Mladi za napredek Maribora 2016

33. srečanje

FORDOVI KROGI

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: VITA MOVRIN, LANA GLAVIČ

Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ

Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2016

Kazalo

1. Povzetek

V raziskovalni nalogi sva si zastavili cilj raziskati lastnosti med seboj dotikajočih se krogov s skupno tangento – Fordovih krogov. Raziskovali sva s pomočjo virov, programa GeoGebra, predvsem pa samostojno. Na ravnini ležita dva enako ali različno velika med seboj dotikajoča se kroga s skupno tangento. Ugotovili sva, kako izračunamo razdaljo med dotikališčema krogov s skupno tangento. Če poznamo polmera teh dveh krogov, lahko izračunamo tudi polmer tretjega kroga, ki se dotika danih krogov in skupne tangente. Raziskali sva še lastnosti družine Fordovih krogov, in sicer lastnosti dotikališč in polmerov.

2. Uvod

2.1 Krog in krožnica

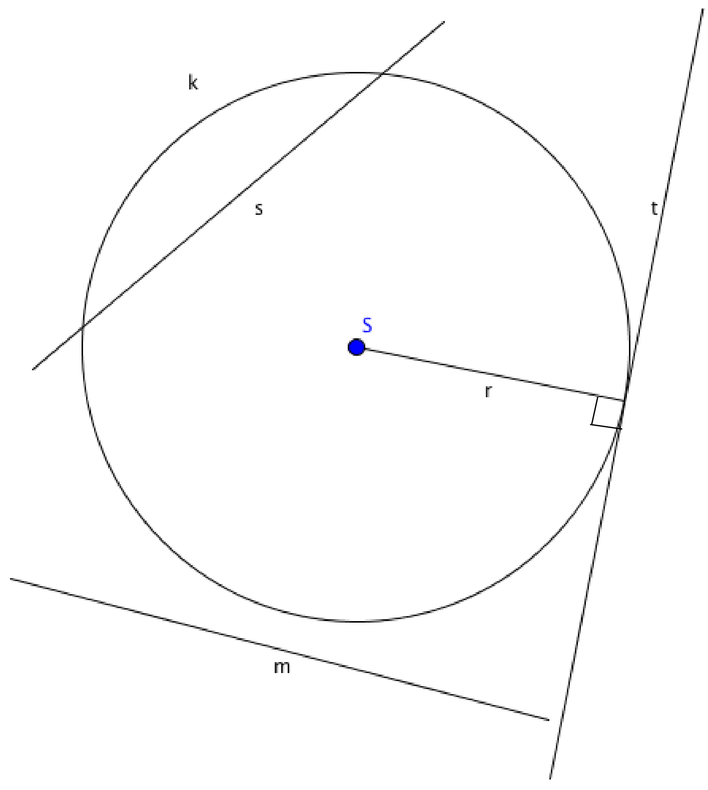
Krožnica (*k*) je množica vseh točk ravnine, ki so od izbrane točke *S* te ravnine oddaljene za točno določeno razdaljo *r*. Ta razdalja med središčem in poljubno točko na krožnici je polmer ali radij krožnice.

Krog (*K*) s središčem *S* in polmerom *r* je množica ravninskih točk, katerih oddaljenost od središča je manjša ali enaka *r*. To pomeni, da je krog del ravnine omejen s krožnico. Kroga sta enako velika, če imata enak polmer in posledično enako ploščino.

2.2 Krožnica in premica

Krožnica in premica, ki ležita v isti ravnini, lahko imata tri različne medsebojne lege (slika 1):

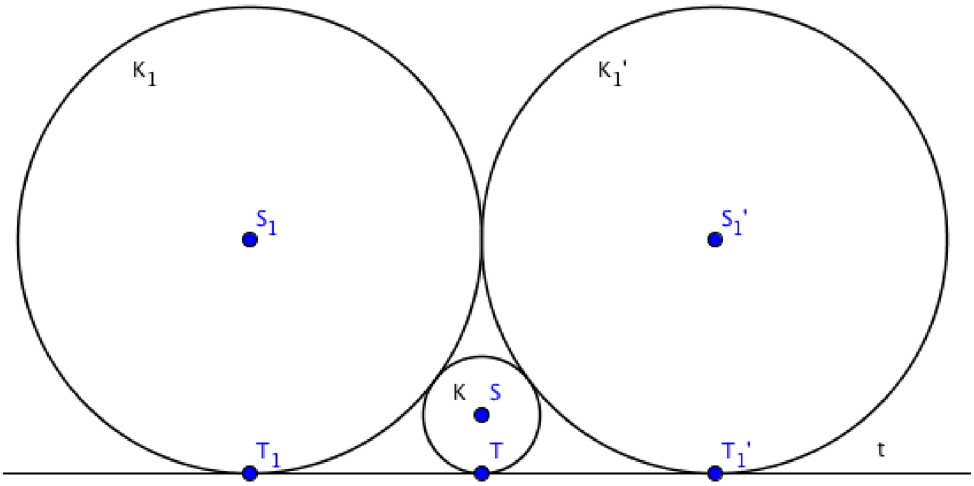
- mimobežnica (*m*) je premica, ki s krožnico nima nobene skupne točke;
- sekanta (*s*) je premica, ki ima s krožnico dve skupni točki;
- tangenta (*t*) je premica, ki se krožnice dotika in ima z njo eno skupno točko. Je pravokotna na polmer, ki ima eno krajišče v dotikališču tangente.



