Mladi za napredek Maribora 2016

33. srečanje

»Noli tangerecirculos meos«

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor:	DOMEN PUKL-KOPINČ, MIHA POTOČNIK
Mentor:	JOŽEF SENEKOVIČ
Šola:	OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2016

Kazalo

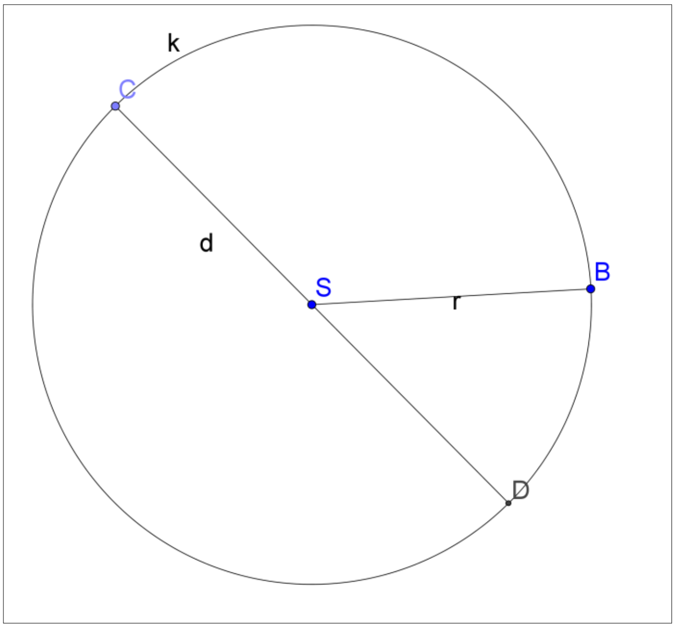
1. Povzetek

Rek »noli tangerecirculos meos« pomeni: »Pustite moje kroge«. To bi naj bile zadnje besede grškega matematika Arhimeda. Arhimed je znan po različnih področjih raziskovanja matematike in fizike. Eno izmed področij so lastnosti kroga, oziroma uporaba znanj o krogu v drugih problemih. Najbolj znana je uporaba v arbelosu (čevljarski nož). V raziskovalni nalogi želiva predstaviti Arhimedov prispevek o arbelosu. Predstavila bova tudi arbelosu podoben lik, ki se imenuje salinon. Natančneje bova opisala nekaj lastnosti teh dveh likov in dokazala dve zanimivi lastnosti.

2. Uvod

2.1 Krog

Krog je lik v ravnini, ki je omejen s krožnico. Ima polmer, središče in premer. Polmer je razdalja med središčem kroga in katerokoli točko na krožnici. Premer je vsota dveh polmerov. V našem primeru je polmer označen s črko *r*, središče kroga s *S*, krožnica s *k* in premer z *d* (slika 1).



Slika 1

Obseg kroga (dolžina krožnice) je enak produktu premera kroga in števila π, $o = \pi \cdot d$. Če premer kroga zapišemo z 2*r*, je obseg kroga $o = 2\pi \cdot r$.

Krogu izračunamo tudi ploščino. Ploščina kroga je enaka produktu kvadrata polmera kroga in števila π, torej $p = \pi \cdot r^2$.

2.2 Medsebojne lege premice in kroga

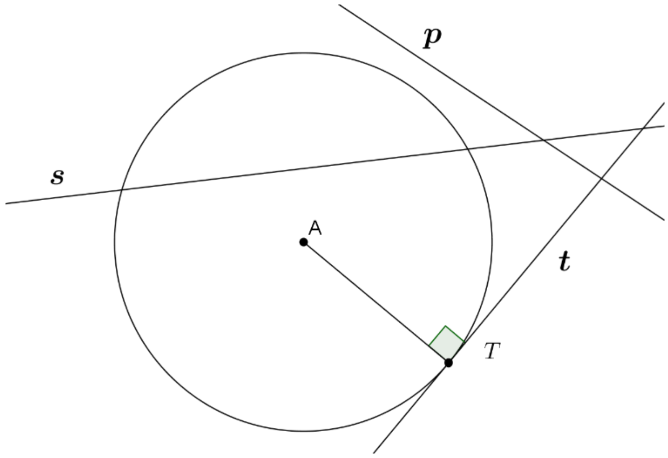
Premica je lahko v ravnini s krogom v različnih medsebojnih legah (slika 2).

