katerim je mogoče modelirati marsikateri problem in ugotoviti povezanost med proučevanimi elementi. Ukvarja se z modeliranjem v iskanju odgovorov na različna vprašanja. Posvetil sem se vprašanju, kako inteligentni posamezniki delujejo, ko se trudijo doseči njim koristne cilje. Pri tem so se mi postavljala vprašanja koristnosti pomoči in dobrodelnosti.

Za potrebe preučevanja različnih modelov, sem osvojil temeljna znanja iz področij verjetnosti, matematičnega upanja in teorije iger ter uporabo le teh v matematičnih modelih.

Na praktičnih primerih, v aplikacijah in matematičnih modelih sem skozi različne variacije našel povezanost med odgovornim ali neodgovornim ukrepanjem posameznika in družbo ter motive, ki tega posameznika vodijo k izbranim odločitvam. Posebej so me zanimale odločitve o pomoči.

Spoznal sem zahtevnost in pasti posplošitve rezultatov iz modelov na realnost.

Podrobno sem obdelal in dodal variacije dobro znanega problema *Zapornikova dilema*. Dilemo sem na koncu modeliral tudi v različnih variacijah.

Seveda sem pri tem uporabil zanimive vire in članke zame izjemnih avtorjev pri čemer pa sem razen spoznanj ponujenih rešitev raziskoval tudi druge možnosti ter le te predstavil.

2 TEORETIČNA IZHODIŠČA

Teorija iger je področje matematike, ki preučuje sprejemanja odločitev določenih igralcev, katere bi lahko potencialno vplivale na interese drugih igralcev. Igra je formalni opis strateške situacije. Igralec je nekdo, ki v igri sprejema odločitve. Teorija iger se uporablja na modelih iger in **opisuje** realne strateške situacije z matematičnimi modeli, ter **analizira** te modele z matematičnimi orodji.

Vse igre imajo stroga pravila, ki določajo, kaj je dovoljeno in kaj ne. V takšnih modelih iger igralci ne morejo goljufati. Vse igre imajo glede na odločitve igralcev različne možne izide, ki jih ni mogoče napovedati in posledično tudi različne dobičke za igralce.

Večina modelov iger temelji na človeškem racionalnem odločanju, vsak igralec bo naredil takšno potezo, da bo njegov dobiček čim večji. Predpostavlja se tudi, da vsi igralci vedo, kakšne odločitve imajo drugi igralci na voljo, ti pa vedo, da drugi igralci vedo kakšne so njihove možne poteze.

Igralec pri igri uporablja določene strategije. Strategija je celoten načrt potez, v vsaki točki odločitve igralca.

2.1 Osnovni elementi teorije iger

Po [8] in [9] so osnovni elementi teorije iger:

- IGRALCI - individualni akterji: posamezniki, družbe, računalniki, ipd.
- POTEZE IN STRATEGIJE: vse možne odločitve ali načini delovanja igralcev
- INFORMACIJE: vsem igralcem razpoložljivi podatki
- IZIDI: množica končnih stanj
- DOBIČEK: vrednost, ki jo doseže vsak izmed igralcev na koncu igre. Lahko je tudi negativen.

2.2 Osnovne predpostavke teorije iger

Osnovne predpostavke v teoriji iger so:

- RACIONALNI IGRALECI: Igralci vedno sprejmejo za sebe najboljšo odločitev.
- RACIONALNO ODLOČANJE: Igralec vedno izbere potezo, ki je glede na njegove preference vsaj tako dobra kot vse ostale poteze.
- SKUPNO ZNANJE: Vsi igralci vedo vse o igri in vedo, da vsi ostali igralci vedo vse o igri.

2.3 Vrste iger

Po [9] (Ule, 2015) ločimo kooperativne in nekooperativne igre:

- Pri nekooperativnih igrah se igralci med seboj ne smejo pogajati o svojih odločitvah in ne smejo sklepati zavezništev in dogovorov.
- Pri kooperativnih igrah se igralci med seboj smejo pogajati o svojih odločitvah, da bi dosegli zastavljene cilje, in lahko sklepajo zavezujoče dogovore in zavezništva .

Temeljna dilema poslovnih iger je izbira med sodelovanjem in konkuriranjem, saj se s sodelovanjem igralcev da pogosto doseči boljši dobiček, kot če si med seboj konkurirajo. Pri tem so potrošniki ali druga podjetja lahko oškodovana in je zato kooperativno sodelovanje v številnih primerih zakonsko prepovedano (varstvo konkurence).
Osredotočil se bom na nekooperativne igre.

2.4 Strategije iger

»Strategija je načrt vseh izbir. Če je strategija dobro definirana, potem vsebuje vsa pravila, ki jih potrebuje nekdo, ki bo izvajal igro namesto igralca in mu bo omogočila igrati tako, kot bi igral igralec sam.« (Heap, 1992)

Poznanih je več različnih vrst strategij:

- DOMINANTNA STRATEGIJA: Strategija dominira drugo strategijo, če vedno prinese večji dobiček ne glede na poteze drugih igralcev.
    - Strategija šibko dominira drugo strategijo, če v vseh primerih prinese vsaj enak ali večji dobiček.

- ČISTA STRATEGIJA je strategija igralca, katerega poteze so v vsaki poziciji natančno določene in v identičnih položajih vedno sledijo enakemu vzorcu.
- MEŠANA STRATEGIJA je strategija, kjer igralec potezam določi verjetnost izbire, nato pa na podlagi teh verjetnosti naredi določeno potezo.
- OPTIMALNA STRATEGIJA: strategija, pri kateri je dobiček, ki ga bo igralec zagotovo imel ne glede na strategijo nasprotnika, največji možen.

2.5 Nashevo ravnovesje

Po [8] (Turocy in von Stengel, 2015) je Nashevo ravnovesje pozicija v igri, ko nobeden izmed igralcev ne želi spremeniti poteze, saj ob nespremenjeni strategiji nasprotnika ne more povečati dobička. Ko pride do Nashevega ravnovesja, nobeden od igralcev ne spremeni več poteze zato, ker ima že najvišji dobiček glede na situacijo oziroma potezo drugega igralca. Igra ima lahko več kot eno Nashevo ravnovesje, lahko pa ga tudi nima. Nashevo ravnovesje je lahko čisto ali strogo čisto.

- Čisto Nashevo ravnovesje je takrat, ko je dobiček poljubnega igralca večji ali enak dobičku, ki bi ga dobil vsak igralec, če bi ubral drugačno strategijo.
- Strogo čisto Nashevo ravnovesje je takrat, ko je dobiček poljubnega igralca strogo večji od dobička, ki bi ga dobil vsak igralec, če bi ubral drugačno strategijo.

2.6 Verjetnost

Po [5] (Yavuz Duman) je verjetnost v praksi interpretirana kot predvideni (pričakovani) delež poskusov, pri katerih se zgodi določen dogodek. Pri naključnem poskusu imenujemo dogodek vsako podmnožico iz končne množice vseh možnih izidov. Velja:

- Verjetnost vsakega izida je število iz intervala [0,1].
- Verjetnost vsakega dogodka je vsota verjetnosti posameznih izidov, ki se pojavijo v dogodku.
- Vsota verjetnosti vseh možnih izidov je enaka 1.

Če verjetnost označimo s p, posamezen izid z ω_i, in če ima dogodek n različnih možnih izidov, potem velja: $1 = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \cdots + p(\omega_{n-1}) + p(\omega_n)$.

2.6.1 Bernoullijeva zaporedja poskusov

Bernoullijevo zaporedje poskusov je zaporedje slučajnih poskusov, pri čemer sta vsakič možna natanko dva izida: Poskus ali uspe ali ne uspe. Poskusi morajo biti neodvisni (torej morajo biti dogodki, da posamezen poskus uspe, neodvisni). Vsi poskusi imajo verjetnost, da uspejo, enako.
(Lešnjak, 2008, str. 28) [3]

2.7 Matematično upanje

Po [10] (Yavoz Duman) je matematično upanje vsota zmnožkov vrednosti izida in verjetnosti, da se bo izid zgodil:

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n.$$

E(X) imenujemo tudi pričakovan dobiček, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ so verjetnosti, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ pa so možne vrednosti izidov.

3 APLIKACIJE TEORETIČNIH IZHODIŠČ NA PRAKTIČNIH PRIMERIH

V tem poglavju raziskovalne naloge so predstavljeni primeri za lažje razumevanje in razlago teoretičnih izhodišč. Najprej je v poglavju 3.1 na matriki igre Zapornikova dilema predstavljeno Nashevo ravnovesje, pogoji za nastanek Nashevega ravnovesja in kako ga prepoznamo. Nadalje so v poglavju 3.2 predstavljene osnove verjetnosti in matematičnega upanja, saj so tesno povezani s teorijo iger in postavitvijo modelov, vse skupaj pa je ponazorjeno z različnimi posebnimi primeri.