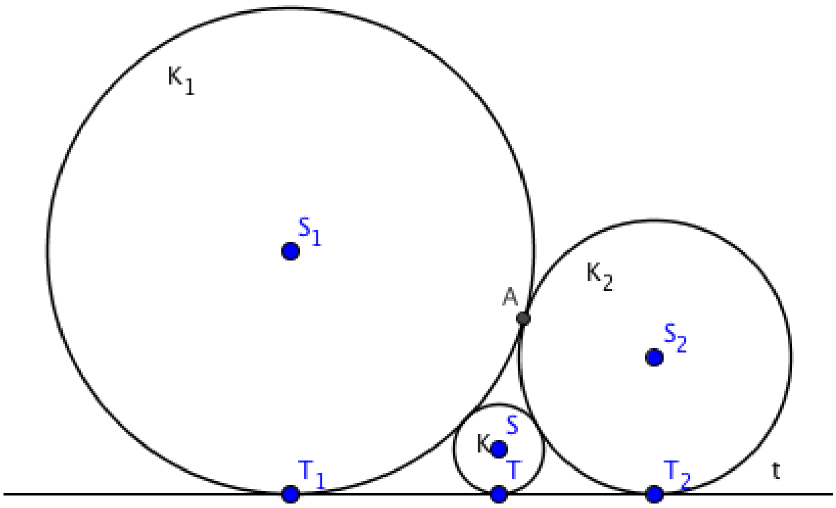
Slika 1

2.3 Cilj naloge

Narišemo kroga z enakima polmeroma (slika 2a). Kroga se med seboj dotikata in imata skupno tangento. Narišemo krožnico, ki se dotika obeh krožnic in dane tangente. Le kako izračunamo polmer tega kroga? Kaj pa če polmera začetnih krogov nista enaka (slika 2b)? Kaj dobimo, če postopek načrtovanja krožnic ponavljamo?



Slika 2a

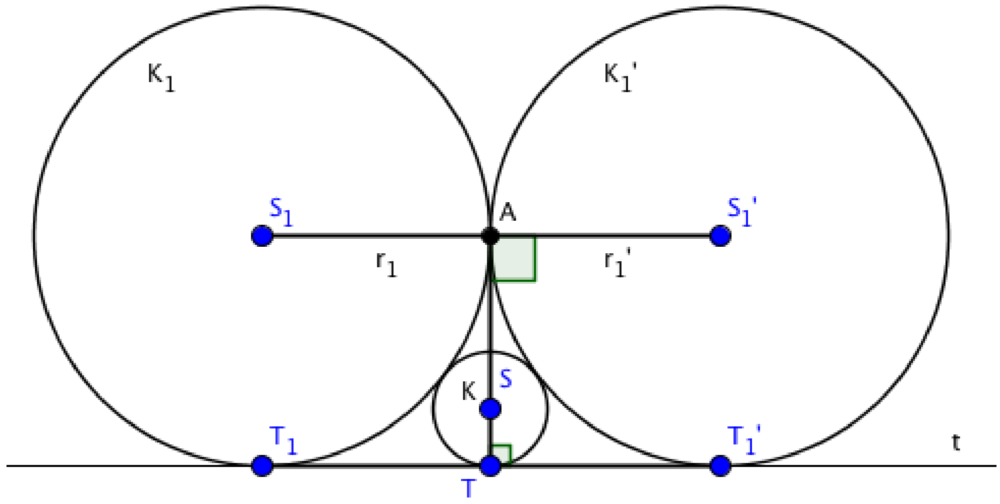


Slika 2b

3. Kroga z enakim polmerom

3.1 Razdalje med dotikališči

Na ravnini ležita dva enako velika kroga (K_1 in K_1') in se dotikata (slika 3). Skupne tangente (t) se dotikata v dotikališčih T_1 in T_1'.



Slika 3

Razdalja med dotikališčema T_1 in T_1' je enaka vsoti polmerov r_1 in r_1' teh dveh krogov. Ker sta kroga enako velika (imata enak polmer), je razdalja med dotikališčema enaka dvakratniku polmera r_1 oz. r_1'.

$|T_1T_1'| = r_1 + r_1' = 2r_1 = 2r_1'$

Narišemo krožnico, ki se dotika obeh krožnic in dane tangente. Dotikališče narisane krožnice s tangento poimenujemo T. Razdalja med dotikališčema T in T_1 je enaka dolžini polmera r_1, razdalja med dotikališčema T in T_1' pa je enaka dolžini polmera r_1'. Ker sta kroga enako velika sta enako velika tudi polmera r_1 in r_1'. To pomeni, da je dotikališče T enako oddaljeno od dotikališč T_1 in T_1'.

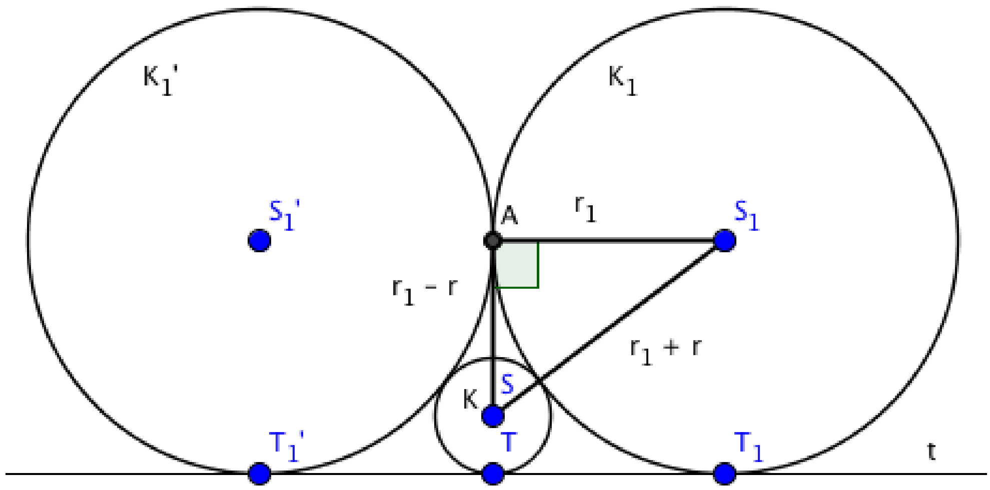
$|TT_1| = r_1$

$|TT_1'| = r_1' = r_1$

$|TT_1| = |TT_1'|$

3.2 Polmer tretjega kroga

Na ravnini ležita dva enako velika kroga (K_1 in K_1') s skupno tangento in se med seboj dotikata. Narišemo krog K s središčem S. Krožnica kroga K se dotika obeh krožnic in dane tangente (slika 4).



