Mladi za napredek Maribora 2016

33. srečanje

Števila v mreži

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: VITO VERDNIK, JULIJA VIDMAR

Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ

Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2016

Kazalo

1. Povzetek

Poznamo naravna števila. Z njimi preštevamo. Zamislimo si mrežo polj, v katera lahko vpisujemo zaporedna naravna števila. Poznamo prvo vpisano število. Katero je zadnje število, ki ga vpišemo v mrežo? A moramo za to da ga poznamo, vpisati vsa naravna števila v mreži? Poleg tega problema najdemo v mreži naravnih števil še kako zanimivo lastnost. Na primerih vam predstavljava te lastnosti.

2. Uvod

Naravno število je katerokoli število iz neskončne množice pozitivnih celih števil, *IN* = {1, 2, 3, ...}. Najmanjše naravno število je 1. Vsako naravno število ima naslednika, za ena večje število. Vsako naravno število, razen števila 1 ima predhodnika (za ena manjše število).

Naravna števila seštevamo, odštevamo, množimo, delimo. Vsoto naravnih števil izračunamo tako, da med seboj seštejemo vrednosti dveh ali več naravnih števil. Vsota dveh zaporednih naravnih števil je liho število, saj je izmed dveh zaporednih naravnih števil eno vedno sodo, drugo liho. Če je eno število n, je naslednje $n + 1$. Vsota je tako $2n + 1$. Člen $2n$ je vedno sodo število, saj je deljiv s številom 2. Če pa sodemu številu prištejemo število 1, je vsota liho število.

Vsoto prvih nekaj (n) zaporednih naravnih števil izračunamo tako, da seštevamo vrednosti zaporednih naravnih števil od 1 naprej.

PRIMER:

1 + 2 = 3

1 + 2 + 3 = 6

1 + 2 + 3 + 4 = 10

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

…

Ampak ko pridemo do večjega števila zaporednih naravnih števil lahko računanje kar dolgo traja. S tem problemom se je srečal v šoli tudi Gauss, ki je moral sešteti prvih petdeset naravnih števil.

Zapišimo formulo, s katero je veliko lažje in hitreje izračunamo vsoto prvih n zaporednih naravnih števil, $\frac{n(n+1)}{2}$.

PRIMER: Vsota vseh zaporednih naravnih števil do števila 25. $\frac{25(25+1)}{2}$ = 325, vsota vseh zaporednih naravnih števil do števila 25 je 325.

3. Mreža števil

Številska mreža ali mreža števil, je mreža, sestavljena iz kvadratkov (polj) v katerih so zapisana poljubna zaporedna naravna števila. Na primeru (slika 1) je narisana mreža s petimi stolpci in petimi vrsticami. Prvo število v mreži je število 7. Zadnje število v mreži je število 31.

7	8	9	10	11
12	13	14	15	16
17	18	19	20	21
22	23	24	25	26
27	28	29	30	31

Slika 1

Poljubna številska mreža ima *m* stolpcev in *n* vrstic. Rečemo ji *m* x *n* mreža. O kvadratni mreži govorimo, če je število stolpcev enako številu vrstic (slika 2). Prvo naravno število smo zapisali z a_1, gre za poljubno naravno število v mreži 5 x 5.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
				a_{25}

Slika 2

3.1 Zadnje število v mreži

Kako izračunamo zadnje število v mreži (na zadnjem polju), če poznamo samo prvo?

Seveda bi lahko zapisali v polja vsako naslednje število v mreži, kar bi lahko dolgo trajalo, zato premislimo, kako to lažje naredimo.

PRIMER: Izračunati želimo zadnje število v mreži 5 x 5. Prvo število v mreži je 9. Za lažji razmislek je mreža že izpolnjena (slika 3).

9	10	11	12	13
14	15	16	17	18
19	20	21	22	23
24	25	26	27	28
29	30	31	32	33

Slika 3

Ker vsakemu številu prištejemo naslednika, za 1 večje število, preštejemo število polj v mreži, to je v našem primeru 25. K prvemu številu v mreži prištejemo število vseh polj mreže, tako je 9 + 25 = 34. Ker smo eno polje (prvo) dvakrat upoštevali, odštejemo število 1, torej je zadnje število v mreži 9 + 25 – 1 = 33.