3.1 Nashevo ravnovesje: Zapornikova dilema

V zaporu sta zaprta dva zapornika, zapornik 1 in zapornik 2, ki sta osumljena kraje. Zaprta sta v ločenih celicah in zato med seboj ne moreta komunicirati. Krajo sta dejansko izvedla, vendar jima tega ne morejo dokazati. Policija ima dovolj dokazov za dve leti zapora (posest orožja, manjši prekrški), želijo pa dokončno zaključiti primer s priznanjem, da bi vsaj enega za dalj časa lahko poslali v ječo. Oba vesta naslednje:

- Lahko ali zatožiš sostorilca, ali pa molčiš.
- Če eden molči, drugi pa ga zatoži, potem je tisti, ki je drugega zatožil, prost, tisti, ki molči, pa gre v ječo za 10 let.
- Če oba zatožita drug drugega, potem bosta oba šla v ječo za pet let.
- Če oba molčita, potem imajo dovolj podatkov, da dobita vsak po dve leti zapora.

Tabela 1: Začetna matrika za igro Zapornikova dilema.

Zapornik 2

Zapornik 1

	Zatoži	Molči
Zatoži	5, 5	0, 10
Molči	10,0	2, 2

Najprej preverimo kateri potezi sta v dani situaciji, če zapornik 2 molči ali zatoži zapornika 1, najboljši za zapornika 1:

Tabela 2: Matrika igre, ko zapornik 2 zatoži zapornika 1.

Zapornik 2

Zapornik 1

	Zatoži	Molči
Zatoži	5, 5	0, 10
Molči	10,0	2, 2

V tabeli 2 označimo katera poteza je za zapornika 1 najboljša, če ga zapornik 2 zatoži. Ugotovimo, da je najboljša poteza, da tudi zapornik 1 zatoži zapornika 2, saj dobi v tem primeru 5 let zapora, kar je manj let zapora, kot če bi molčal (10 let zapora). Zato to petko obarvamo zeleno in kot naslednje preverimo, katera poteza je najboljša za zapornika 1, če zapornik 2 molči:

Tabela 3: Matrika igre, ko zapornik 2 molči.

Zapornik 2

Zapornik 1

	Zatoži	Molči
Zatoži	5, 5	**0**, 10
Molči	10,0	2, 2

Sedaj ugotovimo, da je v tem primeru za zapornika 1 najboljše, da zatoži zapornika 2, saj je prost (0 let zaporne kazni), kar je boljše, kot če bi molčal in dobil 2 leti zaporne kazni. To ničlo obarvamo zeleno. Sedaj lahko ugotovimo, da je dominantna strategija zapornika 1, da zatoži zapornika 2.

Sedaj preverimo še, katere so najboljše poteze za zapornika 2 v danih situacijah:

Tabela 4: Matrika igre, ko zapornik 1 zatoži zapornika 2.

Zapornik 2

Zapornik 1

	Zatoži	Molči
Zatoži	**5, 5**	0, 10
Molči	10,0	2, 2

V prvem primeru opazujemo, katera je najboljša poteza zapornika 2, ko ga zapornik 1 zatoži. Tudi tukaj ugotovimo, da je najboljša poteza, da tudi zapornik 2 zatoži zapornika 1, saj dobi v tem primeru 5 let zapora, kar je manj let zapora, kot če bi molčal (10 let zapora). Tudi to petko obarvamo zeleno. Sedaj preverimo še najboljšo potezo zapornika 2, ko zapornik 1 molči.

Tabela 5: Matrika igre, ko zapornik 1 molči.

Zapornik 2

Zapornik 1

	Zatoži	Molči
Zatoži	5, 5	0, 10
Molči	10,0	2, 2

Tukaj ugotovimo, da je za zapornika 2 bolje, da zapornika 1 zatoži, ko ta molči, saj je prostost boljša kot 2 leti zapora. Tudi to ničlo označimo z zeleno. Ugotovimo, da je dominantna strategija zapornika 2, da zatoži zapornika 1.

Tabela 6: Končna matrika po obravnavi igre Zapornikova dilema.

Zapornik 2

Zapornik 1

	Zatoži	Molči
Zatoži	5, 5	0, 10
Molči	10,0	2, 2

Sedaj analiziramo dobljeno tabelo. Za oba zapornika je najbolje, da zatožita drug drugega. V tem primeru smo v zgornjem levem kvadratu, v katerem sta dve zeleno obarvani petki. Zelena barva nam pove, da se nobenemu igralcu v tej situaciji ne splača spremeniti strategije. Ker sta v tem kvadrantu obe števili označeni z zeleno barvo, ugotovimo, da je v tem kvadrantu Nashevo ravnovesje.

3.2 Verjetnost in matematično upanje: Pomoč med sošolci

Učenec potrebuje pomoč pri reševanju naloge, pomagajo pa mu lahko trije sošolci. Verjetnost, da se bo za pomoč učencu odločil prvi sošolec je U(1), drugi sošolec U(2) in tretji sošolec U(3). Če mu bo pomagal en sošolec, je verjetnost, da bosta nalogo rešila, R(1). Če mu bosta pomagala dva sošolca, je verjetnost, da bodo nalogo rešili R(2). Če pa učencu pomagajo vsi trije sošolci, je verjetnost, da bodo nalogo rešili, R(3). Učenec lahko nalogo uspešno reši s pomočjo enega, dveh ali treh sošolcev, sicer je ne more. Zanima nas verjetnost, da bo učenec uspel nalogo rešiti.
Splošne enačbe:
Verjetnost P(1), da bo pomagal natanko en sošolec:
$P(1) = U(1) \cdot (1 - U(2)) \cdot (1 - U(3)) + (1 - U(1)) \cdot U(2) \cdot (1 - U(3)) + (1 - U(1)) \cdot (1 - U(2)) \cdot U(3).$

Verjetnost P(2), da bosta pomagala dva sošolca:

$$P(2) = U(1) \cdot U(2) \cdot \big(1 - U(3)\big) + U(1) \cdot \big(1 - U(2)\big) \cdot U(3) + \big(1 - U(1)\big) \cdot U(2) \cdot U(3).$$

Verjetnost P(3), da mu bodo pomagali vsi trije sošolci:

$$P(3) = U(1) \cdot U(2) \cdot U(3).$$

Naj bo V verjetnost, da sošolec ne bo pomagal:

- V(1) = 1 – U(1),
- V(2) = 1 – U(2),
- V(3) = 1 – U(3).

Če upoštevamo zgornje izraze, lahko zapišemo:

$$P(1) = U(1) \cdot V(2) \cdot V(3) + V(1) \cdot U(2) \cdot V(3) + V(1) \cdot V(2) \cdot U(3),$$

$$P(2) = U(1) \cdot U(2) \cdot V(3) + U(1) \cdot V(2) \cdot U(3) + V(1) \cdot U(2) \cdot U(3),$$

$$P(3) = U(1) \cdot U(2) \cdot U(3).$$

Verjetnost P, da bo učenec dobil pomoč in bo problem rešen, je vsota produktov verjetnosti, da bo neko število sošolcev pomagalo in verjetnosti, da bo enako število sošolcev nalogo rešilo:

$$P = R(1) \cdot P(1) + R(2) \cdot P(2) + R(3) \cdot P(3).$$

Sedaj lahko izračunamo pričakovan dobiček.

Imamo tri možne dobičke:

1. Če učenec reši problem s pomočjo enega sošolca, dobita skupaj dobiček A.
2. Če učenec reši problem s pomočjo dveh sošolcev, dobijo skupaj dobiček B.
3. Če učenec reši problem s pomočjo treh sošolcev, dobijo skupaj dobiček C.

K(1) je pričakovan dobiček, ko pomaga natanko en sošolec.

$$K(1) = R(1) \cdot \frac{A}{2},$$

K(2) je pričakovan dobiček, ko pomagata natanko dva sošolca.

$$K(2) = R(2) \cdot \frac{B}{3},$$

K(3) je pričakovan dobiček, ko pomagajo natanko trije sošolci.

$$K(3) = R(3) \cdot \frac{C}{4}.$$

Pričakovan dobiček učenca označimo s K in je enak vsoti produktov verjetnosti, da bo problem rešen, verjetnosti, da bo določeno število sošolcev pomagalo in enotam koristi, ki jih bodo učenci dobili, če bodo nalogo rešili, deljeno s številom ljudi, ki nalogo rešujejo:

$$K = K(1) \cdot P(1) + K(2) \cdot P(2) + K(3) \cdot P(3).$$

PRIMER 1

Verjetnosti, da se bodo sošolci odločili za pomoč:

- $U(1) = 40\% = \frac{2}{5}$
- $U(2) = 70\% = \frac{7}{10}$
- $U(3) = 85\% = \frac{17}{20}$.