Mimobežnica *p* s krogom nima skupne točke.

Premica *p* je mimobežna narisanemu krogu.

Sečnica *s* ima s krožnico dve skupni točki.

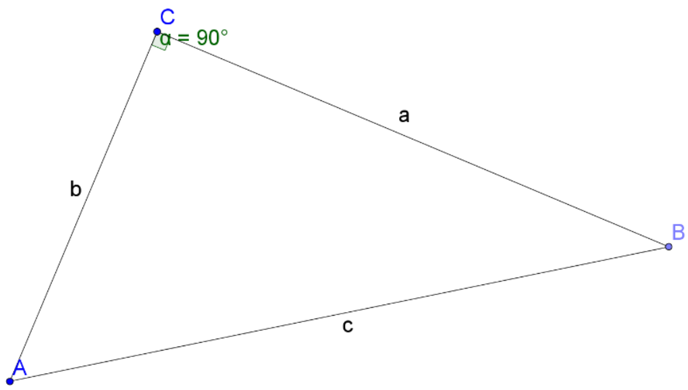
Dotikalnica (tangenta) *t* se dotika kroga v eni točki.



Slika 2

2.3 Pravokotni trikotnik

Pravokotni trikotnik je lik v ravnini, ki je omejen s tremi daljicami, z dvema katetama (oklepata pravi kot) in hipotenuzo (leži nasproti pravega kota). Ima tri notranje kote. Velikost enega kota je 90° (zato je trikotnik pravokotni), druga dva kota sta ostra kota. Vsota velikosti vseh notranjih kotov v pravokotnem trikotniku je 180° (slika 3 a).



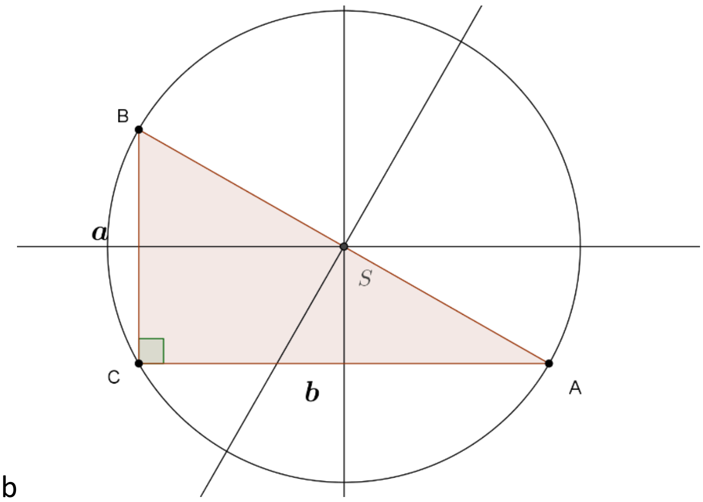
Slika 3 a

Obseg pravokotnega trikotnika je enak vsoti dolžin obeh katet in hipotenuze, *o* = *a* + *b* + *c.*

Ploščina pravokotnega trikotnika pa je enaka polovici produkta dolžin obeh katet, zapisano z enačbo $p = \frac{ab}{2}$.

Za pravokotni trikotnik je zelo pomemben Pitagorov izrek, ki povezuje dolžine vseh treh stranic. S pomočjo Pitagorovega izreka lahko izračunamo dolžino ene stranice, če poznamo dolžini drugih dveh stranic. Pitagorov izrek trdi, da je kvadrat dolžine hipotenuze enak vsoti kvadratov obeh katet. Torej je dolžina hipotenuze enaka kvadratnemu korenu vsote kvadratov katet. Za pravokotni trikotnik (slika 3) zapišemo $c^2 = a^2 + b^2$ in zato $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pravokotnem trikotniku lahko očrtamo krožnico. Središče pravokotnemu trikotniku očrtane krožnice je v presečišču simetral stranic (slika 3 b).