Slika 4

Polmer kroga K lahko izračunamo s Pitagorovim izrekom:

- zamislimo si pravokotni trikotnik s krajišči v točkah: S_1 (središče kroga K_1), S (središče kroga K) in A (dotikališče kroga K_1 in kroga K_1').
- stranice tega trikotnika so hipotenuza (h) in dve kateti (k_1 in k_2), kjer je

  $h = |SS_1| = r + r_1$

  $k_1 = |S_1A| = r_1$

  $k_2 = |SA| = r_1 - r$
- zapišemo Pitagorov izrek

  $h^2 = {k_1}^2 + {k_2}^2$

  $(r + r_1)^2 = {r_1}^2 + (r_1 - r)^2$
- izrazimo polmer r

  $r^2 + 2rr_1 + r_1^2 = {r_1}^2 + {r_1}^2 - 2rr_1 + r^2$

  $4rr_1 = {r_1}^2$

  $4r = r_1$

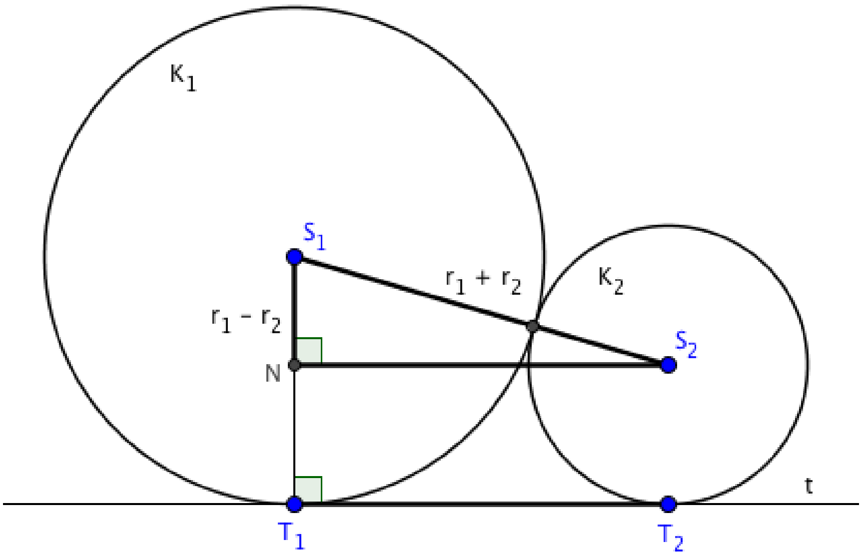
$$\boldsymbol{r = \frac{r_1}{4}}$$

<u>UGOTOVITEV:</u> Polmer (r) kroga K, ki se dotika obeh krožnic z enakim polmerom in skupne tangente, je enak četrtini polmera (r_1) kroga K_1 oz. kroga K_1' (kroga sta enako velika – imata enak polmer).

4. Kroga z različnima polmeroma

4.1 Razdalje med dotikališči

Na ravnini ležita dva različno velika kroga (K_1 in K_2) s polmeroma r_1 in r_2 ter se dotikata. Skupne tangente (t) se dotikata v dotikališčih T_1 in T_2 (slika 5).



Slika 5

Razdaljo med dotikališčema (T_1 in T_2) lahko izračunamo s Pitagorovim izrekom:

- zamislimo si pravokotni trikotnik s stranicami:

  $h = |S_1S_2| = r_1 + r_2$

  $k_1 = |S_1N| = r_1 - r_2$

  $k_2 = |S_2\,N| \cong |T_1T_2|$ in $k_2||t$
- s Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino katete (k_2), ki je vzporedna s tangento in skladna z razdaljo med dotikališčema T_1 in T_2.

  $k_2{}^2 = |T_1T_2|^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$

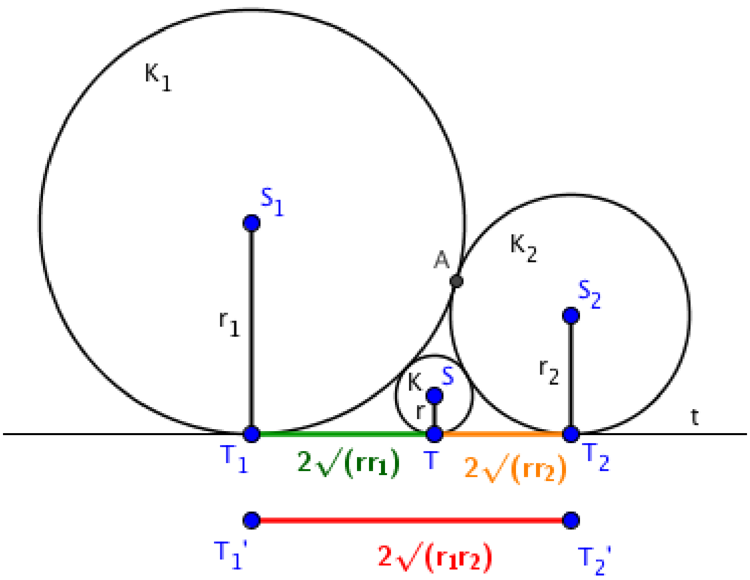
$$|T_1T_2|^2 = {r_1}^2 + 2r_1r_2 + {r_2}^2 - {r_1}^2 + 2r_1r_2 - {r_2}^2$$
$$|T_1T_2|^2 = 4r_1r_2$$
$$|T_1T_2| = 2\sqrt{r_1r_2}$$

<u>UGOTOVITEV</u>: Razdaljo med dotikališčema dveh med seboj dotikajočih se krogov s skupno tangento lahko izračunamo s formulo $\boldsymbol{|T_1T_2| = 2\sqrt{r_1r_2}}$.

