Mladi za napredek Maribora 2016

33. srečanje

DOTIK V TEMPLJU

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: KRISTINA VELJKOVIĆ

Mentor: POLONA DOVEČAR

Šola: OŠ TABOR I MARIBOR

Maribor, februar 2016

Mladi za napredek Maribora 2016

33. srečanje

DOTIK V TEMPLJU

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Maribor, februar 2016

KAZALO

Kazalo slik

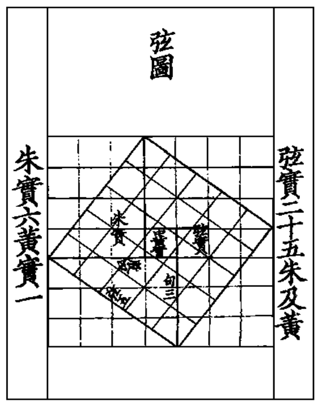
Kazalo tabel

POVZETEK

Ali si lahko zamislite matematika, ki je rešil nek geometrijski problem in ga nato zapisal na leseno ploščo, besedilo okrasil z geometrijsko sliko, jo nato odnesel v tempelj ter jo obesil na vidno mesto? V raziskovalni nalogi bom predstavila japonsko tempeljsko geometrijo - sangáku. Beseda sangáku je nastala kot tvorjenka iz besed SAN = račun, aritmetika in GAKU = znanost ali učenje. V dobesednem prevodu predstavlja matematično ploščo, izobešeno v templju. Zgodovinskemu pregledu nastanka in razvoja te geometrije bo sledil prikaz geometrijskega problema iz leta 1824. Z računalniškim orodjem GeoGebra in z različnimi matematičnimi metodami bom raziskovala zveze med polmeri krogov. Z raziskovalno nalogo želim predstaviti tradicionalno japonsko matematiko kot način drugačnega razmišljanja.

1 UVOD

Vrnimo se v preteklost. O japonski matematiki se je pred 7. stoletjem malo vedelo. V 7. stoletju so zraven budizma iz Kitajske v Japonsko prišli tudi prvi matematični zapisi o računanju, algebri in geometriji. Največji vpliv na japonsko matematiko tega časa je imelo eno od najstarejših in najbolj znanih kitajskih matematičnih besedil z naslovom CHOU PEI SUAN CHING (500–200 let pr. n. št.), v prevodu Aritmetični klasiki. Besedilo govori o 256 rešenih matematičnih problemih, znotraj zbirke pa se nahaja tudi geometrijski dokaz Pitagorovega izreka (slika 1). (Fukagawa, H. in Rodman, A., 2008)



Slika 1: Geometrijski dokaz Pitagorovega izreka (vir: Smoller, L., 2001)

Za nas bo pomembno obdobje Edo, ki je trajalo med leti 1603 in 1867. Gre za obdobje, ki se v zgodovini Japonske označuje za obdobje razvoja kulturnega in družbenega življenja. V tem času se uveljavlja gradnja gradov, mesto Edo pa postane eno izmed največjih mest na svetu, namenjeno nočnemu svetu zabave. Uveljavlja se tudi slikarstvo – motiv slike na les. (Kabić, M., 2014)

V času obdobja Edo se je na področju matematike pojavila tradicija Sangáku. Trajala je približno 250 let (1630–1867). Za matematiko je to pomenilo množično ustvarjanje geometrije. Na področju aritmetike pa se poleg osnovnih računskih operacij razvije računanje kvadratnih korenov. (Fukagawa, H. in Rodman, A., 2008)

Kljub neznanemu zahodnemu svetu, so Japonci v tem času razvijali svojo vrsto šol, kjer so poleg borilnih veščin in filozofije učili tudi branje, pisanje in računanje. Šole so ustanavljali samuraji in so jih poimenovali Juku. Iz Juku vleče svoje korenine tudi Sangáku, katerih avtorji so bili učitelji, kasneje pa njihovi učenci. (Fukagawa, H. in Rodman, A., 2008)

V 17. stoletju se je izoblikovala matematika, imenovana *WASAN*. Beseda wasan je nastala kot tvorjenka iz besed wa = japonski in san = račun, aritmetika. Dobesedni prevod govori o japonski aritmetiki. V tem času je Koyo Yoshido objavil knjigo z naslovom Jinkoki (Male in velike črke) in to delo je postalo sinonim za aritmetiko na celotnem območju Japonske. V knjigi so zapisani praktični primeri in vaje, ki so služile za učenje računanja na *sorobanu*, ki je japonska različica kitajskega abakusa. (Kabić, M., 2014)