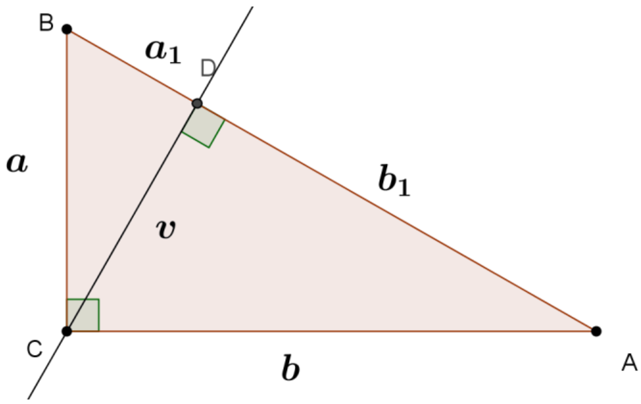
Slika 3 b

Središče leži na razpolovišču hipotenuze. Posledica te ugotovitve je, da je vsak trikotnik, ki mu eno stranico narišemo skozi središče kroga, vsa tri oglišča pa ležijo na krožnici, pravokoten trikotnik.

V nadaljevanju poglejmo zelo pomembno lastnost v pravokotnem trikotniku, ki jo bomo potrebovali pri opisu arbelosa.

2.4 Višinski izrek

Na spodnji sliki (slika 4) je pravokotni trikotnik *ABC* s katetama *a* in *b* ter hipotenuzo *c*. Daljica *CD* je višina na hipotenuzo z dolžino *v*.



Slika 4

Dolžina hipotenuze c je enaka vsoti dolžin daljic a_1 in b_1. Zapišimo Pitagorova izreka za trikotnika *ADC* in *BCD*:

$b^2 = v^2 + b_1^2$ in $a^2 = v^2 + a_1^2$.

Zapišemo Pitagorov izrek tudi za trikotnik *ABC*, $c^2 = a^2 + b^2$. Vemo, da je dolžina hipotenuze enaka vsoti dolžin daljic a_1 in b_1, zato je

$$(a_1 + b_1)^2 = a^2 + b^2$$

$$a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 = a^2 + b^2, \text{ ker je } a_1^2 = a^2 - v^2 \text{ in } b_1^2 = b^2 - v^2$$

$$a^2 - v^2 + 2a_1b_1 + b^2 - v^2 = a^2 + b^2$$

$$2a_1b_1 = 2v^2$$

$$v^2 = a_1b_1$$

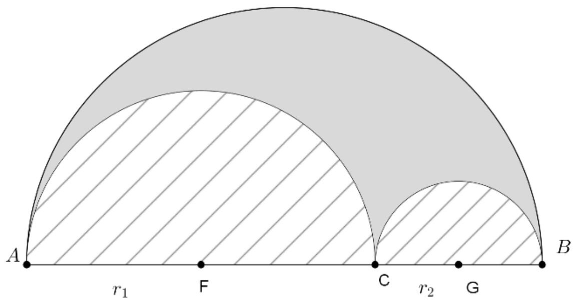
Kar pomeni, da lahko s poznavanjem obeh dolžin odsekov na hipotenuzi izračunamo višino na hipotenuzo v pravokotnem trikotniku.

3. Arbelos

3.1 Arbelos

Arbelos ali po grško čevljarski nož (slika 5) je lik, omejen s tremi polkrogi tako, da je vsota polmerov manjših polkrogov enaka polmeru večjega polkroga. Lahko ga prikažemo z geometrijsko sliko (slika 6).

Slika 5



Slika 6

Premer največjega polkroga je daljica *AB*. Na sliki vidimo, da je enak vsoti premerov včrtanih manjših krogov, $|AB| = 2r_1 + 2r_2$, tako je polmer največjega kroga enak $r_1 + r_2$. Kjer je r_1 polmer kroga s premerom *AC* in r_2 polmer kroga s premerom *BC*.