Če sta polmera začetnih krogov enaka *r*, je $|T_1T_2| = 2\sqrt{r^2} = 2r$, kar smo pokazali v 3.1.

4.2 Polmer tretjega kroga

Na ravnini ležita dva različno velika kroga (K_1 in K_2) s polmeroma r_1 in r_2 ter se dotikata (slika 6).



Slika 6

Skupne tangente (*t*) se dotikata v dotikališčih T_1 in T_2. Narišemo krožnico s polmerom r, ki se dotika obeh krožnic in dane tangente . Dotikališče s tangento poimenujemo T.

Polmer kroga K izračunamo tako, da:

- zapišemo enakost med razdaljami

  $|TT_1| + |TT_2| = |T_1T_2|$

  $2\sqrt{rr_1} + 2\sqrt{rr_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$ (uporabimo ugotovitev iz 4.1)

- izrazimo polmer r

$$2\sqrt{r}\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)=2\sqrt{r_1 r_2}$$

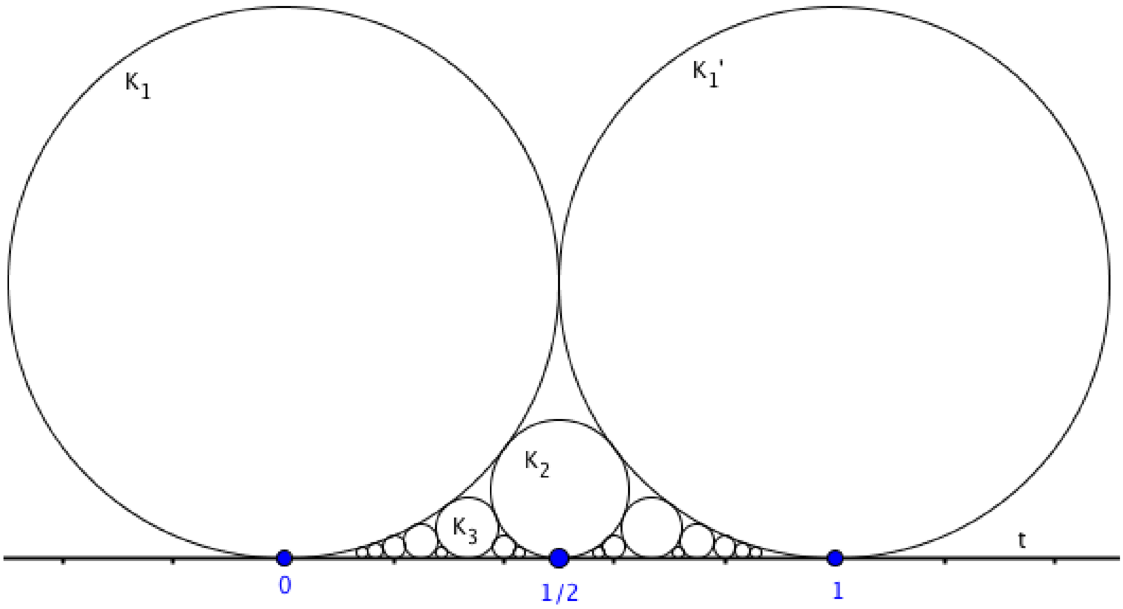
$$\sqrt{r}=\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})}$$

$$r=(\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})})^2$$

$$r=\frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$$

<u>UGOTOVITEV:</u> Polmer kroga K, ki se dotika dveh različno velikih krogov K_1 in K_2 ter njune skupne tangente, izračunamo s formulo $\boldsymbol{r=\frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}}$.