Verjetnosti, da se sošolci ne bodo odločili za pomoč, so potem:

- $V(1) = 60\% = \frac{3}{5}$
- $V(2) = 30\% = \frac{3}{10}$
- $V(3) = 15\% = \frac{3}{20}$.

Verjetnosti, da bo učenec ob pomoči sošolcev rešil nalogo, izberemo tako:

- $R(1) = 50\% = \frac{1}{2}$
- $R(2) = 65\% = \frac{13}{20}$
- $R(3) = 100\% = 1$.

Verjetnost, da bo učenec rešil nalogo samo z enim sošolcem je najnižja, saj je snov zelo težka in vsak učenec ve le del snovi. Dva sošolca vesta skupaj že več kot eden, vendar še ne vesta vsega, zato je verjetnost, da bosta nalogo uspešno rešila, nekoliko večja. Med tem pa trije sošolci skupaj vedo praktično vse in bodo nalogo skupaj zagotovo rešili.

Možni dobički:

1. Če učenec reši nalogo s pomočjo enega sošolca, dobita skupaj 700 enot koristi (A = 700).
2. Če učenec reši nalogo s pomočjo dveh sošolcev, dobijo skupaj 500 enot koristi (B = 500).
3. Če učenec reši nalogo s pomočjo treh sošolcev, dobijo skupaj 300 enot koristi (C = 300).

Najprej izračunamo verjetnost, da bo pomagal samo en sošolec (P(1)), samo dva sošolca (P(2)) in vsi trije sošolci (P(3)):

$$P(1) = U(1) \cdot V(2) \cdot V(3) + V(1) \cdot U(2) \cdot V(3) + V(1) \cdot V(2) \cdot U(3)$$

$$P(1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{20} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{20} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{17}{20}$$

$$P(1) = \frac{18 + 63 + 153}{1000} = \mathbf{\frac{234}{1000}} = \mathbf{23,4}\%,$$

$$P(2) = U(1) \cdot U(2) \cdot V(3) + U(1) \cdot V(2) \cdot U(3) + V(1) \cdot U(2) \cdot U(3)$$

$$P(2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{20} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{17}{20} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{17}{20}$$

$$P(2) = \frac{42 + 102 + 357}{1000} = \mathbf{\frac{501}{1000}} = \mathbf{50,1}\%,$$

$$P(3) = U(1) \cdot U(2) \cdot U(3)$$

$$P(3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{17}{20} = \mathbf{\frac{238}{1000}} = \mathbf{23,8}\%.$$

Uporabimo enačbo za izračun verjetnosti, da bo učenec s pomočjo nalogo rešil:

$$P = R(1) \cdot P(1) + R(2) \cdot P(2) + R(3) \cdot P(3)$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{234}{1000} + \frac{13}{20} \cdot \frac{501}{1000} + 1 \cdot \frac{238}{1000}$$
$$P = \frac{2340 + 6513 + 4760}{20000} = \mathbf{\frac{13613}{20000}} = \mathbf{68,07}\%.$$

Na koncu še izračunamo pričakovan dobiček učenca, če mu pomaga natanko en (K(1)), dva (K(2)) ali trije (K(3)) ter pričakovan dobiček učenca (K):

$$K(1) = R(1) \cdot \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{700}{2} = \frac{700}{4} = 175{,}0 \ enot\ koristi,$$
$$K(2) = R(2) \cdot \frac{B}{3} = \frac{13}{20} \cdot \frac{500}{3} = \frac{650}{6} = 108{,}3 \ enot\ koristi,$$
$$K(3) = R(3) \cdot \frac{C}{4} = 1 \cdot \frac{300}{4} = \frac{300}{4} = 75{,}0 \ enot\ koristi.$$
$$K = K(1) \cdot P(1) + K(2) \cdot P(2) + K(3) \cdot P(3)$$
$$\boldsymbol{K = 40,95 + 54,28 + 17,85 = 113,08 \ enot\ koristi.}$$

Učenec v dani situaciji lahko pričakuje 113,08 enot koristi.

3.2.1 Posebni primer 1

V tej variaciji privzamemo, da bo vsak sošolec pomagal učencu z enako verjetnostjo:

U = U(1) = U(2) = U(3) <==> V = V(1) = V(2) = V(3).

Nadalje predpostavimo tudi, da je verjetnost, da bosta dva sošolca znala rešiti nalogo, dvakrat večja, kot če bi jo pomagal reševati le en sošolec. Verjetnost, da bodo trije sošolci znali rešiti nalogo je trikrat večja, kot če bi jo pomagal reševati le eden:

$$R(1) = R, \quad R(2) = 2 \cdot R, \quad R(3) = 3 \cdot R.$$

Takšen primer obravnavamo s predpostavko, da vsak izmed sošolcev ve tretjino celotnega gradiva, njihovo znanje pa se skoraj ne prekriva.

Sedaj lahko verjetnostne račune zapišemo:

$$P(1) = U(1) \cdot V(2) \cdot V(3) + V(1) \cdot U(2) \cdot V(3) + V(1) \cdot V(2) \cdot U(3)$$

$$\boldsymbol{P(1) = U \cdot V^2 + U \cdot V^2 + U \cdot V^2 = 3 \cdot U \cdot V^2,}$$

$$P(2) = U(1) \cdot U(2) \cdot V(3) + U(1) \cdot V(2) \cdot U(3) + V(1) \cdot U(2) \cdot U(3)$$

$$\boldsymbol{P(2) = U^2 \cdot V + U^2 \cdot V + U^2 \cdot V = 3 \cdot U^2 \cdot V,}$$

$$P(3) = U(1) \cdot U(2) \cdot U(3)$$

$$\boldsymbol{P(3) = U^3.}$$

Verjetnost P je v tem primeru:

$$P = R(1) \cdot P(1) + R(2) \cdot P(2) + R(3) \cdot P(3)$$

$$P = U \cdot (3 \cdot R \cdot V^2 + 6 \cdot R \cdot U \cdot V + 3 \cdot R \cdot U^2)$$

$$P = 3UR(V^2 + 2UV + U^2)$$

$$P = 3UR(V + U)^2$$

$$\boldsymbol{P = 3UR.}$$

Številska obravnava:

Učencu bo vsak sošolec pomagal z verjetnostjo U =70%, torej je verjetnost, da sošolec učencu ne bo pomagal, V = 30%.

Verjetnosti, da bo učenec ob pomoči sošolcev rešil nalogo:

- $R(1) = 33\% = \frac{33}{100}$
- $R(2) = 66\% = \frac{66}{100}$
- $R(3) = 99\% = \frac{99}{100}$.

Torej R(1) = R, R(2) = 2R, R(3) = 3R.

Možni dobički:

1. Če učenec reši nalogo s pomočjo enega sošolca, dobita skupaj 700 enot koristi (A = 700).
2. Če učenec reši nalogo s pomočjo dveh sošolcev, dobijo skupaj 500 enot koristi (B = 500).
3. Če učenec reši nalogo s pomočjo treh sošolcev, dobijo skupaj 300 enot koristi (C = 300).

Sedaj lahko po splošnih enačbah izračunamo verjetnost, da bo pomagal samo en sošolec (P(1)), samo dva sošolca (P(2)) in vsi trije sošolci (P(3)):

$$P(1) = 3 \cdot U \cdot V^2$$

$$P(1) = 3 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{\mathbf{189}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{18,9}\%,$$

$$P(2) = 3 \cdot U^2 \cdot V$$

$$P(2) = 3 \cdot (\frac{7}{10})^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{\mathbf{441}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{44,1}\%,$$

$$P(3) = U^3$$

$$P(3) = (\frac{7}{10})^3 = \frac{\mathbf{343}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{34,3}\%.$$

Uporabimo enačbo za izračun verjetnosti, da bo učenec s pomočjo nalogo rešil:

$$P = R(1) \cdot P(1) + R(2) \cdot P(2) + R(3) \cdot P(3)$$

$$P = \frac{33}{100} \cdot \frac{189}{1000} + \frac{66}{100} \cdot \frac{441}{1000} + \frac{343}{1000} \cdot \frac{99}{100} = \frac{\mathbf{693}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{69,3}\%.$$

Na koncu še izračunamo pričakovan dobiček učenca, če mu pomaga natanko en (K(1)), dva (K(2)) ali trije (K(3)) ter pričakovan dobiček učenca (K):

$$K(1) = R(1) \cdot \frac{A}{2} = \frac{33}{100} \cdot \frac{700}{2} = \frac{\mathbf{231}}{\mathbf{2}} = \mathbf{115,5}\ \boldsymbol{enot\ koristi},$$

$$K(2) = R(2) \cdot \frac{B}{3} = \frac{66}{100} \cdot \frac{500}{3} = \frac{\mathbf{330}}{\mathbf{3}} = \mathbf{110,0}\ \boldsymbol{enot\ koristi},$$

$$K(3) = R(3) \cdot \frac{C}{4} = \frac{99}{100} \cdot \frac{300}{4} = \frac{297}{4} = \mathbf{74,3}\ \boldsymbol{enot\ koristi},$$

$$K = K(1) \cdot P(1) + K(2) \cdot P(2) + K(3) \cdot P(3)$$

$$\boldsymbol{K} = \mathbf{30,83} + \mathbf{47,78} + \mathbf{25,73} = \mathbf{104,34}\ \boldsymbol{enot\ koristi}.$$

Učenec v tej situaciji lahko pričakuje 104,34 enot koristi, kar je manj, kot v prejšnjem številskem primeru.