3.2 Obseg arbelosa

Obseg arbelosa je enak vsoti dolžin vseh polkrogov, ki ga omejujejo (slika 6). Zapišemo:

Obseg polkroga s polmerom r_1 je $\frac{r_1}{2} \cdot 2\pi$.

Obseg polkroga s polmerom r_2 je $\frac{r_2}{2} \cdot 2\pi$.

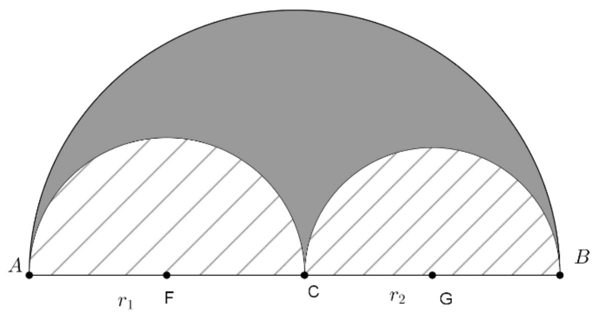
Obseg polkroga s polmerom *r* je $\frac{r}{2} \cdot 2\pi$.

Obseg arbelosa je tako $\frac{r_1}{2} 2\pi + \frac{r_2}{2} 2\pi + \frac{r}{2} 2\pi$ = $r_1\pi + r_2\pi + r\pi$ = $\pi(r_1 + r_2 + r)$, kar je enako $2\pi r$, saj je $r_1 + r_2 = r$.

UGOTOVITEV: Obseg arbelosa je ne glede na dolžino polmerov včrtanih polkrogov enak obsegu največjega kroga s polmerom $r_1 + r_2$.

3.3 Ploščina arbelosa

Ploščina arbelosa je enaka razliki ploščine velikega polkroga in ploščin manjših polkrogov s polmeroma r_1 in r_2 (slika 8).



Slika 8

Zapisano z enačbo:

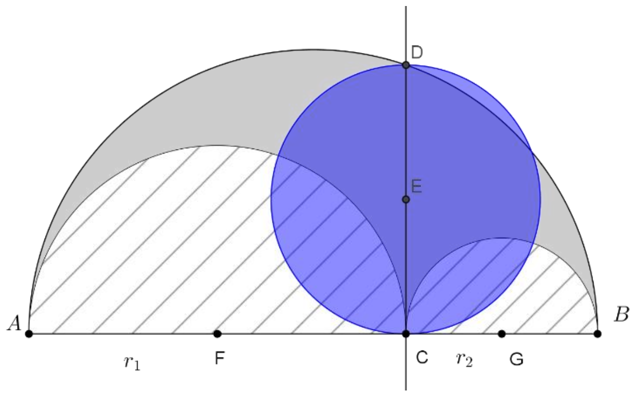
$$p = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r_1^2}{2} - \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi(r_1+r_2)^2}{2} - \frac{\pi r_1^2}{2} - \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{2\pi r_1 r_2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} - \frac{\pi r_1^2}{2} - \frac{\pi r_2^2}{2} = \pi r_1 r_2.$$

V primeru, da sta včrtana polkroga skladna, je $r_1 = r_2$. Ploščina arbelosa pa πr_1^2.

UGOTOVITEV: Ploščina arbelosa je ne glede na dolžino polmerov včrtanih krogov $\pi r_1 r_2$.

