Mladi za napredek Maribora 2016
33. srečanje

TOČKOVNE KOORDINATE

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: JAN GENC

Mentor: MARKO JAKOVAC, MAJA JAKOVAC

Šola: OŠ FRANCA ROZMANA-STANETA

Maribor, februar 2016

Mladi za napredek Maribora 2016
33. srečanje

TOČKOVNE KOORDINATE

Matematika

Raziskovalna naloga

Maribor, februar 2016

KAZALO

1 POVZETEK 1

2 UVOD 2

3 DEFINICIJA IN VPELJAVA TOČKOVNIH KOORDINAT 4

3.1 Izbira števila izhodiščnih točk 4

3.2 Primer 1 6

4 PRETVORBA IZ KARTEZIČNIH KOORDINAT V TOČKOVNE KOORDINATE 7

4.1 Primer 2 8

5 PRETVORBA IZ TOČKOVNIH KOORDINAT V KARTEZIČNE KOORDINATE 9

5.1 Primer 3 11

5.2 Primer 4 11

6 RAZDALJA MED TOČKAMA 12

6.1 Primer 5 13

7 PLOŠČINA IN OBSEG TRIKOTNIKA 14

7.1 Primer 6 15

8 TOČKOVNE KOORDINATE V SPLOŠNEM 16

8.1 Primer 7 18

9 ZAKLJUČEK 20

10 DRUŽBENA ODGOVORNOST 21

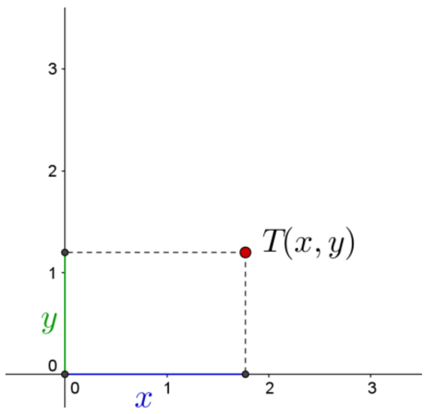
11 LITERATURA 22

1 POVZETEK

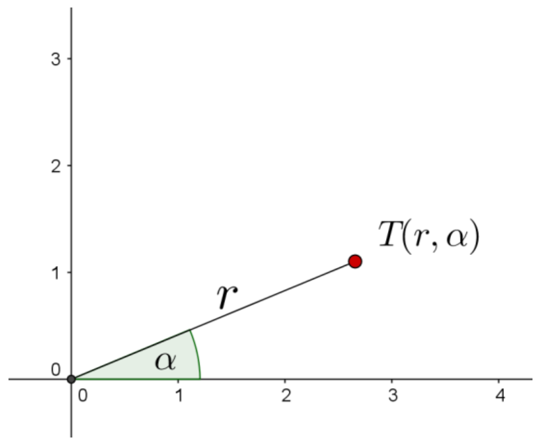
Postavimo si vprašanje, ali lahko lego točke v ravnini opišemo še kako drugače kot le s kartezičnimi koordinatami. Ena izmed možnosti je, da lahko lego poljubne točke opišemo s pomočjo razdalj od nekih vnaprej podanih točk, ki jih bomo imenovali izhodiščne točke. Razmislimo tudi, da potrebujemo natanko tri nekolinearne izhodiščne točke, da s pomočjo njih poljubno točko v koordinatnem sistemu opišemo na enoličen način. V nalogi za izhodiščne točke izberemo pare $(0,0)$, $(1,0)$ in $(0,1)$. Urejena trojica razdalj od poljubno izbrane točke do izhodiščnih točk predstavlja nove koordinate, ki jih bomo imenovali točkovne koordinate. V nadaljevanju opišemo postopek pretvarjanja kartezičnih koordinat točke v točkovne koordinate in obratno. Nato s pomočjo točkovnih koordinat izpeljemo formulo za razdaljo med točkama ter formuli za obseg in ploščino trikotnika. V zaključku naloge izpeljemo še formule za pretvarjanje med koordinatami pri poljubno izbranih izhodiščnih točkah.

2 UVOD

V osnovni šoli znamo lego točke v ravnini opisati s pomočjo kartezičnih koordinat (slika 1). Če malo pobrskamo po literaturi, ugotovimo, da lahko lego točke enolično določimo tudi s tako imenovanimi polarnimi koordinatami (slika2). Prva koordinata točke T je oddaljenost točke od izhodišča (radij), druga koordinata točke pa je kot, ki ga oklepata daljica med izhodiščem in točko T ter desni del vodoravne osi.