3.2.2 Posebni primer 2

Tudi v tej variaciji privzamemo, da bo vsak sošolec pomagal učencu z enako verjetnostjo:

U = U(1) = U(2) = U(3) <==> V = V(1) = V(2) = V(3).

Sedaj predpostavimo, da so verjetnosti R(1), R(2) in R(3) enake:

$$R(1) = R(2) = R(3) = R.$$

Takšen primer obravnavamo s predpostavko, da vsak izmed sošolcev ve isti obseg učne snovi, ki je potreben za rešitev naloge (dodaten učenec ne pripomore k rešitvi problema).

Že iz prejšnjega primera poznamo vrednosti za P(1), P(2) in P(3). Nadaljujemo z verjetnostnim računom P:

$$P = U \cdot (3 \cdot R \cdot V^2 + 3 \cdot R \cdot U \cdot V + R \cdot U^2)$$
$$P = UR \cdot (3V^2 + 3UV + U^2).$$

Vstavimo V = (1 – U):

$$P = UR \cdot (3 \cdot (1 - U)^2 + 3U \cdot (1 - U) + U^2)$$
$$P = UR \cdot (3 - 6U + 3U^2 + 3U - 3U^2 + U^2)$$
$$P = UR \cdot (U^2 - 3U + 3)$$
$$P = R \cdot (U^3 - 3U^2 + 3U)$$
$$P = R \cdot (U^3 - 3U^2 + 3U + 1 - 1)$$
$$P = R \cdot (1 - (1 - U)^3)$$
$$\boldsymbol{P = R \cdot (1 - V^3).}$$

Številska obravnava:

Učencu bo vsak sošolec pomagal z verjetnostjo U =70%, torej je verjetnost, da sošolec učencu ne bo pomagal, V = 30%.

Verjetnost, da bo učenec rešil nalogo ob pomoči enega, dveh ali treh sošolcev, je enaka:

$$R(1) = R(2) = R(3) = R = 60\%.$$

Možni dobički:

1. Če učenec reši nalogo s pomočjo enega sošolca, dobita skupaj 700 enot koristi (A=700).
2. Če učenec reši nalogo s pomočjo dveh sošolcev, dobijo skupaj 500 enot koristi (B=500).
3. Če učenec reši nalogo s pomočjo treh sošolcev, dobijo skupaj 300 enot koristi (C=300).

Sedaj lahko po splošnih enačbah izračunamo verjetnost, da bo pomagal samo en sošolec (P(1)), samo dva sošolca (P(2)) in vsi trije sošolci (P(3)):

$$P(1) = 3 \cdot U \cdot V^2$$

$$P(1) = 3 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \mathbf{\frac{189}{1000}} = \mathbf{18,9}\%,$$

$$P(2) = 3 \cdot U^2 \cdot V$$

$$P(2) = 3 \cdot (\frac{7}{10})^2 \cdot \frac{3}{10} = \mathbf{\frac{441}{1000}} = \mathbf{44,1}\%,$$

$$P(3) = U^3$$

$$P(3) = (\frac{7}{10})^3 = \mathbf{\frac{343}{1000}} = \mathbf{34,3}\%.$$

Uporabimo enačbo za izračun verjetnosti, da bo učenec s pomočjo nalogo rešil:

$$P = R \cdot (1 - V^3) = \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{10}\right)^3\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{973}{1000} = \mathbf{\frac{2919}{5000}} = \mathbf{58,38}\%.$$

Na koncu še izračunamo pričakovan dobiček učenca, če mu pomaga natanko en (K(1)), dva (K(2)) ali trije (K(3)) ter pričakovan dobiček učenca (K):

$$K(1) = R \cdot \frac{A}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{700}{2} = \mathbf{210}\ \boldsymbol{enot\ koristi},$$

$$K(2) = R \cdot \frac{B}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{500}{3} = \mathbf{100}\ \boldsymbol{enot\ koristi},$$

$$K(3) = R \cdot \frac{C}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{300}{4} = \mathbf{45}\ \boldsymbol{enot\ koristi},$$

$$\boldsymbol{K = K(1) \cdot P(1) + K(2) \cdot P(2) + K(3) \cdot P(3)}$$

$$\boldsymbol{K = 39,7 + 44,1 + 15,4 = 99,2\ enot\ koristi}.$$

Učenec lahko v zadnji situaciji pričakuje 99,2 enot koristi.

4 VPLIV VELIKOSTI SKUPINE NA PRIPRAVLJENOST ZA POMOČ POSAMEZNIKU

V tem poglavju je na predpostavki, da se vsi ljudje odločajo racionalno, s pomočjo teorije iger obravnavana teorija, ki je zelo povezana s psihologijo:

»Če je v prostoru več ljudi, je možnost, da bo vsaj ena oseba pomagala poškodovancu, manjša«.

Po [1] (Harrington, 1999), ki ga povzemamo v nadaljevanju, je skozi model podana matematična povezava med velikostjo skupine in pripravljenostjo za pomoč posamezniku oziroma koliko lahko na to pomoč računamo, ko smo v težavah. Zaradi presenetljivih in človeških rezultatov sem se odločil, postaviti model pri predpostavki, da posameznik želi biti heroj in pridobiti odobravanje družbe. Ta model sem predstavil v poglavju 4.3, in za primerjavo modelov izračunal številska primera.

4.1 Model igre

Predpostavljajmo, da je v neki sobi poškodovanec in še N ljudi, pri čemer je $N \geq 2$. Ti ljudje, imenovani igralci, imajo dve možnosti, ali poškodovancu pomagajo, ali pa ne. Ali bodo poškodovancu pomagali ali ne se odločijo v trenutku; torej, vsi igralci se v istem trenutku odločijo, ali bodo poškodovancu pomagali ali pa ga ignorirali. Postavimo se v vlogo enega igralca, ostane še $N - 1$ igralcev. Domnevamo, da nas zanima le, ali bo kdo poškodovancu pomagal, ali bomo mi pomagali poškodovancu in če je poškodovanec dobil pomoč.

Možni dobički za vsakega igralca so torej:

a, če igralec izbere pomoč, vsi ostali pa ignorirajo,

b, če igralec izbere ignoriranje, vsaj eden pa pomaga,

c, če igralec izbere pomoč, in vsaj še en drug pomaga,

d, če vsi igralci poškodovanca ignorirajo.

Ker se igralci racionalno odločajo, predpostavimo še naslednje:

1. $a > d$ Igralec raje poškodovancu pomaga sam, kot pa da poškodovanec ne dobi pomoči od nikogar drugega,
2. $b > c$ Igralec poškodovancu raje ne pomaga, če poškodovancu že pomaga kdo drug.

Vsi igralci so enaki (imajo enake enote koristi).

4.2 Obravnava igre pri neodgovornem posamezniku

V tej igri obstaja N čistih strategij Nashevega ravnovesja, kjer vedno eden od igralcev izbere P, ostalih N – 1 igralcev pa I. To je zato, ker če samo en igralec pomaga, ostali pa ignorirajo, igralec, ki pomaga, ne bo spremenil svoje strategije v ignoriranje, saj bi s tem dobil dobiček d, ki pa je manjši od dobička a, medtem, ko igralci, ki ignorirajo, ne bi spremenili svoje strategijo na pomoč zato, ker bi drugače dobili dobiček c, ki pa je manjši od dobička b, katerega imajo sedaj. To se ponovi N krat, saj če vsak izmed igralcev enkrat pomaga, ostalih N–1 krat pa ignorira. Predpostavljamo, da igralci uporabljajo mešane strategije, ker ima mešana strategija element naključnega izbiranja in je predstavljena z verjetnostjo izbire P in njej komplementarno verjetnostjo za izbor I, kjer sta P in I čisti strategiji. Da pa je izbira med P in I prepuščena verjetnosti, mora biti oseba neodločena med tema dvema čistima strategijama. Izhajamo iz tega, da ima vsak igralec enako možnost nudit pomoč, torej je verjetnost p (verjetnost, da bo igralec izbral P) za vsakega igralca enaka:

$$p = p_1 = p_2 = \cdots = p_i = \cdots p_{N-2} = p_{N-1} = p_N$$

Ker je vsota vseh verjetnosti enaka 1 (100%), lahko zapišemo

$$n_i = 1 - p_i,$$

$$p_i + n_i = 1, \qquad i \in \{1, 2, 3, \dots, N-2, N-1, N\}.$$

Pri tem je n_i verjetnost, da bo igralec i izbral I. Velja:

$$n = n_1 = n_2 = \cdots = n_i = \cdots = n_{N-2} = n_{N-1}$$

Igralec je neodločen med njegovima dvema čistima strategijama samo, če velja naslednja enačba:

$$\boldsymbol{n^{N-1} \cdot a + [1 - n^{N-1}] \cdot c = n^{N-1} \cdot d + [1 - n^{N-1}] \cdot b.} \qquad \textbf{(1)}$$

V tej enačbi je na levi strani pričakovan dobiček, če igralec pomaga, na desni strani pa pričakovan dobiček, če igralec ne pomaga.