PRIMER: Vzemimo pravokotno mrežo 4 x 6, kar pomeni, da ima mreža štiri stolpce in šest vrstic. Prvo število v mreži je število 7. Zadnje število v mreži je število 30 (slika 4).

7	8	9	10
11	12	13	14
15	16	17	18
19	20	21	22
23	24	25	26
27	28	29	30

Slika 4

Brez zapisovanja vseh števil v mrežo, izračunamo število polj v mreži, torej 4 · 6 = 24. Ker moramo prvo polje s številom 7 upoštevati le enkrat, odštejemo število 1 in izračunamo zadnje število v mreži, 7 + 24 – 1 = 30.

<u>UGOTOVITEV</u>: Če v mreži *m* x *n* poznamo prvo vpisano število, izračunamo zadnje vpisano število s formulo $a + mn - 1$, kjer smo z *a* zapisali prvo naravno število v mreži.

Primer.

V mreži 20 x 30 in prvem vpisanem številu 56, je zadnje vpisano število 56 + 600 – 1 = 655.

Sklepamo lahko tudi v nasprotno smer, torej če poznamo zadnje zapisano število v mreži, izračunamo prvo z odštevanjem števila polj.

<u>UGOTOVITEV</u>: Če v mreži *m* x *n* poznamo zadnje vpisano število, izračunamo prvo vpisano število s formulo $b - mn + 1$, kjer smo z *b* zapisali zadnje naravno število v mreži.

3.2 Vsota vseh števil v mreži

Če želimo izračunati vsoto vseh števil v mreži, lahko vsa števila seštejemo, saj gre za vsoto zaporednih naravnih števil, ampak to lahko nekaj časa traja. Če pa želimo to narediti na preprostejši način, moramo poznati najmanj dva podatka o mreži in sicer prvo število v mreži ter število stolpcev in vrstic (dimenzije mreže). Pri računanju vsote uporabimo formulo za izračun vsote prvih *n* naravnih števil, oziroma postopek za izračun vsote zaporednih naravnih števil, ki se ne začnejo s številom 1.

PRIMER: Imamo kvadratno mrežo dimenzije 5 x 5. Prvo število v mreži je 7 (slika 5).

7				

Slika 5

Zadnje število v mreži je 31 = 7 + 25 – 1 . Tako računamo vsoto 7 + 8 + … + 31. Vsak seštevanec lahko zapišemo kot vsoto nekega števila s številom 7, tako je

$7 + (7 + 1) + (7 + 2) + \ldots + (7 + 24) = 25 \cdot 7 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 24) = 175 + \frac{24 \cdot 25}{2} = 175 + 300 = 475.$

Iz zapisa ugotovimo, da prvi člen 25 · 7 pomeni, kot da je na vsakem polju mreže število 7. Drugi člen je vsota prvih 24 –ih naravnih števil, torej za eno manj kot je število vseh polj. Vsoto vseh števil v mreži bi lahko torej zapisali kar

$$7 \cdot 5 \cdot 5 + \frac{(5 \cdot 5 - 1) \cdot 5 \cdot 5}{2} = 175 + 300 = 475.$$

Poglejmo primer za pravokotno mrežo, kjer število stolpcev ni enako številu vrstic.

PRIMER: Imamo pravokotno mrežo 4 x 6 s prvim številom 7 in štiriindvajsetimi polji. Izračunajmo vsoto vseh števil v mreži (slika 6).

7	8	9	10
11	12	13	14
15	16	17	18
19	20	21	22
23	24	25	26
27	28	29	30

Slika 6

Uporabimo enak postopek kot prej. Če je na vsakem polju število 7, bi bila vsota vseh sedmic 24 · 7 = 168. Izračunati bi morali še vsoto zaporednih naravnih števil do števila 23 (na prvem polju je samo število 7 = 7 + 0). Tako je

$$7 \cdot 6 \cdot 4 + \frac{(6 \cdot 4 - 1) \cdot 6 \cdot 4}{2} = 168 + 23 \cdot 12 = 168 + 276 = 444.$$

Vsota vseh števil v mreži je 444.