Slika 1: kartezične koordinate (vir: avtor)



Slika 2: polarne koordinate (vir: avtor)

V matematiki se različnih tipov koordinat poslužujemo, ko želimo opis in računanje prilagoditi situaciji s katero se v danem trenutku ukvarjamo. Tako na primer polarne koordinate uporabljamo pri kompleksnih številih [4], ko želimo poenostaviti njihovo množenje. V geometriji trikotnika se srečujemo s tako imenovani trilinearnimi in baricentričnimi koordinatami [3], da lažje opišemo znamenite točke trikotnika. Slednje koordinate niso odvisne od lege točke v koordinatnem sistemu, temveč od lege glede na trikotnik.

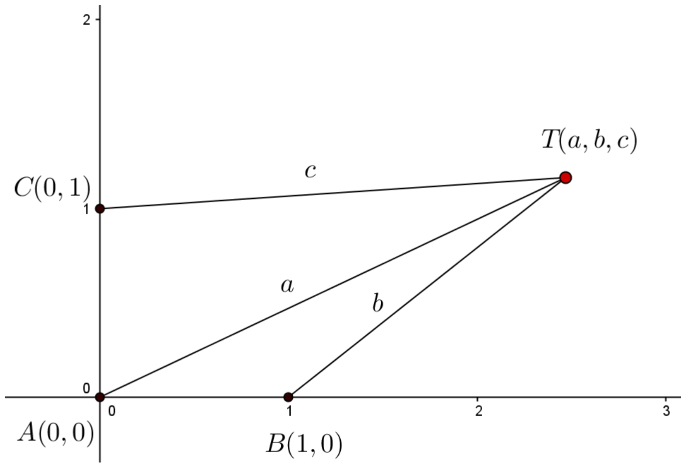
Podobno lahko tudi mi razmislimo, ali lahko lego točke opišemo še kako drugače. Na primer, lego točke lahko opišemo glede na oddaljenost od nekih vnaprej podanih izhodiščnih točk. Podoben koncept se uporablja tudi na področju teorije grafov [1,5]. Razmisliti moramo, koliko takšnih točk potrebujemo in v kakšni medsebojni legi morajo biti.

Ugotovitve in odgovore na zgornja vprašanja bomo opisali v naslednjih poglavjih, najprej pa pojasnimo, zakaj bi takšne koordinate sploh potrebovali. Izbira teh koordinat sloni na izhodiščnih točkah. Če ne poznamo vseh izhodiščnih točk, ne moremo natančno določiti lege naše točke. Ta razmislek nas privede do sklepa, da so te koordinate uporabne na področjih, kjer je pomembno prikrivanje podatkov. Kot primer navedimo uporabo v vojski. Če vojaški radarji predstavljajo izhodiščne točke, potem lahko nek vojaški objekt opišemo kot razdaljo tega objekta do vseh radarjev. V kolikor je po komunikacijskih omrežjih prestrežen podatek s koordinatami tega objekta, sovražnik ne more vedeti, kje se objekt nahaja, če nima podatka o lokaciji vseh radarjev. Tako lahko na te koordinate gledamo kot na šifriranje podatkov, pri čemer je lega radarjev ključ za dešifriranje le-teh.

3 DEFINICIJA IN VPELJAVA TOČKOVNIH KOORDINAT

Imejmo tri v naprej podane nekolinearne točke, ki jih imenujemo **izhodiščne točke**. Zaradi lažjega računanja pri izpeljavah izberimo točke $\boldsymbol{A(0,0)}$, $\boldsymbol{B(1,0)}$ in $\boldsymbol{C(0,1)}$.

Naj bo T poljubna točka. Z a, b in c po vrsti označimo razdaljo točke T do izhodiščnih točk A, B in C. Urejeno trojico razdalj (a, b, c) imenujemo **TOČKOVNE KOORDINATE** točke T.

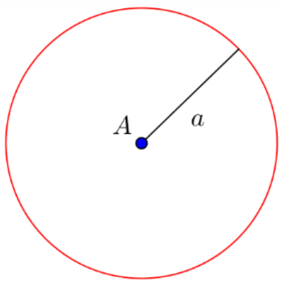


Slika 3: točkovne koordinate (vir: avtor)

3.1 Izbira števila izhodiščnih točk

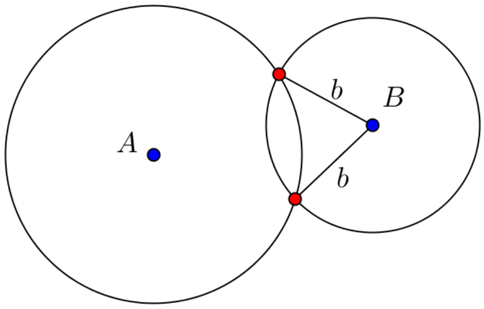
Razmislimo, zakaj pri določanju točkovnih koordinat potrebujemo natanko tri nekolinearne izhodiščne točke.