5. Družina Fordovih krogov

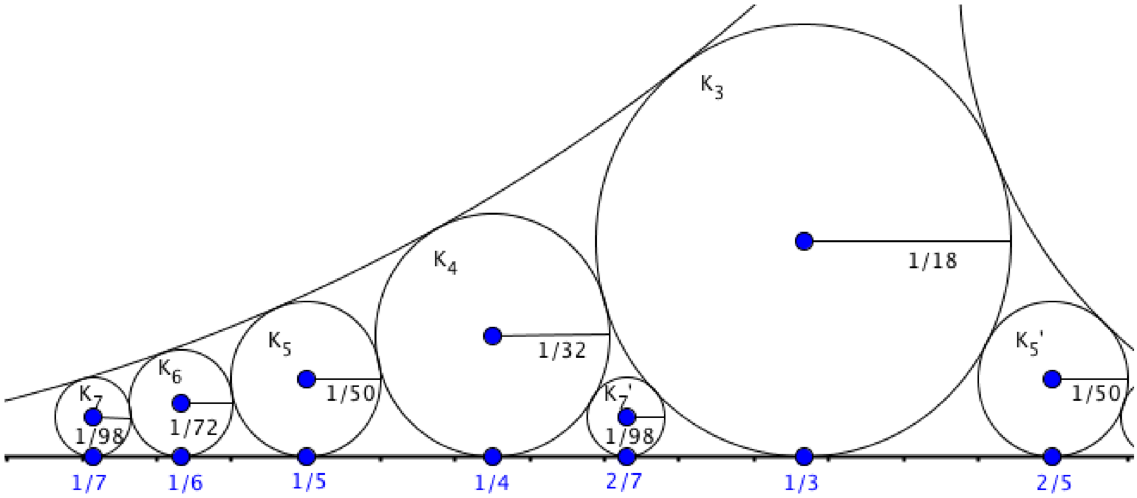


Slika 7

Na ravnini ležita dva enako velika dotikajoča se kroga. Skupno tangento obeh krogov opremimo s koordinatnim sistemom tako, da se je eden dotika v točki 0 (ali $\frac{0}{1}$), drugi pa v 1 (ali $\frac{1}{1}$). Polmera krogov sta torej $\frac{1}{2}$. Nato narišemo manjši krog K_2 (glej 3.2), ki se dotika prvih dveh krogov in skupne tangente t (številske premice), seveda v točki $\frac{1}{2}$. Dobimo kroga (K_1 in K_2) z različnima polmeroma. Narišemo nov krog K_3, ki se dotika krogov K_1 in K_2 ter skupne tangente (številske premice) v neki točki s koordinato $\frac{m}{n}$, ki predstavlja število, zapisano v obliki ulomka, na številski premici. Med kroga K_1 in K_3 vrišemo nov krog K_4. Postopek lahko v nedogled ponavljamo tako, da na enak način narišemo naslednje kroge. Vsakemu nastalemu krogu dodamo nov krog, ki se dotika prvotnega kroga, zadnjega načrtanega kroga in še premice t v nekem številu $\frac{m}{n}$ na številski premici. Enak postopek ponavljamo tudi med krogoma K_2 in K_3, K_3 in K_4, itd.. Dobimo družino *Fordovih krogov*. Vsakemu izmed krogov lahko določimo lego dotikališča – število $\frac{m}{n}$, v katerem se krog dotika številske premice. Prva kroga v družini *Fordovih krogov* se tangente dotikata v točkah 0 in 1, zato za dotikališče vsakega kroga velja $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$ (glej 5.2). Vsakemu krogu lahko določimo tudi polmer (glej 5.1).

Fordovi krogi se imenujejo po ameriškem matematiku Lesterju Randolphu Fordu starejšem [3], ki jih je opisal leta 1938 v članku v reviji *American Mathematical Monthly*, letnik 45, številka 9, strani 586-601. Lester R. Ford (1886-1967) je leta 1917 doktoriral iz matematike na Univerzi Harvard. Med letoma 1942 in 1946 je bil urednik revije American Mathematical Monthly in od leta 1947 do 1948 predsednik Ameriškega matematičnega združenja (Mathematical Association of America). To združenje je leta 1964 po njem poimenovalo tudi nagrado »Lester R. Ford Award« za avtorje objav matematičnih prispevkov v reviji American Mathematical Monthly. Tudi njegov sin Lester Randolph Ford mlajši, rojen leta 1927, je znan matematik.

5.1 Lastnosti polmerov



Slika 8

Polmer kroga, ki se dotika dveh dotikajočih se krogov in skupne tangente, lahko izračunamo po že znani formuli (glej 4.2), če poznamo polmera krogov, ki se ju ta krog dotika.

Primer: Želimo izračunati polmer kroga K_3, ki se dotika krogov K_1 in K_2 (slika 8). Krog K_1 je eden izmed prvih dveh krogov družine *Fordovih krogov*, zato vemo, da je njegov polmer $\frac{1}{2}$ (glej 5.). Krog K_2 se dotika prvih dveh krogov K_1 in K_1'. Ker se dotika dveh enako velikih krogov, vemo (iz 3.2), da je njegov polmer enak četrtini polmera enega izmed teh dotikajočih krogov in je $\frac{1}{8}$. Krog K_3 z neznanim polmerom r_3 se torej dotika krogov K_1 in K_2, katerih polmera merita $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{8}$. Uporabimo formulo $r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$ in izračunamo polmer kroga K_3.

$$r_3 = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}{(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}})^2} = \frac{\frac{1}{16}}{(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}})^2} = \frac{\frac{1}{16}}{(\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}})^2} = \frac{\frac{1}{16}}{(\frac{3}{2\sqrt{2}})^2} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{8}} = \frac{1}{16}\cdot\frac{8}{9} = \frac{1}{18}$$

Na enak način izračunamo polmere naslednjih krogov in zapišemo zaporedje polmerov: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{18}, \frac{1}{32}, \frac{1}{50}, \frac{1}{72} \ldots = \frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times4}, \frac{1}{2\times9}, \frac{1}{2\times16}, \frac{1}{2\times25}, \frac{1}{2\times36} \ldots =$

$$= \frac{1}{2\times1^2}, \frac{1}{2\times2^2}, \frac{1}{2\times3^2}, \frac{1}{2\times4^2}, \frac{1}{2\times5^2}, \frac{1}{2\times6^2} \ldots$$

UGOTOVITEV: Polmer vsakega kroga v zaporedju krogov z dotikališčem v točki na številski premici, je enak $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2n^2}}$, kjer je *n* zaporedno število kroga v zaporedju krogov, ki se dotikajo enega izmed prvih dveh krogov z enakim polmerom oz. imenovalec v okrajšanem ulomku, ki nam pove lego dotikališča kroga na številski premici.

Seveda lahko zaporedje krogov nadaljujemo tudi med dvema zaporednima krogoma, kjer noben izmed njiju ni začetni krog. Tako je načrtan krog, ki se dotika krogov K_3 in K_4, s polmeroma $\frac{1}{18}$ in $\frac{1}{32}$ (slika 8). Polmer kroga med K_3 in K_4 je $\frac{1}{98}$. Poglejmo zakaj.