Pri tem velja:

1. $n^{N-1} = (1-p)^{N-1}$………………verjetnost, da bodo vsi igralci izbrali I
2. $1 - n^{N-1} = [1 - (1-p)^{N-1}]$……verjetnost, da bo vsaj en igralec izbral P

Enačbo (1) lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$\boldsymbol{(1-p)^{N-1}\cdot a+[1-(1-p)^{N-1}]\cdot c=(1-p)^{N-1}\cdot d+[1-(1-p)^{N-1}]\cdot b} \quad \mathbf{(2)}$$

Iz enačbe (2) izrazimo p:

$$(1-p)^{N-1}\cdot a-(1-p)^{N-1}\cdot d=[1-(1-p)^{N-1}]\cdot b-[1-(1-p)^{N-1}]\cdot c$$
$$(1-p)^{N-1}\cdot(a-d)=[1-(1-p)^{N-1}]\cdot(b-c)$$
$$(1-p)^{N-1}\cdot(a-d)=(b-c)-(1-p)^{N-1}\cdot(b-c)$$
$$(1-p)^{N-1}\cdot(a-d)+(1-p)^{N-1}\cdot(b-c)=b-c$$
$$(1-p)^{N-1}\cdot(a-d+b-c)=b-c$$
$$(1-p)^{N-1}=\frac{b-c}{a-d+b-c}$$
$$1-p=\left(\frac{b-c}{a-d+b-c}\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Izražena verjetnost, da bo nek igralec pomagal je verjetnost p, ko nastopi ravnovesje simetrične mešane strategije:

$$p=1-\left(\frac{b-c}{(a-d)+(b-c)}\right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (3)$$

Z besedami, verjetnost p je verjetnost, da bo igralec poškodovancu pomagal, veljala pa bo natanko takrat, ko bo veljala enačba (2). Enačba (2) bo veljala natanko takrat, ko bo igralec neodvisen med čistima strategijama *pomagati* ali *ignorirati* in bo posegel po mešani strategiji. Pri mešani strategiji pa bo pomagal natanko z verjetnostjo p.

Iz zgornje enačbe je razvidno, da je imenovalec v izrazu pod korenom vedno večji od števca za vrednost a – d, zato je število pod korenom vedno manjše od ena ter večje od nič. Velja tudi, da je koren iz števila manjšega od ena vedno večji od tega števila.

Torej, če se vsak od N-1 igralcev odloči, da bo pomagal (P) z verjetnostjo p, potem je igralec neodločen med obema strategijama in bo pomagal z verjetnostjo p. Verjetnost p pa se, kot je razvidno iz enačbe, zmanjšuje z večanjem N (števila igralcev).

Nadalje nas še posebej zanima kakšna je verjetnost (označimo jo s Q), da bo poškodovanec dobil od kogarkoli pomoč. Pomoč bo dobil, če mu bo pomagal vsaj en igralec. V tem primeru zapišemo verjetnost Q:

$$Q = 1 - (1 - p)^N = 1 - n^N$$

$$Q = 1 - \left(\frac{b - c}{(a - d) + (b - c)}\right)^{\frac{N}{N-1}}$$

Iz zgornje enačbe vidimo, da od ena odštevamo, število, ki se manjša.

<u>*Več kot je ljudi na voljo za pomoč (več kot je igralcev), manjša je verjetnost, da bo kdorkoli pomagal. To pa naj bi veljalo zato, ker več kot je ljudi, bolj je dolžnost za pomoč porazdeljena med ljudmi, pri tem pa vsak računa na to, da bo pomoč poškodovancu nudil kdo drug.*</u>

Ključna domneva tukaj je, da bodo igralci vedno neodločeni med čistima strategijama, saj bo takrat veljala enačba (2). Domnevamo tudi, da se igralci racionalno odločajo in imajo enake preference.

Zaradi zgornjih predpostavk te enačbe ne veljajo popolnoma na vseh skupinah ljudi, služijo le za razlago povezave teorije iger in realnega življenja. Da bi enačbe lahko posplošili na celotno populacijo, bi morali vključiti v enačbe človeški dejavnik, kar pa bi bilo prezahtevno.

4.3 Obravnava igre za posameznika, ki želi izstopati

Zgornji model sem spremenil, saj lahko domneve dodajamo na različne načine. Obravnaval sem model primera, ko oseba želi izstopati. V tem modelu bo a > b. Vse informacije privzamemo kot skupno znanje med igralci.

Če posameznik želi biti heroj, potem mu bo najpomembneje, da bo poškodovancu pomagal in dobil odobravanje drugih. Tako se tudi nekatere relacije med izidi spremenijo:

1. a > d (od prej),
2. b > c (od prej),
3. a > b, Igralec poškodovancu raje pomaga sam, kot pa da bi mu kdo drug, da bi izstopal in bil heroj.

$$p = 1 - \left(\frac{b - c}{(a - d) + (b - c)}\right)^{\frac{1}{N-1}},$$

$$Q = 1 - \left(\frac{(b-c)}{(a-d)+(b-c)}\right)^{\frac{N}{N-1}}.$$

Iz a > b, in b > c, sledi a > b > c. Predpostavljamo še, da je d najmanj vreden, saj je najpomembneje, da poškodovanec dobi pomoč. Iz tega sledi:

a > b > c > d. Ker je v prejšnjem primeru bilo b > a, vrednosti zamenjamo tako, da je a + b konstantna vrednost, b in c pa sta fiksni, konstantni vrednosti. Zaradi tega lahko ugotovimo:

- Vrednost imenovalca pod korenom se ohrani,
- Vrednost števca pod korenom se zmanjša,
- Verjetnost p se poveča, saj se odštevanec zmanjša (razlika se poveča).

V primeru, da igralec *o* želi izstopati, se verjetnost, da bo poškodovanec dobil pomoč poveča.

4.4 Številski primeri

4.4.1 Posameznik se odloča neodgovorno racionalno

Sedaj bom obravnaval igro iz poglavja 4.2 še številsko, torej bom določil koliko enot koristi igralcu pridobi določen izid.

- a = 300 enot koristi, ker igralec pomaga poškodovancu sam, kljub temu pa za pomoč porabi nekaj lastnega »dragocenega časa.«
- b = 400 enot koristi, ker poškodovanec dobi pomoč, on pa ni zapravil nič lastnega »dragocenega« časa (najboljši izid).
- c = 200 enot koristi, ker igralec porabi lasten čas, ne da bi pomagal igralcu in dobil vsaj dober občutek. Poškodovanec vseeno dobi pomoč, kar je dobra stran.
- d = 100 enot koristi, ker poškodovanec ne dobi pomoči.

Za N = 10 dobimo,

$$p = 1 - \left(\frac{b-c}{(a-d)+(b-c)}\right)^{\frac{1}{N-1}}$$

$$p = 1 - \left(\frac{400-200}{(300-100)+(400-200)}\right)^{\frac{1}{9}}$$

$p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{9}} = 7{,}41\%,$

$Q = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{9}} = 53{,}7\%$

za N = 50 pa:

$p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{49}} = 1{,}40\%.$

$Q = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{49}} = 50{,}7\%$

Pri neskončno veliki skupini (N → ∞) je verjetnost, da bo poškodovanec dobil pomoč 50%.

4.4.2 Posameznik želi izstopati, a > b

- a = 400 enot koristi,
- b = 300 enot koristi,
- c = 200 enot koristi,
- d = 100 enot koristi,

Za N = 10 dobimo,

$p = 1 - \left(\frac{300 - 200}{(400 - 100) + (300 - 200)}\right)^{\frac{1}{9}}$

$p = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{9}} = 14{,}28\%,$

$Q = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{10}{9}} = 78{,}6\%$

za N = 50 pa:

$p = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{49}} = 2{,}79\%.$

$Q = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{50}{49}} = 75{,}7\%$

Pri neskončno veliki skupini (N → ∞) je verjetnost, da bo poškodovanec dobil pomoč 75%.