3.4 Krog v arbelosu

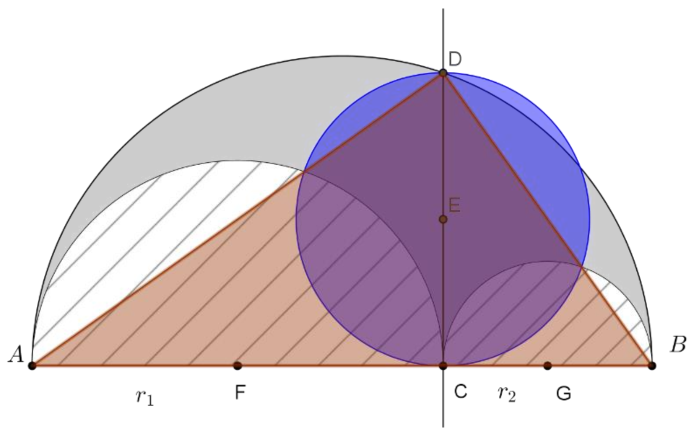
V točki, kjer se dotikata včrtana polkroga (točka *C*), načrtamo pravokotnico na premer velikega polkroga. Pravokotnica seka krožnico največjega polkroga v točki *D*. Na arbelos lahko narišemo krog, ki ima za premer daljico *CD* (slika 9). Najin cilj je pokazati, da je ploščina narisanega kroga enaka ploščini arbelosa. Za ta namen potrebujemo višinski izrek in izračunano ploščino arbelosa.



Slika 9

Za ploščino arbelosa smo zgoraj zapisali: $p = \pi r_1 r_2$.

Nato zapišemo še ploščino narisanega kroga. Premer tega kroga je $|CD|$, središče tega kroga označimo z *E*. Ploščino bomo poiskali s pomočjo pravokotnega trikotnika *ABD*, katerega višina *CD* je premer narisanega kroga (slika 10).



Slika 10

Po višinskem izreku (kvadrat višine na hipotenuzo je enak produktu odsekov na hipotenuzi) je premer narisanega kroga enak $|CD| = \sqrt{2r_1 \cdot 2r_2}$, torej je polmer načrtanega kroga na arbelos enak $|CE| = \frac{\sqrt{2r_1 \cdot 2r_2}}{2} = \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{2} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$.

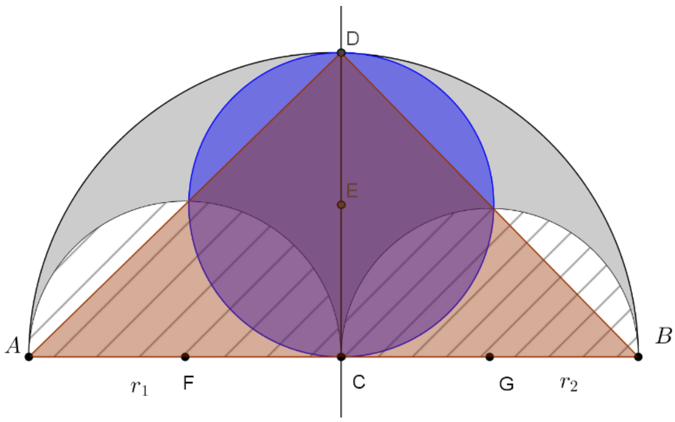
Ker poznamo polmer, lahko izračunamo tudi ploščino kroga:

$p = \pi\sqrt{r_1 \cdot r_2}^2 = \pi r_1 r_2$.

Zapisana ploščina je enaka ploščini arbelosa.

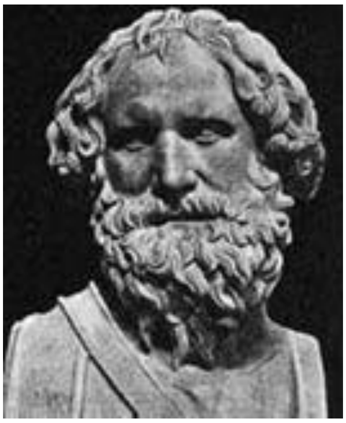
UGOTOVITEV: Ploščina kroga na arbelosu, ki ima za polmer daljico z enim krajiščem v dotikališču včrtanih manjših polkrogov, za drugo pa presečišče pravokotnice na premer večjega kroga in krožnice večjega polkroga, je enak ploščini arbelosa.