Iz že znane formule za izračun polmera tretjega oz. novega kroga (glej 4.2) lahko izpeljemo formulo, ki jo lahko uporabimo v primeru, če poznamo lege dotikališč krogov, ki se ju krog, katerega polmer iščemo, dotika, oziroma če vemo, katerih dveh krogov v zaporedju krogov se dotika.

$$r=\frac{r_1\cdot r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}=\frac{\frac{1}{2{n_1}^2}\cdot\frac{1}{2{n_2}^2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2{n_1}^2}}+\sqrt{\frac{1}{2{n_2}^2}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4{n_1}^2{n_2}^2}}{\left(\frac{1}{n_1\sqrt{2}}+\frac{1}{n_2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4{n_1}^2{n_2}^2}}{\frac{1}{2{n_1}^2}+2\cdot\frac{1}{n_1\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n_2\sqrt{2}}+\frac{1}{2{n_2}^2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4{n_1}^2{n_2}^2}}{\frac{1}{2{n_1}^2}+\frac{2}{2n_1n_2}+\frac{1}{2{n_2}^2}}=\frac{2{n_1}^2}{4{n_1}^2{n_2}^2}+\frac{n_1n_2}{4{n_1}^2{n_2}^2}+\frac{2{n_2}^2}{4{n_1}^2{n_2}^2}=\frac{1}{2{n_2}^2}+\frac{1}{4n_1n_2}+\frac{1}{2{n_1}^2}=$$

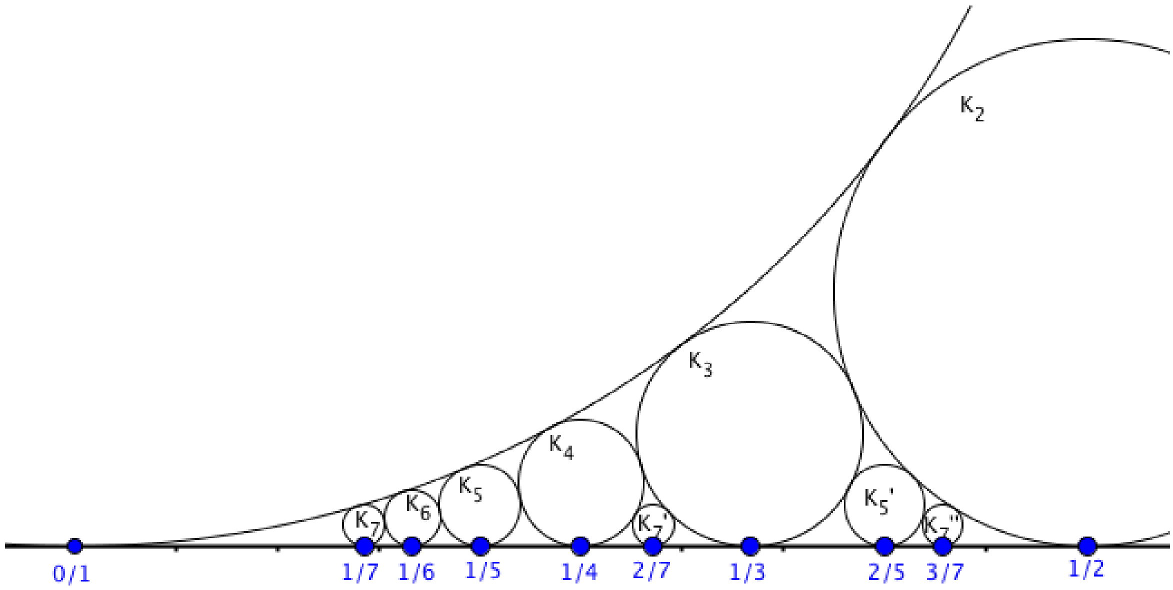
$$=\frac{1}{2{n_2}^2+4n_1n_2+2{n_1}^2}=\frac{1}{2({n_2}^2+2n_1n_2+{n_1}^2)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2(n_2+n_1)^2}}$$

UGOTOVITEV: Če vemo, katerih dveh krogov se krog, katerega polmer iščemo, dotika, potem lahko za izračun polmera uporabimo formulo $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2(n_2+n_1)^2}}$, kjer sta n_1 in n_2 zaporedni števili dotikajočih se krogov.

Računamo polmer kroga, ki se dotika krogov K_3 in K_4, zato velja $n_1 = 3$ in $n_2 = 4$. Z uporabo zgornje formule je tako $\frac{1}{2\cdot(4+3)^2}=\frac{1}{2\cdot 7^2}=\frac{1}{98}$, kar smo želeli pokazati. Ugotovimo tudi, da polmer zapišemo v obliki $\frac{1}{2n^2}$, torej je $n = 7$. Krog s polmerom $\frac{1}{98}$ bomo označili s K_7. Krog z enakim polmerom se namreč dotika tudi krogov K_1 in K_6 .

5.2 Lastnosti dotikališč

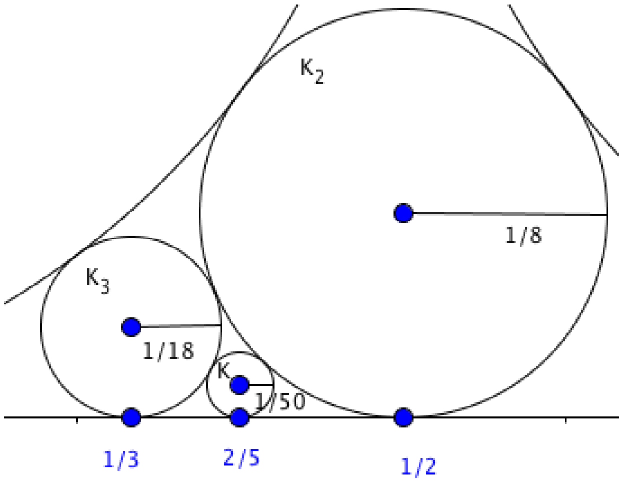
Vsak krog (glej 5.) se skupne tangente dotika v točki $\frac{m}{n}$, ki predstavlja neko število, zapisano v obliki ulomka, na številski premici (slika 9).