Če vemo, da je točka T od izhodiščne točke A oddaljena za razdaljo a, točke T ne moremo natančno določiti, ker so od točke A za razdaljo a oddaljene vse točke na krožnici s središčem v A in polmerom a (slika 4).



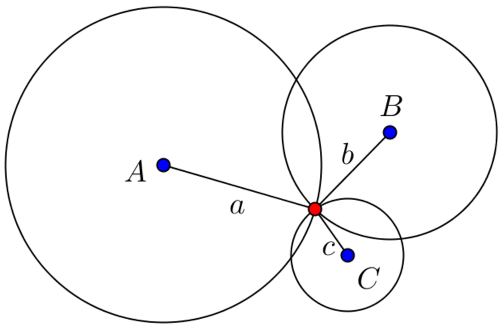
Slika 4 (vir: avtor)

Če poznamo še oddaljenost točke T od izhodiščne točke B, imamo na voljo le še največ dve možnosti (slika 5).



Slika 5 (vir: avtor)

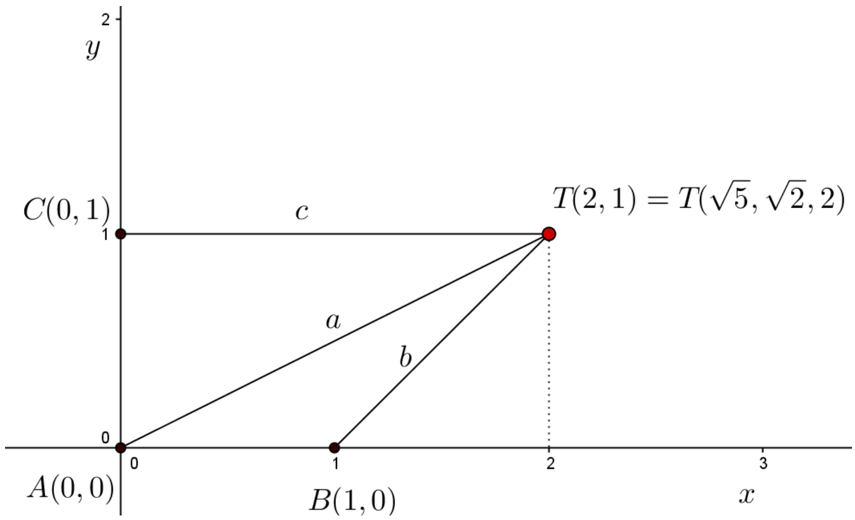
Potrebujemo še tretjo izhodiščno točko C, ki ne leži na premici skozi točki A in B (slika 6). Če bi točka C ležala na tej premici, bi še vedno lahko imeli dve možnosti.



Slika 6 (vir: avtor)

3.2 Primer 1

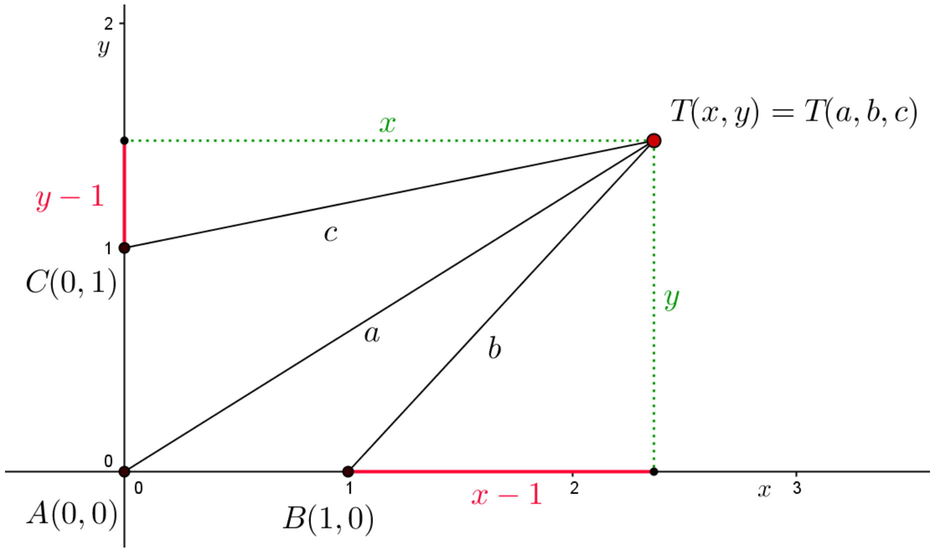
Poglejmo si primer kako določimo točkovne koordinate točke $T(2,1)$ podane v kartezičnih koordinatah. Določiti moramo razdalje a, b in c (slika 7). Očitno je $c = 2$. Razdalja a je hipotenuza v pravokotnem trikotniku s krakoma dolžine 2 in 1. Zapišimo Pitagorov izrek $a^2 = 2^2 + 1^2$. Sledi $a = \sqrt{5}$. Podobno je b hipotenuza v pravokotnem trikotniku s katetama dolžine 1. Dobimo $b^2 = 1^2 + 1^2$, torej je $b = \sqrt{2}$. Sledi $T(\sqrt{5}, \sqrt{2}, 2)$.