<u>UGOTOVITEV:</u> Vsoto vseh naravnih števil v mreži *m* x *n*, kjer je prvo naravno število *a*, izračunamo s formulo $a \cdot m \cdot n + \frac{(mn-1) \cdot mn}{2}$.

3.3 Števila v vrsticah in stolpcih mreže

V vrstici mreže so zapisana zaporedna naravna števila. Koliko jih je, je odvisno od števila stolpcev mreže (*m*).

Če želimo izračunati vsoto števil ene vrstice v mreži, moramo števila sešteti, ampak jih je lahko veliko. Zato bomo spet povezali prvo število v mreži z dimenzijami mreže. Poglejmo najprej primere.

PRIMER: Želimo izračunati vsoto vseh števil v prvi vrstici mreže 5 x 5. Število stolpcev v mreži je 5, prvo število v prvi vrstici pa naj bo spet 7 (slika 7).

7				

Slika 7

V prvi vrstici je pet zaporednih naravnih števil, ker je *m* = 5. Seštejemo torej števila 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45. Če poznamo prvo število 7, razmišljamo enako, kot za vsoto števil celotne mreže in zapišemo 7 + (7 + 1) + (7 + 2) + (7 + 3) + (7 + 4) = 7 · 5 + (1 + 2 + 3 + 4) = 35 + 10 = 45.

Zapišemo lahko tudi $5 \cdot 7 + \frac{(5-1)\cdot 5}{2} = 35 + 10 = 45$.

<u>UGOTOVITEV</u>: Vsota števil v **prvi** vrstici mreže *m* x *n* s prvim številom *a* je $a \cdot m + \frac{(m-1)\cdot m}{2}$.

Kako pa izračunamo vsoto števil v poljubni vrstici mreže? Uporabimo zgornji primer (slika 8).

7				
12				
17	18	19	20	21

Slika 8

Prvo število v vrstici je število 17. Je za 10 večje od prvega števila v mreži. Prvo število v drugi vrstici je za 5 večje od prvega števila v mreži. Prvo število v četrti vrstici je za 15 večje od prvega števila v mreži. Prvo število v peti vrstici je za 20 večje od prvega števila v mreži. Tako ugotovimo, da je prvo število v posamezni vrstici večje za (*k* – 1)·*m*. Če je prvo število mreže *a*, poljubno vrstico označimo s *k*, je prvo število poljubne vrstice te mreže $a + (k-1) \cdot m$. Vsota števil 17 + 18 + 19 + 20 + 21 = $17 \cdot 5 + \frac{4\cdot 5}{2} = 85 + 10 = 95$.

PRIMER: Imamo pravokotno mrežo 4 x 6 s prvim številom 7. Izračunajmo vsoto vseh števil v peti vrstici mreže (slika 9).

7			
23			

Slika 9

Uporabimo enak postopek kot prej. Prvo število pete vrstice je 7 + (5 – 1)·4 = 23. Z vpisovanjem števil se lahko o tem tudi prepričamo. Tako seštejemo števila 23 + 24 + 25 + 26 + 27 po že znanem postopku, $23 \cdot 4 + \frac{3 \cdot 4}{2} = 92 + 6 = 98$.

UGOTOVITEV: Vsoto števil v poljubni *k*-ti vrstici mreže števil, izračunamo s formulo $a + (k-1) \cdot m + \frac{(m-1) \cdot m}{2}$, kjer je *a* prvo število v kvadratni mreži, *m* je število stolpcev v mreži.

V nadaljevanju poglejmo, kako računamo vsote v posameznih stolpcih mreže.

PRIMER: Želimo izračunati vsoto vseh števil v prvem stolpcu mreže 5 x 5. Število stolpcev v mreži je 5, prvo število v prvem stolpcu pa naj bo spet 7 (slika 10).

7				

Slika 10

Ugotovili smo že, da je vsako število v naslednjem stolpcu od prvega števila večje za 5. tako za prvi stolpec zapišemo vsoto 7 + 12 + 17 + 22 + 27 = 7 + (7 + 5) + (7 + 2·5) + (7 + 3·5) + (7 + 4·5) = 5·7 + (1 + 2 + 3 + 4)·5 = 35 + 50 = 85.