5 »ČE BI VSI POSTALI BOLJŠI LJUDJE, BI BIL SVET BOLJŠI.«

Pregovor »Če bi vsi postali boljši ljudje, bi bil svet boljši.«, smo že velikokrat slišali in mu večina tudi verjeli. V [2] je zastavljen matematični model, po katerem ta rek ne velja. Dokaz bo podan z variacijo igre Zapornikova dilema.
[2] (Levine K. D.)

5.1 Zapornikova dilema

V poglavju 2.5 je na igri Zapornikova dilema že razloženo Nashevo ravnovesje. Zapornikova dilema je eden izmed najbolj znanih primerov na katerem se lahko uporabi teorija iger. V tem delu je nadgrajena za potrebe razčiščevanja dileme vpliva spremembe ljudi oziroma posameznika, na spremembo sveta.
V poglavjih 5.1, 5.2, 5.3 je primer povzet po [2] (Levine, 2015).

V zaporu sta torej v ločenih celicah zaprta zapornik 1 in zapornik 2, ki sta osumljena kraje.

Tabela 7: Začetna matrika osnovne igre Zapornikova dilema [2] (Levine, 2015).

Zapornik 2

Zapornik 1

	molči	prizna
Molči	5, 5	-4,10
prizna	10, -4	1, 1

Višja številka (enota koristi) v tabeli je višji dobiček in pomeni večjo korist. Če oba zapornika molčita, sta oba iz zapora izpuščena ter si dobiček od kraje razdelita. Dobita vsak po 5 enot koristi. Če eden prizna pri tem pa drugi pa molči, je tisti ki prizna izpuščen, drugi pa si prisluži dolgo zaporno kazen. Ves plen iz kraje tako dobi tisti, ki prizna. S priznanjem si zapornik pridobi 10 enot korist, zapornik ki molči pa -4 enote koristi, saj gre v zapor in tako izgubi celoten delež iz ropa. V kolikor oba priznata, dobita le 1 enoto koristi, saj gresta v zapor, kar je sicer slabše, kot če bi bila izpuščena, vendar bolje kot če bi bila za dlje časa v zaporu. Nashevo ravnovesje najdemo v okvirčku spodaj desno (obarvan zeleno), pri tem, ko sem obrazložitev podal v poglavju 2.5.
V nadaljevanju igro nadgradimo z dodatno možnostjo.

5.2 Igra ponosa

Igra ponosa je v bistvu igra zapornikove dileme, le da je dodana še ena strategija. V nadgradnji igre tako dodamo strategijo imenovano ponos. Matrika igre je pri tem naslednja:

Tabela 8: Matrika razširjene igre Zapornikova dilema - Igra ponosa [2] (Levine, 2015).

Zapornik 2

Zapornik 1

	Je ponosen	Molči	Prizna
Je ponosen	4.0, 4.0	5.4, 3.6	1.2, 0.0
Molči	3.6, 5.4	5.0, 5.0	-4.0, 10.0
Prizna	0.0, 1.2	10.0, -4.0	1.0, 1.0

Če zapornik izbere ponos, potem bo krivdo priznal le v primeru, ko tudi drugi zapornik prizna, oziroma samo če ga bo ta izdal. Na primer, če eden prizna, drugi pa je ponosen, tedaj tisti, ki je ponosen dobi 1.2 enot koristi, tisti ki prizna pa 0.0 enot koristi (kvadratka spodaj levo in zgoraj desno). Razlog je v tem, da ponosen zapornik prizna in pri tem ponižuje drugega igralca, pri tem pa seveda sam ni ponižan (krivdo za prijetje zvali na drugega). V primeru, da sta oba igralca ponosna, dobita oba 4 enote koristi, saj ponižata drug drugega. V kolikor eden od njiju molči, drugi pa je ponosen, dobi tisti ki molči 3.6 enote koristi, tisti ki je ponosen pa 5.4 enote koristi, saj slednji uživa v ponižanosti drugega. V tem primeru za razliko od zapornikove dileme ni Nashevega ravnovesja v kvadratku 1.0, 1.0 (obarvan rdeče), kjer oba priznata, temveč v zgornjem levem 4.0, 4.0 (obarvan zeleno), kjer sta oba ponosna.

5.3 Igra ponosa za »boljše« ljudi

V nadaljevanju igre ponosa domnevamo, da igralca postaneta »boljši osebi«. S tem, ko postanemo boljše osebe, postanemo bolj nesebični, prijaznejši. Igralcema v igri pri tem postane mar drug za drugega, s čimer postane utež za izračun enot koristi drugačna. Sedaj igralec dobi korist tako na osnovi lastnih enot koristi iz igre ponosa (iz »sebične« igre) kot tudi iz enot koristi soigralca. Ker kljub vsemu še vedno nista povsem nesebična, vsak sebe ceni dvakrat bolj kot drugega.

Iz zgornjega sledi, da za izračun enot koristi za zapornika, lahko zapišemo spodnjo enačbo:

$$\frac{2}{3} \cdot s_1 + \frac{1}{3} \cdot s_2 = n_1$$

Pri tem je:

1. $s_1 =$ enote koristi prvega igralca iz »sebične« igre
2. $s_2 =$ enote koristi drugega igralca iz »sebične« igre
3. $n_1 =$ enote koristi prvega igralca v novi, »nesebični« igri

Izračun koristi v primeru, ko prvi zapornik molči, drugi zapornik pa je ponosen:

$$\frac{2}{3} \cdot 3{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 5{,}4 = 4{,}2 \; enot \; koristi$$

$$\frac{2}{3} \cdot 5{,}4 + \frac{1}{3} \cdot 3{,}6 = 4{,}8 \; enot \; koristi$$

Izračun enot koristi v primeru, ko prvi zapornik prizna, drugi pa je ponosen:

$$\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1{,}2 = 0{,}4 \; enot \; koristi$$

$$\frac{2}{3} \cdot 1{,}2 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0{,}8 \; enot \; koristi$$

Matriko Igre ponosa sedaj izpolnimo tako, da zamenjamo podatke s pripadajočimi izračunanimi novimi enotami koristi igralcev.

Tabela 9: Matrika Igre ponosa, za "boljšega" posameznika [2] (Levine, 2015).

		Zapornik 2		
		Je ponosen	Molči	Prizna
Zapornik 1	Je ponosen	4.0, 4.0	4.8, 4.20*	0.8, 0.4
	Molči	4.20*, 4.80	5.00, 5.00	0.67, 5.33*
	Prizna	0.40, 0.80	5.33*, 0.67	1.00*, 1.00*

V matriki so z zvezdico (*) označeni tisti dobički, ki so najvišji glede na ostale dobičke, ki jih dobi zapornik z različnimi potezami, glede na potezo drugega zapornika. Na primer, 4.2 v izidu zapornik 1 molči, zapornik 2 je ponosen, je dobiček označen z zvezdico zato, ker je to najboljša poteza zapornika 1, če je zapornik 2 ponosen.

V novi matriki je razvidno, da se je nekaj dobičkov spremenilo, zaradi česar tudi zaporniki spremenijo svoje strategije odločanja. Zapornik 1 bo naredil drugačne poteze (ubral drugačno strategijo), kot v prejšnji igri. Če zapornik 2 sedaj izbere, da bo ponosen, zapornik 1 v tej igri ne bo izbral, da bo tudi on ponosen, saj opazi, da dobi več enot koristi če molči (4,2 > 3,6). Pri tem se prav tako znižajo tudi enote koristi zapornika 2, zaradi česar zapornik 1 ne pridobi le 0,6 enot (razlika med enotami v prejšnji igri in zdajšnji igri) ampak se približa zaporniku 2 še za dodatnih 0,6 enote, kar nanese skupaj 1,2 enoti koristi več kot v prejšnji igri (kvadratek 4.2, 4.8*). Izid zapornika 2 je označen z zvezdico (4,8*), zato ker zapornik 2 dobi največji dobiček. Ker pa zapornik 2 vidi, da je za njega bolje, če tudi sam molči, saj s tem dobi več enot koristi (5.33 > 4.9), spremeni potezo v molčanje (kvadratek 5.00, 5.00). Sedaj pa zapornik 1 vidi priložnost za priznanje, saj dobi več enot koristi in se zato odloči za priznanje (kvadratek 5.33*, 0,67). Tukaj zapornik 2 ponovno opazi, da bi bilo bolje spremeniti potezo, sedaj na priznanje. Nazadnje oba priznata (kvadratek 1.00*, 1.00*), ker pa imata oba zapornika pri tem največja dobička, igralca lastne strategije ne bosta spremenila, saj imata glede na potezo nasprotnika že najvišji dobiček. To pomeni, da je v tem izidu Nashevo ravnovesje.