Slika 7 (vir: avtor)

4 PRETVORBA IZ KARTEZIČNIH KOORDINAT V TOČKOVNE KOORDINATE

Naj bo točka $T(x, y)$ podana v kartezičnih koordinatah. Poiščimo njene točkovne koordinate.



Slika 8 (vir: avtor)

S pomočjo Pitagorovega izreka zapišimo naslednje enačbe (slika 8):

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$b^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$$c^2 = (y-1)^2 + x^2.$$

Izrazimo a, b in c:

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{a = \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \boldsymbol{b = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \\ \boldsymbol{c = \sqrt{(y-1)^2 + x^2}}. \end{gathered}}$$

Dobili smo formule za izračun točkovnih koordinat točke, če poznamo njene kartezične koordinate. Očitno je, da moramo samo vstaviti x in y v zgornje enačbe. Točko zapišemo kot $T(a, b, c)$.

4.1 Primer 2

Kot primer pretvorbe poiščimo točkovne koordinate točke $T(2, 4)$. Uporabimo izpeljane formule:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(2 - 1)^2 + 4^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$c = \sqrt{(y - 1)^2 + x^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Dobimo točkovne koordinate $T(2\sqrt{5},\ \sqrt{17},\ \sqrt{13})$.

5 PRETVORBA IZ TOČKOVNIH KOORDINAT V KARTEZIČNE KOORDINATE

Sedaj pa si poglejmo obratno pot; kako poiščemo kartezične koordinate točke T podane v točkovnih koordinatah $T(a, b, c)$.

Ponovno izhajamo iz enačb, ki jih dobimo s pomočjo Pitagorovega izreka:

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$b^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$$c^2 = (y-1)^2 + x^2.$$

Po kvadriranju dvočlenikov dobimo:

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$b^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$c^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

Od prve enačbe odštejemo drugo enačbo, nato od prve enačbe odštejemo še tretjo enačbo:

$$a^2 - b^2 = x^2 + y^2 - (x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 + y^2 - x^2 + 2x - 1 - y^2 = 2x - 1$$

$$a^2 - c^2 = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + y^2 - x^2 - y^2 + 2y - 1 = 2y - 1$$

in dobimo:

$$a^2 - b^2 = 2x - 1$$

$$a^2 - c^2 = 2y - 1.$$

Preoblikujemo:

$$a^2 - b^2 + 1 = 2x$$

$$a^2 - c^2 + 1 = 2y.$$

Izrazimo x in y:

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{x = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2}} \\[2em] \boldsymbol{y = \frac{a^2 - c^2 + 1}{2}} \end{gathered}}$$

in dobimo kartezične koordinate točke T.

Ker smo formule izpeljali iz treh enačb z dvema neznankama, se lahko zgodi, da pri poljubno izbranih razdaljah a, b in c, točka $T(a,b,c)$ sploh ne obstaja. Točka T obstaja, če zadošča začetnim enačbam:

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$b^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$$c^2 = (y-1)^2 + x^2.$$

Takšno točko bomo imenovali **regularna točka**.

5.1 Primer 3

Kot primer pretvorbe poiščimo kartezične koordinate točke $T(\sqrt{13}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10})$. Izračunajmo x in y:

$$x = \frac{a^2-b^2+1}{2} = \frac{\sqrt{13}^2-(2\sqrt{2})^2+1}{2} = \frac{13-8+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{a^2-c^2+1}{2} = \frac{\sqrt{13}^2-\sqrt{10}^2+1}{2} = \frac{13-10+1}{2} = \frac{4}{2} = 2\ .$$

Dobimo točko $T(3, 2)$ v kartezičnih koordinatah.

Preverimo, ali dobljena x in y zadoščata osnovnim trem enačbam:

$$a^2 = x^2 + y^2 \qquad b^2 = (x-1)^2 + y^2 \qquad c^2 = (y-1)^2 + x^2$$

$$\sqrt{13}^2 = 3^2 + 2^2 \qquad (2\sqrt{2})^2 = (3-1)^2 + 2^2 \qquad (\sqrt{10})^2 = (2-1)^2 + 3^2$$

$$13 = 9 + 4 \qquad 8 = 2^2 + 2^2 \qquad 10 = 1^2 + 3^2$$

$$13 = 13 \qquad 8 = 8 \qquad 10 = 10$$

Vidimo, da so pogoji izpolnjeni, zato je točka T regularna.