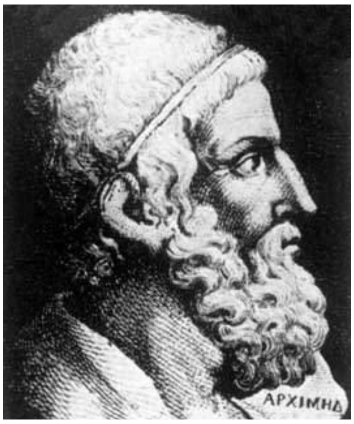
Izračunajmo še obseg kroga. Tako je $o = 2\pi(\sqrt{r_1 \cdot r_2})$. Kot zanimivost zapišimo še obseg arbelosa, ki je $2\pi(r_1 + r_2)$. Če za včrtana kroga velja, da je $r_1 = r_2$, je obseg načrtanega kroga na arbelos $o = 2\pi(\sqrt{r_1 \cdot r_1}) = 2\pi r_1$, torej obseg enega izmed včrtanih krogov (slika 11).



Slika 11

4. Arhimed





Slika 12

Arhimed (Αρχιμήδης) je bil starogrški matematik, fizik, mehanik, izumitelj in astronom (slika 12). Čeprav o njegovem življenju ni veliko znanega, spada zaradi svojih del med največje matematike in fizike vseh časov.

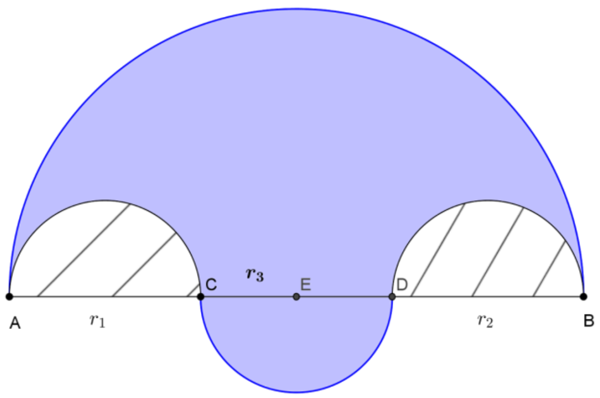
Rodil se je okoli leta 287 pr. n. št. Njegov največji prispevek je na področju matematike. Izračunal je ploščino kroga, površino in prostornino krogle, ploščino pod parabolo, s pomočjo Arhimedovih spiral pa je določil približek števila π. V svojem življenju je eden izmed prvih uporabljal matematiko za razlago fizikalnih pojavov, postavil pa je tudi temelje statike in hidrostatike, prav tako pa je razložil delovanje vzvoda. Izumil je vijačno črpalko, škripčevje ter vojaške stroje, s katerimi je prispeval k obrambi Sirakuz. Napisal je tudi nekaj matematičnih spisov, ki so jih prebirali matematiki iz Aleksandrije, vendar niso bili zelo znani.

Poznan je po zapisanem fizikalnem zakonu o vzgonu, ki se glasi: $F = mg = \rho V g$, kar pomeni, da je sila vzgona enaka teži izpodrinjene tekočine (Arhimedov zakon). Do odkritja zakona naj bi prišlo tako, da so nekega dne Arhimedu prinesli krono in ga vprašali, ali je narejena iz čistega zlata ali pa je vanjo primešanega kaj srebra. Arhimed je krono in čisto zlato z enako maso potopil v vodo in videl, da se krona počasneje potopi, saj je primešano srebro, ki ima manjšo gostoto kot zlato.

Med drugo punsko vojno so se prebivalci Sirkuz s pomočjo Arhimeda ubranili, saj je izumil tako imenovan Arhimedov krempelj. Gre za veliko kljuko, s katero so potapljali sovražnikove ladje. Ta odlični matematik je umrl leta 212 pr. n. št. Preden je umrl, je rimski vojak prišel do njega in zahteval, naj mu sledi. Arhimed naj bi na pesku risal kroge in premišljeval o problemu v zvezi s krogi. Arhimed je odklonil zahtevo, dokler ne reši matematičnega problema. Vojak se je razjezil in ga ubil, Arhimedove zadnje besede pa naj bi bile: ”Pustite moje kroge!” (Noli tangerecirculos meos).