In zakaj začetna trditev »Če bi vsi postali boljši ljudje, bi bil svet boljši.« v tem modelu ne drži? Razlog je v porušitvi Nashevega ravnovesja. Sedaj ni več Nashevega ravnovesja takrat ko sta oba ponosna, saj bi oba rada spremenila svojo potezo na molčanje. Nashevo ravnovesje tudi ni, ko oba molčita, saj bi oba rada spremenila potezo na priznanje. Ravnovesje pa najdemo v izidu, kjer oba priznata. Ker oba zapornika želita spremeniti potezo iz biti ponosen na priznanje ter s tem dobiti raje oba 1.00 enoto koristi kot pa oba 4.00 enote koristi, se Nashevo ravnovesje poruši in spremeni tako, da oba dobita samo 1.00 enoto koristi.
Igralca sta postala boljši osebi, ampak ali je tudi svet postal boljši?
Zaključimo lahko, da čeprav oba želita postati boljša, se ravnovesje poruši in svet ter vsi pademo na slabše, saj če se posameznik zadovolji z nižjo enoto koristi, potem tudi družba zagotovo ni na boljšem. Tako bi tudi, če bi postali bolj prijazni in nesebični, prej začeli opraščati

kriminalna dejanja. Seveda bi se tudi nesebični kriminalci odločili, da ne bodo več izvajali kriminalnih dejanj, kljub temu pa bi raven kriminala narasla, saj bi bil kriminal prej oproščen in pozabljen, kar bi h kriminalu pritegnilo še več ljudi. Tako bi tudi svet postal slabši. In zato tudi trditev »če bi vsi postali boljši ljudje, bi bil svet boljši« po tem modelu ne velja.
[2] (Levine K. D.)

5.4 Variacije Igre Ponosa za boljše ljudi – Iskanje Nashevih ravnovesij

Rezultati z zaključki iz predhodnega poglavja vsekakor niso obetavni in lahko ugotovimo, da so vprašljivi za realni svet. Zaradi tega, sem naredil še druge možne postavitve modela in njihove rešitve. V teh novih modelih so poiskana še vsa ostala Nasheva ravnovesja tako, da se spreminja odnos med posameznima osebama glede na to, koliko se osebi med seboj cenita. To spremenljivko označimo z U. Vsi začetni podatki so privzeti po tabeli 8. Za vse naslednje primere velja, da iščemo U - je na intervalu [0,1].

5.4.1 Matrike iger z enim Nashevim ravnovesjem

V tem poglavju bomo poiskali dva modela. V vsakem modelu nastopi natanko en takšen izid, da se nobenemu od igralcev ne splača spremeniti strategije, torej natanko eno Nashevo ravnovesje.

5.4.1.1 Skoraj popolnoma »prevzgojen« zapornik

V tem modelu skoraj popolnoma prevzgojenega zapornika nastopi Nashevo ravnovesje samo v izidu (Molči, Molči (5.0, 5.0)). To je natanko takrat, ko bo zapornik 1 v izidu (Prizna, Molči), dobil manj kot 5 enot koristi, pri tem pa bo v izidu (Molči, Je ponosen) dobil več kot 4 enote koristi. To nastopi v primeru, ko zapornik 1 ceni sebe U – krat toliko, kot ceni zapornika 2. Upoštevamo, da manjši kot je U, bolj zapornika cenita drug drugega. Najprej izračunamo, koliko mora biti U, da zapornik 1 dobi v izidu (Prizna, Molči), manj kot 5 enot koristi:

$$10 \cdot U + \big(-4 \cdot (1 - U)\big) < 5$$

$$10U - 4 + 4U < 5$$

$$\mathbf{U} < \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{14}}$$

Sedaj izračunamo še, koliko mora biti U, da zapornik, ki molči v izidu (Molči, Je ponosen), dobi več kot 4 enote koristi:

$$3{,}6 \cdot U + 5{,}4 \cdot (1 - U) > 4$$

$$-1{,}8U > -1{,}4$$

$$\boldsymbol{U < \frac{7}{9}},$$

Ugotovimo, da mora biti $U < \frac{9}{14}$.

Matrika igre za izbran $U = \frac{4}{9}$:

Tabela 10: Matrika igre za skoraj popolnoma prevzgojena zapornika

Zapornik 2

Zapornik 1		Je ponosen	Molči	Prizna
	Je ponosen	4.0, 4.0	4.4, 4.6	0.53, 0.66
	Molči	4.6, 4.4	5.0, 5.0	3.8, 2.2
	Prizna	0.66, 0.53	2.2, 3.8	1.0, 1.0

Iz matrike ugotovimo, da je dominantna strategija obeh zapornikov, da molčita, Nashevo ravnovesje pa je v izidu (Molči, Molči) (5.0 5.0). S tem dobita tudi najvišji možni dobiček. V tem primeru opazimo, da bosta zapornika dobila najvišji dobiček takrat, ko cenita drugega približno toliko kot sebe.

5.4.1.2 Sebičen zapornik

V nadaljevanju nas zanima, kdaj bo Nashevo ravnovesje samo v izidu (Je ponosen, Je ponosen). Pridemo do ugotovitve, da bo Nashevo ravnovesje v tem izidu natanko takrat, ko bo zapornik, ki molči, dobil v izidu (Molči, Je ponosen) manj kot 4 enote koristi. Prav tako mora zapornik, ki je ponosen, v izidu (Prizna, Je ponosen) prejeti več kot 1 enoto koristi.

Izračun:

$$3.6 \cdot U + 5.4 \cdot (1 - U) < 4$$
$$-1.8U < -1.4$$
$$U > \frac{7}{9}$$

$$1.2 \cdot U + 0 \cdot (1 - U) > 1$$
$$U > \frac{5}{6}$$

Veljati mora strožji izmed pogojev, in ker je $\frac{7}{9} < \frac{5}{6}$, bosta zapornika dobila prav ta dobiček, ko bo U > $\frac{5}{6}$.

Za matriko igre izberem $U = \frac{8}{9}$:

Tabela 11: Matrika igre za skoraj popolnoma sebična zapornika

Zapornik 2

Zapornik 1		Je ponosen	Molči	Prizna
	Je ponosen	4.0, 4.0	5.2, 3.8	1.1, 0.1
	Molči	3.8, 5.2	5.0, 5.0	-2.4, 8.4
	Prizna	0.1, 1.1	8.4, -2.4	1.0, 1.0

Iz matrike ugotovimo, da je dominantna strategija obeh zapornikov, da sta ponosna, Nashevo ravnovesje pa je v izidu (Je ponosen, Je ponosen) (4.0 4.0). V tem primeru opazimo, da bosta zapornika dobila najvišji dobiček takrat, ko jima bo zelo mar zase oziroma skoraj vseeno za drugega.

5.4.2 Matrike iger z več kot enim Nashevim ravnovesjem

V tem poglavju bomo poiskali modele iger s takšnimi U – ji, da dobimo več kot eno Nashevo ravnovesje. Takšni primeri so posebni zato, ker posamezen primer zadosti natanko en U, pod strogimi pogoji.

5.4.2.1 Prvi poseben primer

V tem primeru želimo najti štiri Nasheva ravnovesja, ki nastopijo v izidih (Je ponosen, Je ponosen), (Molči, Je ponosen), (Je ponosen, Molči) in (Molči, Molči). Ta Nasheva ravnovesja dobimo natanko tedaj, ko v izidu (Molči, Je ponosen), dobi igralec, ki molči, 4 enote koristi, igralec, ki je ponosen, pa 5 enot koristi. Izračun:

$$3.6 \cdot U + 5.4 \cdot (1 - U) = 4$$
$$-1.8U = -1.4$$
$$U = \frac{7}{9}.$$

Igra bo v prej naštetih izidih imela štiri Nasheva ravnovesja tedaj, ko bo $U = \frac{7}{9}$.

Matrika igre:

Tabela 12:Matrika igre za prvi posebni primer

Zapornik 2

Zapornik 1		Je ponosen	Molči	Prizna
	Je ponosen	4.0, 4.0	5.0, 4.0	0.93, 0.27
	Molči	4.0, 5.0	5.0, 5.0	6.9, -0.9
	Prizna	0.27, 0.93	-0.9, 6.9	1.0, 1.0

Iz matrike ugotovimo, da je dominantna strategija obeh zapornikov, da molčita. Vidimo, da dejansko nastopijo Nasheva ravnovesja v izidih (Je ponosen, Je ponosen) (4.0, 4.0), (Molči, Je ponosen) (4.0, 5.0), (Je ponosen, Molči) (5.0, 4.0) in (Molči, Molči) (5.0, 5.0). V tem primeru opazimo, da bosta zapornika dobila najvišji dobiček takrat, ko je U enak $\frac{7}{9}$, kar pomeni, da natanko toliko (močno) skrbita le zase.