Slika 9

Zapišimo zaporedje dotikališč krogov, ki se dotikajo enega od prvih dveh krogov s polmerom $\frac{1}{2}$ in dotikališčema $\frac{0}{1}$ ali $\frac{1}{1}$ in poljubnega kroga. Razdaljo med dotikališči računamo s formulo $2\sqrt{r_1 \cdot r_k}$, kjer je $r_1 = \frac{1}{2}$, polmer r_k pa polmer kroga v zaporedju. Krog K_2 se dotika prvih dveh krogov v točki s koordinato $\frac{1}{2}$. Krog K_3 se dotika krogov K_1 in K_2 v točki s koordinato $\frac{1}{3}$, oziroma $\frac{2}{3}$ (če opazujemo zaporedje desno od $\frac{1}{2}$). Krog K_4 se dotika začetnega kroga in kroga K_3 v točki $\frac{1}{4}$. Zaporedje dotikališč je tako $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.... Zaporedje dotikališč med $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{1}$ pa je $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$... . Seveda pa obstajajo tudi krogi, ki se ne dotikajo enega izmed prvih dveh, ampak se dotikajo poljubnih dveh krogov v zaporedju. Tako se krogov K_2 z dotikališčem $\frac{1}{2}$ in K_3 z dotikališčem $\frac{1}{3}$ dotika krog K_5' z dotikališčem $\frac{2}{5}$ (slika 9). Poglejmo, kako izračunamo lego dotikališča (slika 10).

Po 5.1 izračunamo polmer kroga K, ki se dotika krogov K_2 in K_3. Tako je $\frac{1}{2(n_2+n_1)^2} = \frac{1}{2(3+2)^2} = \frac{1}{50}$. Izračunamo razdaljo med dotikališčema krogov K_3 in K, torej $2\sqrt{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{50}} = 2\sqrt{\frac{1}{900}} = \frac{1}{15}$. Dotikališče kroga K je vsota $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5+1}{15} = \frac{2}{5}$, kjer h koordinati dotikališča kroga K_3 prištejemo razdaljo med dotikališčema krogov K_3 in K. Podobno lahko izračunamo koordinato dotikališča za poljuben krog v zaporedju krogov.

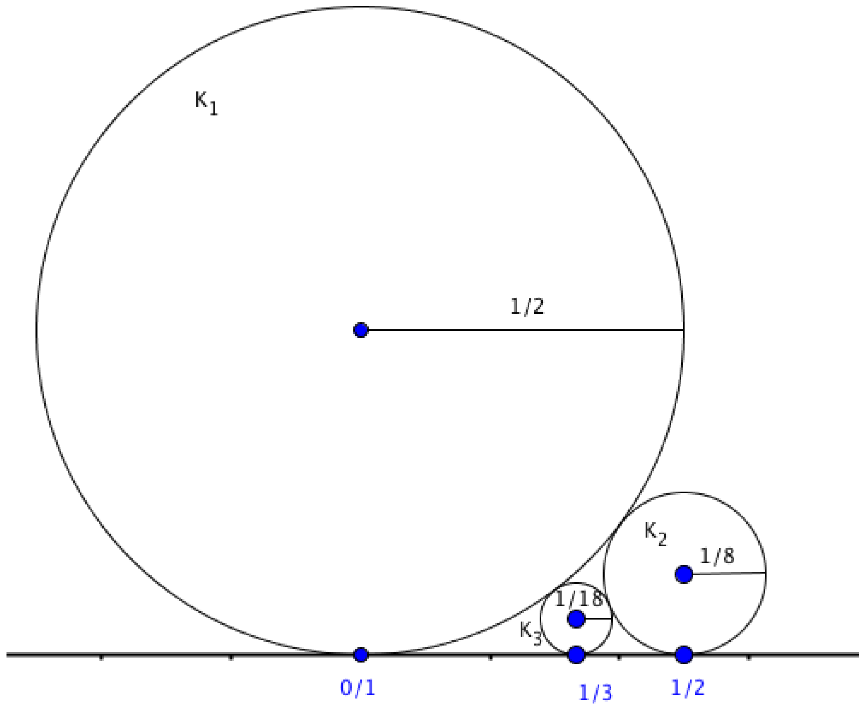


Slika 10

<u>UGOTOVITEV</u>: Dotikališče tretjega kroga K izračunamo tako, da dotikališču kroga K_1 (izbrani krog v zaporedju) prištejemo razdaljo med dotikališčema krogov K_1 in K: $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{r_1 r}$.

Pa še malo poenostavimo naš razmislek. Med kroga K_2 in K_3 z dotikališčema $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{3}$ smo načrtali krog K z dotikališčem $\frac{2}{5}$ (glej prejšnji primer). Ponuja se rešitev, da je števec novega dotikališča enak vsoti števcev dotikališč krogov K_2 in K_3 (1 + 1 = 2) in da je imenovalec novega dotikališča enak vsoti imenovalcev dotikališč krogov K_2 in K_3 (2 + 3 = 5).

Lastnost lahko opazujemo na kateremkoli primeru. Recimo za začetni krog K_1 z dotikališčem $\frac{0}{1}$ in krog K_2 z dotikališčem $\frac{1}{2}$. Krog K_3 se dotika obeh v dotikališču s koordinato $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$ (slika 11).



Slika 11

Glede na opisane primere izpeljimo formulo za izračun dotikališča poljubnega kroga. Vemo, da dotikališče izračunamo z vsoto $(\frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{r_1 r})$, kjer je prvi člen znano dotikališče kroga v zaporedju krogov, drugi člen je razdalja med dotikališčema, če poznamo polmera obeh krogov.