5. Salinon

Salinon je lik v ravnini, ki je omejen s štirimi polkrožnicami. Prikažemo ga z geometrijsko sliko (slika 13). Daljica AB je premer največjega polkroga s središčem v točki *E*. Na daljici AB izberemo točki C in D, tako da je $|EC| = |ED| = r_3$. Na nasprotno stran polkroga s premerom AB narišemo polkrog s premerom $|CD| = 2r_3$ in središčem v točki *E*. Narišemo še dva skladna polkroga, ki nista del salinona, s premerom $|AC| = |DB| = r_1 = r_2$. Polkrogi s polmeri r_1 in r_3 niso skladni, saj so odvisni od izbire točke *C* in *D*.



Slika 13

Premer največjega polkroga je enak vsoti vseh polmerov manjših polkrogov, pri tem sta dva polmera enaka. Torej je polmer največjega polkroga $|AC| + |CE| = 2r_1 + r_3$.

5.1 Obseg salinona

Obseg salinona je enak vsoti dolžin velike polkrožnice (s polmerom $2r_1 + r_3$) in treh manjših polkrožnic (s polmeri $r_1,\ r_2,\ r_3$) .

Zapišemo:

Dolžina velike polkrožnice : $\frac{2r\pi}{2} = \ \pi r = \pi(2r_1 + r_3)$.

Dolžina polkrožnic s polmeroma $r_1$in r_2 je $2 \cdot \frac{2r_1\pi}{2} = 2r_1\pi$.

Dolžina polkrožnice s polmerom r_3 je $\frac{2r_3\pi}{2} = r_3\pi$.

Obseg salinona je $o = \pi(2r_1 + r_3) + 2\pi r_1 + \pi r_3 = 4\pi r_1 + 2\pi r_3 = 2\pi(2r_1 + r_3)$. Kar je obseg kroga s polmerom $2r_1 + r_3$, torej največjega kroga s premerom AB .

UGOTOVITEV: Obseg salinona je ne glede na polmere manjših polkrogov, oziroma izbiro točke *C* in *D*, enak obsegu kroga s polmerom $2r_1 + r_3$.

5.2 Ploščina salinona

Ploščino salinona izračunamo tako, da od ploščine največjega polkroga s polmerom $2r_1 + r_3$ odštejemo ploščini skladnih polkrogov s polmeroma r_1 in r_2 in prištejemo ploščino polkroga s polmerom r_3.

Ploščina velikega polkroga s polmerom $2r_1 + r_3$ je $\frac{\pi(2r_1+r_3)^2}{2}$.

Ploščina polkrogov s polmeroma r_1 je $2 \cdot \frac{\pi r_1^2}{2} = \pi r_1^2$.

Ploščina polkroga s polmerom r_3 je $\frac{\pi r_3^2}{2}$.

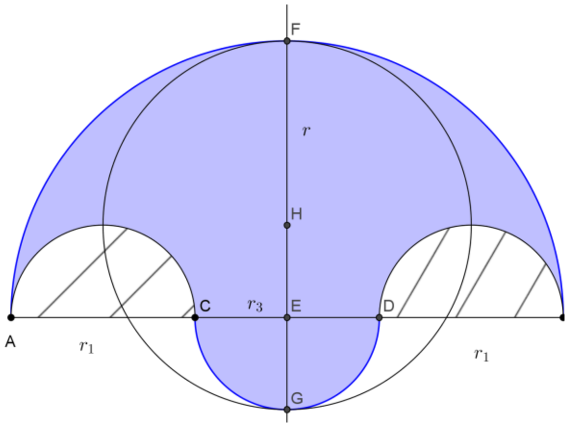
Ploščina salinona je torej $p = \frac{\pi(2r_1+r_3)^2}{2} - \pi r_1^2 + \frac{\pi r_3^2}{2} = \frac{4\pi r_1^2}{2} + \frac{4\pi r_1 r_3}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2} - \pi r_1^2 + \frac{\pi r_3^2}{2}$.

Ko poenostavimo, dobimo $p = \ \pi r_1^2 + 2\,\pi r_1 r_3 + \pi r_3^2 = \pi(r_1 + r_3)^2$.