5.4.2.2 Drugi posebni primer

Tudi v tem primeru želimo najti štiri Nasheva ravnovesja in sicer v izidih (Molči, Molči), (Molči, Prizna), (Prizna, Molči) in (Prizna, Prizna). Ta Nasheva ravnovesja najdemo v igri natanko tedaj, ko v izidu (Prizna, Molči) dobi igralec, ki prizna, 5 enot koristi, igralec, ki molči, pa 1 enoto koristi. Izračun:

$$10 \cdot U - 4 \cdot (1 - U) = 5$$

$$14U = 9$$

$$U = \frac{9}{14}$$

Igra bo v prej naštetih izidih imela štiri Nasheva ravnovesja natanko tedaj, ko bo $U = \frac{9}{14}$. Matrika igre:

Tabela 13: Matrika igre za drugi posebni primer

Zapornik 2

Zapornik 1

	Je ponosen	Molči	Prizna
Je ponosen	4.0, 4.0	4.76, 4.24	0.77, 0.43
Molči	4.24, 4.76	5.0, 5.0	1.0, 5.0
Prizna	0.43, 0.77	5.0, 1.0	1.0, 1.0

Iz matrike ugotovimo, da je tudi tukaj dominantna strategija obeh zapornikov, da molčita. Nasheva ravnovesja pa v izidih nastopijo tam, kjer smo želeli. V tem primeru opazimo, da bosta zapornika dobila najvišji dobiček takrat, ko jima bo za drugega malo manj mar, kot zase pri $U = \frac{9}{14}$.

6 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Vsa teorija iger, ki sem jo opisoval, temelji na racionalnem odločanju posameznika. Ker pa ostali ljudje vedo, kako se bo oseba odločala in posledično poteze, ki jih bo ta oseba naredila, je verjetno, da se bo oseba počutila, kot da je izgubila lastno svobodo. Zaradi tega bo tudi naredila povsem neracionalno potezo ter izgubila. To, da neka oseba naredi popolnoma neracionalno potezo, da bi si dokazala, da ima še vedno sama kontrolo nad svojim odločanjem, je povezano z eno izmed idej o »svobodi« človeka, **perverzni svobodi** (perverse freedom). To se pogosto opazi takrat, ko nam nekdo nekaj svetuje, mi pa bomo naredili ravno obratno, da mu dokažemo, da se znamo sami odločati, čeprav ima lahko naše dejanje hude posledice. Glede na to, da teorija iger temelji na racionalnem odločanju, je takšno dejanje velikokrat lahko tudi zelo dobro, saj naredi igralec potezo, ki je nasprotnik ni pričakoval ter se mora zato odzvati s potezo, ki je velikokrat prav tako neracionalna. S tem se poruši celotno ravnovesje igre, izid za vsakega igralca je zaradi tega lahko zelo drugačen od pričakovanega, v pozitivnem ali negativnem smislu. Lep primer delovanja osebe na osnovi te teorije je opisana v knjigi Dostojevskega (Pisma iz podzemlja), kjer glavni junak zelo zboli vendar kljub temu ne želi k zdravniku, ker se mu zdi, da bo zato izgubil svojo absolutno svobodo. Ta misel je v vseh nas, čeprav ne v tako skrajnih idejah, zaradi česar je izsledke iz teorije iger in na splošno iz matematike, zelo težko posplošiti na realne situacije. Verjetno bi bilo najbolje za vse, da bi se odločali bolj racionalno, čeprav to pomeni izgubo »osebne svobode«. Ta odlomek temelji na [4] in [5].

Teorija iger temelji na racionalnem odločanju, postavljanju svojih interesov pred interese drugih, iz česar izhaja sebičnost ljudi in materializiranost družbe. Poraja se vprašanje, ali so otroci leni, ali pa so le racionalni do sebe? Kot sem tudi pokazal, ljudje raje prenesejo odgovornost na druge kot da bi se sami znašli pod tem »bremenom pomoči« drugim. Torej v teoriji sploh ni jasno zakaj so ljudje dobrodelni? Zakaj bi ljudje bili odgovorni do družbe, če pa naj bi delali samo za lastno korist? Teorija iger te nauči, da je vzgoja in izobraževanje izredno pomemben del razvoja posameznika in njegovega mišljenja, odnosa do drugih, do družbe in okolja, saj ugotoviš, da si je nujno zastavljati vedno kompleksnejša pravila igre in motivacije, ki vključujejo človeške faktorje vključno s človečnostjo in odgovornostjo, ki so najdolgoročnejši cilji in temelji vsake družbe v nasprotju z golim koristoljubjem in materializmom.

7 ZAKLJUČEK

Raziskal sem verjetnosti in matematično upanje v povezavi s teorijo iger ter analiziral optimalne strategije, ki jih lahko imajo ljudje v določenih situacijah.

Spoznal sem, da smo v določenih matematičnih modelih ljudje izredno sebična bitja, saj ne bomo naredili za druge ljudi popolnoma ničesar, če ne bomo zaznali koristi, pri tem pa od drugih pričakujemo takojšnjo pomoč. Pri matematičnem modelu povezanosti med velikostjo skupine in pripravljenostjo na pomoč posamezniku sem ugotovil, da ljudje raje ne pomagajo posamezniku, če to pomeni, da ne bodo dosegli pričakovane koristi. V tem primeru se odločijo za drugo strategijo in odgovornost preložijo na drugo osebo. Zaradi tega je verjetnost, da bo sploh kdo pomagal, manjša. V nalogi sem na različnih modelih pokazal, da je verjetnost nudenja pomoči potrebnemu pri obravnavi sebičnih, materialistično usmerjenih ljudi, dosti nižja kot v primeru, ko modeliramo družbeno odgovorne ljudi, vendar pa se verjetnost pomoči še vedno manjša z velikostjo skupine.

Poskusil sem tudi dognati, ali bi bil svet boljši, če bi vsi postali boljši ljudje. Pri postavljenem modelu sem ugotovil, da to ne velja, ker če v igri upoštevamo, da je igralec postal boljši človek, ugotovimo, da se prejšnje Nashevo ravnovesje poruši in sedaj dobimo novo ravnovesje, ki pa nam prinese veliko manjši dobiček kot prej. In če dobimo manjši dobiček, ko smo boljši ljudje, to očitno pomeni, da je svet na slabšem. To pa velja le za model iz vira [2]. V nadaljnjem raziskovanju, ko sem postavil druge modele, se je izkazalo, da je to močno odvisno od medsebojnega odnosa igralcev, saj boljši kot je odnos med igralci, višji je pričakovan dobiček. V končni fazi pridemo do zaključka, da kar je dobro za posameznika, je dobro tudi za družbo. Kadar se tega zavedamo in matematično modeliramo iz tega vidika, lahko dobimo tudi drugačne rezultate.

8 VIRI

[1] Harrington, E. J. Jr. (1999) A Simple Game-Theoretic Explanation for the Relationship between Group Size and Helping. 1. izdaja. The John Hopkins University. [17.11.2015]. Dostopno na http://goo.gl/CloJ34

[2] Levine K. D. "Economic and Game Theory: What Is Game Theory?" Department of Economics, UCLA dostopno na http://goo.gl/Kx6tH

[3] Lešnjak, G.: MATEMATIKA: 1. Izdaja. Tržič: Učila International, 2008

[4] Philosophy 101. [26. 1. 2016]. Dostopno na http://goo.gl/VmxizW

[5]"Philosophy Thoughts." [26. 1. 2016]. Dostopno na http://goo.gl/lw8MPY

[6] Prisner E. (2014). Game Theory through examples. 1. izdaja. Mathematical Association of America. [18.11.2015]. Dostopno na http://goo.gl/fnbijh

[7] Raič, M. (7. 11. 2014). Rešene naloge iz teorije iger. Dostopno na http://goo.gl/FFXKFv

[8] Turocy L. T. in von Stengel B. (8. 1. 2001). Game theory*. 1st draft. Texas A&M University in London School of Economics. [17.11.2015]. Dostopno na http://goo.gl/VPPb2

[9] Ule A. (Februar – April 2015). Teorija Iger. 1. Izdaja. Famnit. [4.12.2015]. Dostopno na https://goo.gl/9A8MlR

[10]Yavoz Duman E. Lecture 5: Mathematical Expectation: Intruduction to probability and statistics. 1. izdaja. Istanbul Kültür University. [10.1.2016]. Dostopno na http://goo.gl/Ir1MM8