5.2 Primer 4

Poskusimo poiskati še kartezične koordinate točke $T(\sqrt{3}, 2, 1)$. Izračunajmo x in y:

$$x = \frac{a^2-b^2+1}{2} = \frac{\sqrt{3}^2-2^2+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y = \frac{a^2-c^2+1}{2} = \frac{\sqrt{3}^2-1^2+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Če dobljeno vstavimo v enačbo $a^2 = x^2 + y^2$, dobimo:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Ker pa vemo, da je $a = \sqrt{3} \neq \frac{3}{2}$, točka T ni regularna (ne obstaja).

6 RAZDALJA MED TOČKAMA

Izpeljimo formulo za razdaljo med regularnima točkama

$$A(a_1, b_1, c_1) \text{ in } B(a_2, b_2, c_2)$$

podanima s točkovnimi koordinatami.

V kartezičnih koordinatah izračunamo razdaljo med točkama $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ po formuli [2]:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Točki A in B lahko s pomočjo točkovnih koordinat zapišemo kot $A\left(\frac{a_1^2-b_1^2+1}{2}, \frac{a_1^2-c_1^2+1}{2}\right)$ in $B\left(\frac{a_2^2-b_2^2+1}{2}, \frac{a_2^2-c_2^2+1}{2}\right)$.

Podatke vstavimo v zgornjo enačbo:

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\frac{a_2^2-b_2^2+1}{2} - \frac{a_1^2-b_1^2+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2^2-c_2^2+1}{2} - \frac{a_1^2-c_1^2+1}{2}\right)^2}.$$

Poenostavimo:

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\frac{(a_2^2-a_1^2)+(b_1^2-b_2^2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(a_2^2-a_1^2)+(c_1^2-c_2^2)}{2}\right)^2},$$

$$d(A,B) = \sqrt{\frac{1}{4}\left((a_2^2 - a_1^2) + (b_1^2 - b_2^2)\right)^2 + \frac{1}{4}\left((a_2^2 - a_1^2) + (c_1^2 - c_2^2)\right)^2}$$

in dobimo iskano formulo:

$$\boxed{d(A,B) = \frac{1}{2}\sqrt{\left((a_2^2 - a_1^2) + (b_1^2 - b_2^2)\right)^2 + \left((a_2^2 - a_1^2) + (c_1^2 - c_2^2)\right)^2}.}$$

6.1 Primer 5

Poglejmo si primer, kako bi izračunali razdaljo med točkama $A(\sqrt{5}, \sqrt{2}, 2)$ in $B(\sqrt{13}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10})$. Iz prejšnjih poglavij vemo, da sta točki regularni.

Postopek je sledeč:

$$d(A,B) = \frac{1}{2}\sqrt{\left((a_2^2 - a_1^2) + (b_1^2 - b_2^2)\right)^2 + \left((a_2^2 - a_1^2) + (c_1^2 - c_2^2)\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\sqrt{13}^2 - \sqrt{5}^2\right) + \left(\sqrt{2}^2 - (2\sqrt{2})^2\right)\right)^2 + \left(\left(\sqrt{13}^2 - \sqrt{5}^2\right) + \left(2^2 - \sqrt{10}^2\right)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left((13-5) + (2-8)\right)^2 + \left((13-5) + (4-10)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8}$$

$$= \frac{1}{2}2\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

Ugotovimo, da je razdalja med danima točkama enaka $\sqrt{2}$.

7 PLOŠČINA IN OBSEG TRIKOTNIKA

Poglejmo še kako izračunamo ploščino trikotnika, če so oglišča podana s točkovnimi koordinatami. Nekatere enačbe že poznamo [2]. To so:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|,$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2} \quad \text{in} \quad y = \frac{a^2 - c^2 + 1}{2}.$$

Točke $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ in $C(x_3,\ y_3)$ lahko zato zapišemo kot $A\left(\frac{a_1^2 - b_1^2 + 1}{2}, \frac{a_1^2 - c_1^2 + 1}{2}\right)$, $B\left(\frac{a_2^2 - b_2^2 + 1}{2}, \frac{a_2^2 - c_2^2 + 1}{2}\right)$ in $C\left(\frac{a_3^2 - b_3^2 + 1}{2}, \frac{a_3^2 - c_3^2 + 1}{2}\right)$.