Poglejmo še primer mreže 4 x 6 s prvim številom 13 (slika 11).

13			

Slika 11

Izračunati moramo vsoto števil 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31. Prvo število je 11 (število *a*), stolpci so štirje (*m* = 4), vrstic je šest (*n* = 6). Tako je 11 + (11 + 4) + (11 + 2·4) + (11 + 3·4) + (11 + 4·4) + (11 + 5·4) = 6·11 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)·4 = 66 + 15·4 = 66 + 60 = 126.

UGOTOVITEV: Če je prvo število v prvem stolpcu *a*, število stolpcev *m*, število vrstic *n* izračunamo vsoto števil v prvem stolpcu mreže s formulo $na + \frac{(n-1)n}{2} \cdot m$.

V zgornjem primeru vsoto 126 izračunamo s formulo $6 \cdot 11 + \frac{(6-1)\cdot 6}{2} \cdot 4 = 66 + 60 = 126.$ Poglejmo, kako izračunamo vsoto števil v poljubnem stolpcu mreže, ki ima prvo število *a*, *m* stolpcev in *n* vrstic.

Izračunajmo vsoto števil v tretjem stolpcu mreže 4 x 6 s prvim številom 11 (slika 12).

11	12	13	

Slika 12

Prvo število je za 2 večje od 11 (13 = 11 + 2). Računamo vsoto števil 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 = 13 + (13 + 4) + (13 + 2·4) + (13 + 3·4) + (13 + 4·4) + (13 + 5·4) = 6·13 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)·4 = 78 + 15·4 = 78 + 60 = 138.

K prvemu številu v stolpcu prištejemo za ena manjše število, kot je številka stolpca.

UGOTOVITEV: Vsota števil v poljubnem stolpcu s prvim številom mreže *a* in številko stolpca *k*, je $n(a+(k-1))+\frac{(n-1)n}{2}\cdot m$.

Tako je recimo vsota števil v četrtem stolpcu mreže 5 x 5 s prvim številom v mreži 23 enaka $5\cdot(23+3)+\frac{(5-1)\cdot 5}{2}\cdot 5=130+50=180.$

V nadaljevanju poglejmo še nekaj zanimivih lastnosti naravnih števil v mreži.

4. Križi v številski mreži

Naj bodo »križi« v številski mreži oblike, ko se v enem polju prekrivata vodoravni in navpični trak enakega števila polj. Na primeru (slika 13) je v kvadratni mreži 5 x 5 označen križ, ki ima skupno število 19. Vodoravno prekriva polja od 17 do 21 (19 – 2 in 19 + 2), navpično prekriva polja 9, 14, 19, 24 in 29.

7	8	9	10	11
12	13	14	15	16
17	18	19	20	21
22	23	24	25	26
27	28	29	30	31

Slika 13

Poglejmo števila v navpičnem delu (stolpcu) križa. Vemo že, da je vsako naslednje število pod prvim številom večje za število stolpcev v mreži. V tem primeru je to 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19, 19 + 5 = 24 in 24 + 5 = 29. Lahko zapišemo naslednje pravilo: $a + m = b$, $b + m = a + 2m = c$, … (slika 14).

7	8	*a*	10	11
12	13	*b*	15	16
17	18	*c*	20	21
22	23	*d*	25	26
27	28	*e*	30	31

Slika 14

UGOTOVITEV: za poljubno število p v stolpcu velja $p = a + (k – 1)\cdot m$, kjer je k število vrstice, m pa število stolpcev v mreži.

Sedaj poznamo pravilo za števila v stolpcih. Kaj pa za števila v vrstici? Že od prej vemo, da se z leve proti desni števila večajo po 1 (slika 13). Za števila v vrstici velja naslednje pravilo: $a + 1 = b$, $b + 1 = a + 2 = c$ itd.

7	8	9	10	11
12	13	14	15	16
a	*b*	*c*	*d*	*e*
22	23	24	25	26
27	28	29	30	31

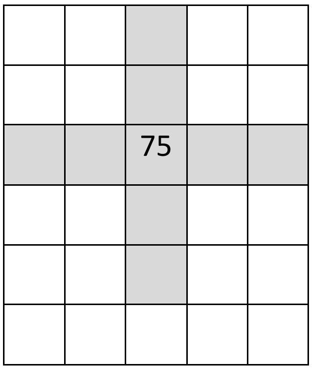
Slika 14

UGOTOVITEV: Za poljubno število p v vrstici velja $p = a + (k - 1)$, kjer je k število stolpca.