UGOTOVITEV: Ploščina salinona je enaka ploščini kroga, ki ima polmer enak vsoti polmerov manjših krogov r_1 in r_3 .

5.3 Krog v salinonu

Skozi središče največjega polkroga (točka *E*) narišemo pravokotnico na premer največjega polkroga. Pravokotnica seka krožnico velikega polkroga v točki *F*. Načrtamo krog, ki ima za središče točko *H* in za premer daljico *GH* (slika 14). Pokazala bova, da je ploščina tega kroga enaka ploščini salinona.



Slika 14

Zapisala sva že, da je ploščina salinona $\pi(r_1 + r_3)^2$.

Zapišemo še ploščino načrtanega kroga. Njegov premer je $|GF| = 2r_1 + 2r_3$, torej je njegov polmer $r_1 + r_3$.

Ploščina načrtanega kroga s središčem v točki *H* je $p = \pi(r_1 + r_3)^2$.

UGOTOVITEV: Ploščina načrtanega kroga v salinonu je ne glede na dolžine polmerov manjših polkrogov vedno enaka ploščini salinona.

Zapišemo lahko še obseg narisanega kroga, $o = 2\pi(r_1 + r_3)$.

UGOTOVITEV: Obseg kroga v salinonu je enak vsoti obsegov krogov s polmeroma r_1 in r_3 .

6. Družbena odgovornost

Z raziskovalno nalogo bova omogočila širšemu krogu bralcev, da spoznajo pomen reka »Noli tangerecirculos meos«, ki bi ga naj izustil Arhimed tik pred svojo smrtjo. Z raziskovalno nalogo motivirava vrstnike k spoznavanju matematičnih vsebin, povezanih z geometrijo, konkretneje z znanji o krogu v povezavi z zgodovinskimi dogodki. Bralcem prav tako predstaviva kratek življenjepis Arhimeda, ki je za razvoj znanosti izjemno pomemben, saj si brez njegovih dognanj skorajda ne moremo predstavljati moderne znanosti.

Pri oblikovanju naloge sva se opirala tudi na nekatera izmed sedmih načel družbene odgovornosti (npr. transparentnost, etičnost). Pri izdelavi raziskovalne naloge sva zajemala podatke iz znanih virov, ki jih tudi navajava.

7. Zaključek

V raziskovalni nalogi sva opisala značilnosti kroga in pravokotnega trikotnika, zapisala sva Pitagorov izrek ter predstavila višinski izrek. Izhodišče najine naloge je bil Arhimedov domnevno zadnji stavek »Noli tangerecirculos meos«. Tako sva prikazala dva konkretna primera s katerima se je ukvarjal tudi Arhimed. Izračunala sva ploščino in obseg arbelosa ter s pomočjo višinskega izreka dokazala, da ima arbelos enako ploščino kot krog, ki ga narišemo nanj. Prav tako sva opisala arbelosu podobni lik salinon in dokazala, da ima načrtan krog v salinonu enako ploščino kot salinon sam.

Pri izdelavi raziskovalne naloge sva uporabljala program Geogebra, s katerim sva načrtala slike v nalogi. Za dokazovanje sva morala uporabiti veliko znanja o izrazih s spremenljivkami. Sva pa pri raziskovanju že odprla nova vprašanja, na katera morda odgovoriva z naslednjo raziskovalno nalogo.

7. Viri

http://vedez.dzs.si/dslike/osebe_arhimed.jpg, 28. 1. 2016

http://presek.si/6/354-Bezek.pdf

Nataša Lemež, Arbelos, diplomsko delo, Univerza v Mariboru, 2009.

https://www.fsb.unizg.hr/geometrija.broda/100/110/gb114.htm, 28. 1. 2016

https://sl.wikipedia.org/wiki/Arhimed, 28. 1. 2016

https://en.wikipedia.org/wiki/Salinon, 23.1. 2016

https://sl.wikipedia.org/wiki/Arbelos, 8. 1. 2016