Podatke vstavimo v enačbo za ploščino trikotnika:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{a_2^2 - b_2^2 + 1}{2} - \frac{a_1^2 - b_1^2 + 1}{2} & \frac{a_3^2 - b_3^2 + 1}{2} - \frac{a_1^2 - b_1^2 + 1}{2} \\ \frac{a_2^2 - c_2^2 + 1}{2} - \frac{a_1^2 - c_1^2 + 1}{2} & \frac{a_3^2 - c_3^2 + 1}{2} - \frac{a_1^2 - c_1^2 + 1}{2} \end{matrix}\right\|.$$

Poenostavimo in dobimo:

$$\boxed{S_{\Delta} = \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix} (a_2^2 - a_1^2) + (b_1^2 - b_2^2) & (a_3^2 - a_1^2) + (b_1^2 - b_3^2) \\ (a_2^2 - a_1^2) + (c_1^2 - c_2^2) & (a_3^2 - a_1^2) + (c_1^2 - c_3^2) \end{matrix}\right\|.}$$

Obseg trikotnika je vsota vseh dolžin stranic trikotnika. Hitro vidimo, da če znamo izračunati razdalje med točkami, znamo izračunati tudi obseg trikotnika:

$$\boxed{o_{\Delta} = d(A, B) + d(A, C) + d(B, C).}$$

7.1 Primer 6

Kot primer izračuna ploščine trikotnika vzemimo trikotnik z oglišči $A\left(\sqrt{5}, \sqrt{2}, 1\right)$, $B\left(\sqrt{13}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10}\right)$ in $C(2\sqrt{5}, \ \sqrt{17}, \ \sqrt{13})$. Iz prejšnjih poglavij vemo, da so točke regularne.

Izračunajmo ploščino:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}(a_2^2 - a_1^2) + (b_1^2 - b_2^2) & (a_3^2 - a_1^2) + (b_1^2 - b_3^2) \\ (a_2^2 - a_1^2) + (c_1^2 - c_2^2) & (a_3^2 - a_1^2) + (c_1^2 - c_3^2)\end{matrix}\right\|$$

$$= \left\|\begin{matrix}(\sqrt{13}^2 - \sqrt{5}^2) + (\sqrt{2}^2 - (2\sqrt{2})^2) & ((2\sqrt{5})^2 - \sqrt{5}^2) + (\sqrt{2}^2 - \sqrt{17}^2) \\ (\sqrt{13}^2 - \sqrt{5}^2) + (1^2 - \sqrt{10}^2) & ((2\sqrt{5})^2 - \sqrt{5}^2) + (1^2 - \sqrt{13}^2)\end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}(13 - 5) + (2 - 8) & (20 - 5) + (2 - 17) \\ (13 - 5) + (1 - 10) & (20 - 5) + (1 - 13)\end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}8 + (-6) & 15 + (-15) \\ 8 + (-9) & 15 + (-12)\end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}2 & 0 \\ -1 & 3\end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{4}|2 \cdot 3 - 0(-1)|$$

$$= \frac{1}{4}|6 - 0|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 6$$

$$= \frac{3}{2}$$

Ploščina iskanega trikotnika je enaka $\frac{3}{2}$.

8 TOČKOVNE KOORDINATE V SPLOŠNEM

Naj bodo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ različne, nekolinearne izhodiščne točke. Točki $T(x, y)$ v kartezičnih koordinatah lahko zmeraj priredimo točkovne koordinate, saj le izračunamo razdaljo točke T do izhodiščnih točk A, B in C. Težje pa je točki $T(a, b, c)$, ki je podana v točkovnih koordinatah, prirediti točko v kartezičnih koordinatah. Pokazali bomo, da je prav nekolinearnost točk A, B in C dovolj, da ima regularna točka $T(a, b, c)$ enoličen zapis v kartezičnih koordinatah. Kartezične in točkovne koordinate točke T v splošnem povežemo na naslednji način:

$$a^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2$$

$$b^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

$$c^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = x^2 - 2xx_3 + x_3^2 + y^2 - 2yy_3 + y_3^2.$$

Od prve enačbe najprej odštejemo drugo in nato še tretjo enačbo:

$$a^2 - b^2 = 2xx_2 - 2xx_1 + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + 2yy_2 - 2yy_1$$

$$a^2 - c^2 = 2xx_3 - 2xx_1 + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 + 2yy_3 - 2yy_1.$$

Člene, ki vsebujejo neznanki x in y zapišemo skupaj:

$$2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) = a^2 - b^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2$$

$$2x(x_3 - x_1) + 2y(y_3 - y_1) = a^2 - b^2 + x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2.$$

Ločimo več možnosti:

a) $\boldsymbol{x_2 - x_1 = 0}$ **in** $\boldsymbol{x_3 - x_1 = 0.}$

Sledi, da je $x_1 = x_2 = x_3$, zato so točke A, B in C kolinearne, kar je v nasprotju z našo predpostavko. Zato ta možnost odpade.

b) $\boldsymbol{x_2 - x_1 = 0}$ **in** $\boldsymbol{x_3 - x_1 \neq 0.}$

Sledi $x_1 = x_2$. Če bi veljalo tudi $y_2 - y_1 = 0$, bi točki A in B bili enaki, kar ni mogoče. Dobimo naslednji dve enačbi:

$$2y(y_2 - y_1) = a^2 - b^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2$$

$$2x(x_3 - x_1) + 2y(y_3 - y_1) = a^2 - b^2 + x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2$$

Iz prve enačbe lahko izrazimo y in ga uporabimo, da iz druge enačbe izrazimo x. Podoben razmislek velja, če je $x_3 - x_1 = 0$ in $x_2 - x_1 \neq 0$.

c) $\boldsymbol{x_2 - x_1 \neq 0}$ in $\boldsymbol{x_3 - x_1 \neq 0}$.