Na sliki 13 opazimo, da je vsota skrajnih števil tako v stolpcu (29 + 9) kot v vrstici (17 + 21) enaka dvakratniku osrednjega števila, 2·19 = 38. Prav enako ugotovimo za naslednja para števil (14 + 24 in 18 + 20).

Lastnost lahko opazujemo samo v križih z lihim številom polj v vrstici oziroma stolpcu. Ne moremo namreč oblikovati križa s sodim številom polj v vrstici oziroma stolpcu.

Ugotovljena lastnost nam lahko pomaga pri dopolnjevanju poljubne mreže. Vzemimo mrežo 5 x 6 (slika 15).



Slika 15

Dopolnimo osenčena polja s števili. Ker gre za zaporedna naravna števila sta na poljih levo števili 73 in 74. Desno sta števili 76 in 77. Vsota 73 + 77 = 150 in 74 + 76 = 150. Števili nad številom 75 sta za 5 oziroma 10 manjši, ker je 5 stolpcev, to sta 70 in 65. Pod številom 75 pa sta števili 80 in 85. Tudi tukaj velja 65 + 85 = 150 in 70 + 80 = 150.

5. Diagonale v mreži

Diagonale (slika 16) v mreži so polja, ki potekajo iz ene strani na nasprotno stran, posamezna polja se dotikajo v točki. Diagonale mreže opazujmo le v kvadratnih mrežah, kjer je število stolpcev enako številu vrstic.

7	8	9	10	11
12	13	14	15	16
17	18	19	20	21
22	23	24	25	26
27	28	29	30	31

Slika 16

Najdaljša diagonala mreže 5 x 5 poteka od prvega polja (zgoraj levo) do zadnjega polja (spodaj desno). V diagonali je pet števil, toliko kot je v mreži vrstic (stolpcev). Zapišemo zaporedje števil 7, 13, 19, 25, 31. Razlika med zaporednimi členi tega zaporedja števil je šest. S še drugimi primeri ugotovimo, da je vsako naslednje število od prvega števila v mreži večje za $m + 1$, kjer je m število stolpcev mreže. Do k – tega števila v diagonali, ki leži v k – ti vrstici pridemo tako:

$a_k = a + (k - 1)(m + 1)$.

Na enak način lahko izračunamo števila v diagonali mreže, ki poteka z desne (desno zgoraj) proti levi (levo spodaj). Števila po diagonali naraščajo, zapišemo 11, 15, 19, 23, 27. Razlika med števili je sedaj 4, kar je za ena manj od števila stolpcev (vrstic). Torej je vsako naslednje število v tej diagonali večje za $m - 1$.

Prvo število tega zaporedja je $a + (m - 1)$. Poljubno število v k – ti vrstici izračunamo

$a_k = a + (m - 1) + (k - 1)(m - 1)$.

Poglejmo primer za tabelo 5 x 5, če je prvo število 20 (slika 17).

20				

Slika 17

Izračunajmo število v diagonali od leve proti desni, v tretji vrstici. Po $a_k = a + (k-1)(m+1)$, je $a_3 = 20 + (3-1)(5+1) = 32$, kar je tudi osrednje število v mreži. Zaporedje števil (vsako naslednje je večje za 5 + 1) je 20, 26, 32, 38, 44.

V diagonali od desne proti levi, je prvo zgornje število $a + (m-1) = 20 + 4 = 24$. Števila po diagonali se povečujejo za 4 (5 – 1 = 4), torej so to števila 24, 28, 32, 36, 40.

6. Iskanje neznanih števil v mreži

V številski mreži poznamo eno število (a). S poznavanjem tega števila in poznavanjem dimenzij mreže (m – število stolpcev, n – število vrstic) želimo izračunati števila v mreži brez štetja, oziroma zaporednega zapisovanja števil.