Dva poljubna kroga se številske premice oz. tangente dotikata v dveh točkah oz. številih $\frac{m_1}{n_1}$ in $\frac{m_2}{n_2}$, razdalja med njunima dotikališčema pa je enaka absolutni razliki leg dotikališč na številski premici, $\left|\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right|$. To velja za vsak par krogov, ne glede na to, če se med seboj dotikata. Že znano formulo $2\sqrt{\mathrm{r}_1 \mathrm{r}_2}$ (glej 4.1) pa uporabljamo za izračun razdalje med dotikališči le med seboj dotikajočih se krogov. Ker vemo da je polmer poljubnega kroga enak $\frac{1}{2n^2}$ (glej 5.1) , lahko to formulo (iz 4.1) zapišemo tudi kot $2\sqrt{\frac{1}{2{n_1}^2} \cdot \frac{1}{2{n_2}^2}}$. Za dva dotikajoča se kroga lahko razdaljo med dotikališčema tako izračunamo na dva načina in zato velja:

$$\left|\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right| = 2\sqrt{\frac{1}{2{n_1}^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2{n_2}^2}}$$

$$\left|\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right| = \frac{1}{n_1 n_2}$$

$\left|\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right| \cdot n_1 n_2 = 1$

$\left|\frac{m_1 n_1 n_2}{n_1} - \frac{m_2 n_1 n_2}{n_2}\right| = 1$

$|m_1 n_2 - m_2 n_1| = 1$

<u>UGOTOVITEV</u>: Kroga K_1 in K_2 se dotikata natanko tedaj, ko velja $\left|\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right| = 2\sqrt{\frac{1}{2{n_1}^2} \cdot \frac{1}{2{n_2}^2}}$ oz. $|\boldsymbol{m_1 \cdot n_2 - m_2 \cdot n_1}| = \mathbf{1}$.

Če velja, da je $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$, je $\boldsymbol{m_2 \cdot n_1 - m_1 \cdot n_2 = 1}$ **.**

Sedaj zapišimo dotikališče kroga in naj bo $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m}{n} < \frac{m_2}{n_2}$.

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{r_1 r} = \frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{\frac{1}{2{n_1}^2} \cdot \frac{1}{2(n_1+n_2)^2}} = \frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{\frac{1}{4{n_1}^2(n_1+n_2)^2}} =$$

$$= \frac{m_1}{n_1} + \frac{1}{n_1(n_1+n_2)} = \frac{m_1(n_1+n_2)}{n_1(n_1+n_2)} + \frac{1}{n_1(n_1+n_2)} = \frac{m_1(n_1+n_2)+1}{n_1(n_1+n_2)} = \frac{m_1 n_2 + m_1 n_1 + 1}{n_1(n_1+n_2)}$$

Kroga se dotikata, zato vemo da velja: $1 = m_2 n_1 - m_1 n_2$ (glej prejšnjo ugotovitev). Sledi:

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1 n_2 + m_1 n_1 + 1}{n_1(n_2+n_1)} = \frac{m_1 n_2 + m_1 n_1 + m_2 n_1 - m_1 n_2}{n_1(n_2+n_1)} =$$

$$= \frac{m_1 n_1 + m_2 n_1}{n_1(n_2+n_1)} = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$$

<u>UGOTOVITEV:</u> Formuli za izračun lege dotikališča kroga sta $\boldsymbol{\frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{r_1 r}}$ (če poznamo polmer kroga in polmer ter dotikališče enega izmed dotikajočih krogov) in $\boldsymbol{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}}$ (če poznamo dotikališči dveh največjih krogov, ki se kroga z iskanim dotikališčem dotikata).

6. Družbena odgovornost

Z raziskovalno nalogo bova omogočili širšemu krogu zainteresiranih bralcev, tako najinih vrstnikov kot drugih, na enem mestu spoznati in razumeti bistvene lastnosti Fordovih krogov. Ti niso zanimivi samo kot matematična vsebina, saj dajejo recimo možnosti uporabe pri oblikovanju (logotipi, ...). Z raziskovalno nalogo motivirava vrstnike k spoznavanju matematičnih vsebin, ki so daleč od vsakodnevne šolske matematike, hkrati pa nekoliko širši zainteresirani javnosti predstaviva manj znanega matematika Lesterja Randolpha Forda.

Najina raziskovalna naloga sicer povzema že napisane prispevke, ki jih v virih navajava, vendar je kot celota najino avtorsko delo. Pri oblikovanju naloge sva upoštevali tudi nekatera izmed sedmih načel družbene odgovornosti (npr. transparentnost, etičnost).

7. Zaključek

V raziskovalni nalogi sva raziskovali lastnosti med seboj dotikajočih se krogov s skupno tangento. Ugotovili sva, da lahko razdaljo med dotikališčema dveh med seboj dotikajočih se krogov s skupno tangento izračunamo s formulo $2\sqrt{r_1 r_2}$. Narišemo lahko krožnico, ki se dotika prvih dveh krogov in skupne tangente. Polmer (*r*) tega kroga izračunamo s formulo $r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$. Družino Fordovih krogov načrtamo tako, da vsakima dotikajočima se krogoma vrišemo nov krog, ki se dotika danih krogov in tangente oz. številske premice (v točki $\frac{m}{n}$). Polmer kroga je enak $\frac{1}{2n^2}$, polmer na novo nastalega kroga K, pa je enak $\frac{1}{2(\boldsymbol{n_1}+\boldsymbol{n_2})^2}$. Dotikališče tretjega kroga ($\frac{m}{n}$) izračunamo s formulo $\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$**.**

Pri pisanju raziskovalne naloge sva se naučili marsikaj novega in tako nadgradili najino znanje matematike, še posebej geometrije. Mnenja sva, da s svojo raziskovalno nalogo tudi prispevava k dojemanju in reševanju geometrijskih problemov.

8. Viri

[1] http://www.presek.si/19/1097-Lavric.pdf, 3. 1. 2016

[2] https://sl.wikipedia.org/wiki/Fordov_krog, 3. 1. 2016

[3] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ford.html, 4. 2. 2016