Iz obeh enačb:

$$2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) = a^2 - b^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2$$

$$2x(x_3 - x_1) + 2y(y_3 - y_1) = a^2 - b^2 + x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2$$

lahko enolično izrazimo x in y, če ena enačba ni večkratnik druge. Sicer bi za $x_2 - x_1 = k_1$ in $y_2 - y_1 = k_2$ veljalo $x_3 - x_1 = l \cdot k_1$ in $y_3 - y_1 = l \cdot k_2$, kjer sta k_1 in k_2 celi števili, l pa neko neničelno celo število. Naklon daljice med točkama A in B bi bil enak:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Naklon med točkama A in C pa bi bil enak:

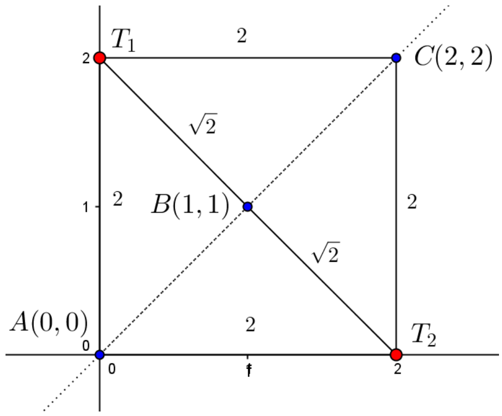
$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{l \cdot k_2}{l \cdot k_1} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Vidimo, da bi točke A, B in C bile kolinearne, kar je ponovno v nasprotju z našo predpostavko.

Iz analize zgornjih treh možnosti smo ugotovili, da morajo za enolično rešitev točke A, B in C res biti nekolinearne, kar so naše, v naprej izbrane točke $A(0,0)$, $B(1,0)$ in $C(0,1)$ v začetnih poglavjih, tudi bile. Sicer bi se lahko zgodilo, da dobimo tudi dve rešitvi, kar bomo pokazali na naslednjem primeru.

8.1 Primer 7

Izberimo izhodiščne točke $A(0,0)$, $B(1,1)$ in $C(2,2)$. Opazimo lahko, da so izhodiščne točke kolinearne. Kljub temu poskusimo poiskati kartezične koordinate točke $T(2,\sqrt{2},2)$.



Slika 9 (vir: avtor)

Preveriti bi bilo treba, ali je točka $T(2,\sqrt{2},2)$ sploh regularna, kar lahko s pomočjo skice koordinatnega sistema in nekaj geometrijskega znanja hitro opazimo (slika 9). Kartezične in točkovne koordinate točke T povežemo z naslednjimi enačbami:

$$4 = 2^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2$$

$$2 = \sqrt{2}^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y$$

$$4 = 2^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 = x^2 + 4 - 4x + y^2 + 4 - 4y.$$

Od prve enačbe najprej odštejemo drugo in nato še tretjo enačbo:

$$2 = (x^2 + y^2) - (x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y) = 2x + 2y - 2$$

$$0 = (x^2 + y^2) - (x^2 + 4 - 4x + y^2 + 4 - 4y) = 4x + 4y - 8.$$

Če obe enačbi preoblikujemo, dobimo:

$$2x + 2y - 4 = 0$$

$$4x + 4y - 8 = 0.$$

Opazimo, da je druga enačba dvakratnik prve, zato jo lahko odstranimo. Neznanki x in y, ki zadoščata enačbi $2x + 2y - 4 = 0$, morata zadoščati tudi prvotni enačbi $4 = x^2 + y^2$ od katere smo odštevali preostali dve. Iz prve enačbe lahko izrazimo npr. $y = 2 - x$ in ga vstavimo v drugo enačbo:

$$4 = \mathrm{x}^2 + (2 - \mathrm{x})^2$$

$$4 = \mathrm{x}^2 + 4 + \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x}$$

$$2\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} = 0$$

$$2(\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}) = 0$$

$$\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} = 0$$

$$\mathrm{x}(\mathrm{x} - 2) = 0.$$

Torej je $x_1 = 0$ ali $x_2 = 2$. Izračunamo še y in dobimo $y_1 = 2$ ali $y_2 = 0$. Dobimo dve rešitvi in sicer $T_1(0, 2)$ in $T_2(2, 0)$, kar lahko vidimo tudi na sliki.