Da lahko dobimo število na levi od števila a mu moramo odšteti 1, za število na desni od števila a pa 1 prišteti. (slika 18)

	a			

Slika 18

Da lahko dobimo število nad številom a mu moramo odšteti število m (število stolpcev). Da dobimo število pod številom a, pa mu moramo število m prišteti. (slika 19)

	$a - m$			
	a			
	$a + m$			

Slika 19

Da lahko izračunamo število *x*, moramo številu *a* odšteti *m* + 1 (slika 20).

Za število število *q*, moramo številu *a* odšteti *m* – 1 (slika 20). Za število *y*, moramo številu *a* prišteti m – 1 . Za število *z* pa moramo števili *a* prišteti *m* + 1.

x		*q*		
	a			
y		*z*		

Slika 20

Če želimo izvedeti še druga števila v mreži samo sledimo tem pravilom samo z drugim številom. Poglejmo primer, kjer je vpisano v mrežo število 45 (slika 21).

		x		*q*
			45	
		y		*z*

Slika 21

Izračunajmo $x = a - (m + 1) = 45 - (5 + 1) = 45 - 6 = 39$, $y = a + (m - 1) = 45 + (5 - 1) = 49$, $q = a - (m - 1) = 45 - (5 - 1) = 39$ in $z = a + (m + 1) = 45 + (5 + 1) = 51$.

6.1 Določanje dimenzije mreže

V naslednjem primeru poznamo nekaj števil v mreži, želimo pa določiti dimenzije mreže (slika 22).

			65	
		73		

Slika 22

Narisana ni celotna mreža. Desno od števila 73 je število 74, nad številom 74 je število 65, torej za 9 manjše število. Kar pomeni, da ima mreža devet stolpcev. Če je namreč $a = 73$, je $q = 65$. Iz $q = a - (m - 1)$ je potem $65 = 73 - (m - 1)$ in $m = 9$. Če ne vemo ali je načrtan prvi ali zadnji stolpec, ne moremo trditi koliko stolpcev je še v desno, oziroma levo. Če pa privzamemo da je narisan prvi stolpec, je število 73 v tretjem stolpcu, število 65 v četrtem stolpcu. Narisati bi morali še štiri stolpce.

V vsako vrstico gre tako devet zaporednih naravnih števil. Če privzamemo, da je narisano zgornje levo polje prvo, potem leži število 73 v peti vrstici. Ne vemo pa, koliko vrstic je še v mreži. Prvo število v mreži bi bilo število 35.

7. Družbena odgovornost

Z raziskovalno nalogo sva pokazala iniciativnost, transparentnost in odgovornost do vsebine in okolja. Ker z najino nalogo predstavljava področje naravnih števil, sva pri preiskovanju izhajala iz znanih matematičnih dejstev, uporabljene vire tudi navajava. Tako spoštujeva intelektualno lastnino. Z raziskovalno nalogo lahko motivirava vrstnike k poglobljenem preiskovanju matematičnih vsebin.

8. Zaključek

Napisala sva najino prvo raziskovalno nalogo. Morala sva se dogovarjati, naučiti uporabljati računalniška orodja, razmišljati, … .

V raziskovalni nalogi sva se ukvarjala z na videz preprostimi lastnostmi naravnih števil, ki jih zapišemo po vrsti v mrežo števil. Pri raziskavi sva uporabila pravilo za vsoto prvih nekaj zaporednih naravnih števil. Naučila sva se spretno sešteti tudi zaporedje naravnih števil, ki se začne s poljubnim številom. Ugotovila sva različna pravila za števila v mreži števil – kako so razporejena po vrsticah v mreži, kako so razporejena po stolpcih. Naučila sva se tudi, kako dopolniti mrežo števil, če poznamo vsaj dve števili v mreži in nekaj začetnih pogojev. Nekatere lastnosti sva zapisala kot pravila. Ker je to najina prva raziskovalna naloga, sva z opravljenim zadovoljna, čeprav se v mreži naravnih števil najbrž skriva še veliko zanimivih lastnosti.

9. VIRI

https://sl.wikipedia.org/wiki/Naravno_%C5%A1tevilo, 2.2.2016

Tadej Gusel, Vsota zaporednih naravnih števil, raziskovalna naloga, Mladi raziskovalci Maribora, 2014