9 ZAKLJUČEK

Kartezične koordinate so vsem dobro znane. Če znanje malo nadgradimo, ugotovimo, da lahko lego točke v ravnini opišemo tudi drugače. To lahko naredimo npr. s polarnimi, trilinearnimi ali baricentričnimi koordinatami. Cilj raziskovalne naloge pa je bil poiskati še kakšno drugo možnost. Porodila se je ideja, da bi lahko lego poljubne točke zapisali s pomočjo razdalj od nekih vnaprej podanih točk. Te točke smo poimenovali izhodiščne točke, razdalje poljubne točke do izhodiščnih točk pa predstavljajo nove, tako imenovane točkovne koordinate. Razmisliti je bilo potrebno, da za enoličen opis lege točke v koordinatnem sistemu potrebujemo natanko tri nekolinearne izhodiščne točke. V nalogi smo zaradi lažjega računanja za izhodiščne točke izbrali pare $(0,0)$, $(1,0)$ in $(0,1)$. Nato smo opisali postopek pretvarjanja kartezičnih koordinat v točkovne koordinate in obratno. V nadaljevanju je sledila še izpeljava formule za razdaljo med točkama ter formul za obseg in ploščino trikotnika. Na koncu smo izpeljali tudi formule za pretvarjanje med kartezičnimi in točkovnimi koordinatami pri poljubno izbranih izhodiščnih točkah in s tem pokazali, da gre to narediti tudi v splošnem.

10 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Matematika je veda, ki zahteva veliko znanja, logičnega razmišljanja in predvsem razumevanja, zato ni presenetljivo, da pri velikem številu mladih tekom šolanja upade zanimanje zanjo. Običajno je za to krivo teoretično podajanje snovi, brez prave uporabne vrednosti, zato matematiko pogosto spremlja stavek: »Kje bomo pa to potrebovali?«

Cilj te raziskovalne naloge je prikazati, da je matematika lahko zelo uporabna, hkrati pa pritegniti čim več ljudi in povečati njihovo zanimanje zanjo.

Raziskovalna naloga se ukvarja z določanjem položaja objektov. Za to lahko uporabimo dobro znani kartezični koordinatni sistem in v njem tako imenovane kartezične koordinate. Gre za zelo uporaben koncept, pri katerem lahko s pomočjo števil določimo natančno lego objekta. A le malokdo ve, da lahko to storimo tudi drugače, ne le s kartezičnimi koordinatami. Pogosto se za druge koordinate odločimo takrat, ko so le-te v dani situaciji bolj uporabne in z njimi lažje opišemo določene lastnosti. Tako na primer polarne koordinate uporabljamo takrat, ko želimo množiti kompleksna števila, saj je množenje kompleksnih števil v polarnih koordinatah lažje kot v kartezičnih koordinatah. V tej raziskovalni nalogi so predstavljene **točkovne koordinate**, ki so zelo uporabne takrat, ko je pomembna razdalja do izvornih točk. Takšno situacijo lahko srečamo v vojski, kjer lego vojaških vozil in letal določamo z oddaljenostjo do različnih radarski postaj. Hkrati pa tako podane koordinate onemogočajo sovražniku, ki bi lahko te koordinate prestregel, da bi ugotovil lego posameznega vojaškega objekta brez informacije o lokaciji radarjev. Enak koncept lahko uporabimo tudi v mobilni telefoniji, kjer lahko s pomočjo zadostnega števila radijskih oddajnikov in merjenjem razdalje od njih do vira ugotovimo pozicijo le-tega.

Opisani primeri kažejo, da je snov zajeta v raziskovalni nalogi zelo uporabna, hkrati pa omogoča učenje novih pristopov in s tem širi zanimanje za matematiko.

11 LITERATURA

[1] F. Harary, R. A. Melter, *On the metric dimension of a graph*, Ars Combinatoria, 1976, vol. 2, str. 191–195.

[2] D. Kavka, G. Pavlič, M. Rugelj, J. Šparovec, Linea (Matematika za 1. letnik gimnazij), Ljubljana, Modrijan, 2002.

[3] M. Šket, Produkti in konjugacije v geometriji trikotnika (diplomsko delo), Maribor, 2011, str. 9–10, 25–26.

[4] http://mp.feri.um.si/osebne/petek/Folije/M2-izredni/ucbenik-M2-izredni.pdf, str. 3–7, [dostopno: 2. 12. 2015].

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_dimension_%28graph_theory%29 [dostopno: 2. 12. 2015].

Vse slike so nastale s pomočjo programa GeoGebra.