Trije najpomembnejši japonski matematiki tega obdobja so bili Kamebei Mori, Koyu Yoshida in Seki Takakaze (slika 2). Slednji je bil na Japonskem kot Newton in Leibniz v Evropi. (Kabić, M., 2014)

Slika 2: Portret japonskega matematika Seki Takakazu

(vir: Fukagawa, H. in Rodman, A., 2008)

Japonci so svojo vero, budizem, častili v templjih. Kot znak daritev in hvaležnosti so bogovom izobešali lesene plošče, ki so bile likovno izoblikovane in poslikane. Šlo je za matematične plošče, imenovane Sangáku. Bogovom so se zahvaljevali za matematične dosežke in se jim priporočali za nadaljnje uspehe.

Beseda *sangáku* je nastala kot tvorjenka iz besed san = račun, aritmetika in gaku = znanost, učenje.

V dobesednem prevodu sangáku pomeni matematično ploščo (slika 3). Na teh ploščah so bili naslikani različni geometrijski liki, v različnih postavitvah. Zraven so bile zapisane matematične izjave in trditve. Opazovalec je moral sam dokazati zapisano. Dokazov na ploščah ni bilo. Plošče so predstavljale geometrijski izziv: "Poglej, ali lahko to dokažeš." Avtorji plošč so veliko pozornost namenjali vizualni percepciji in kompoziciji narisanih likov. (Kabić, M., 2014)

Slika 3: Sangáku plošča (vir: Hosking, R., 2012)

Danes je na Japonskem ohranjenih približno 820 sangákujev (slika 4). Nekateri so lažji, drugi težje rešljivi. Veliko jih je še nerešenih, saj so izredno nenavadni in značilni le za vzhodni svet. (Kabić, M., 2014)

Slika 4: Primer sangáku plošče (vir: Hosking, R., 2012)

Namen naloge je predstaviti sangáku problem iz leta 1824, ki je bil najden na območju prefekture Miyagi (slika 5).

Slika 5: Zemljevid Japonske (vir: https://www.city.shiogama.miyagi.jp/shiogama/index.html)

Metodologija, ki jo bom v nalogi uporabila, bo računalniški program GeoGebra, v katerem bom načrtala sangáku in raziskala ter utemeljila odnose med naravno-številskimi polmeri krogov. Odnose med polmeri bom utemeljila na 3 načine: s pomočjo računalniškega orodja GeoGebra, z matematično indukcijo in s Pitagorovim izrekom.

Uporabila bom tudi preučevanje pisnih virov.

2 GLAVNI DEL

2. 1 Sangáku: Tri krožnice s skupno tangento

Definirajmo pojme krožnica, polmer, krog in tangenta.

<u>Definicija 1</u>

Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od izbrane točke (središče krožnice).

<u>Definicija 2</u>

Polmer krožnice ***r*** je daljica, ki povezuje središče s točko na krožnici.

<u>Definicija 3</u>

Krog je del ravnine, omejen s krožnico. Vsebuje točke, ki so od središča krožnice oddaljene manj ali enako *r* enot.

<u>Definicija 4</u>

Tangenta ali **dotikalnica** je premica, ki ima s krožnico natanko eno skupno točko in je pravokotna na polmer krožnice v dotikališču.

<u>Sangáku primer</u>

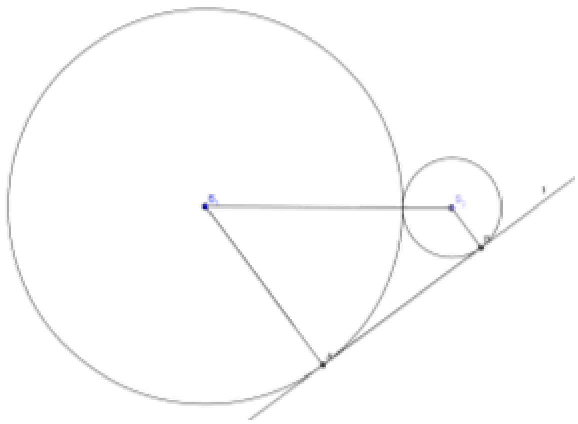
Na sliki sta dve dotikajoči se krožnici, s skupno tangento *t*. Polmera krožnic naj bosta popolna kvadrata naravnih števil. In sicer: $K_1(S_1, 36\ e), K_2(S_2, 9\ e)$.

Poiščimo krožnico, ki bo ležala na istem bregu kot preostali krožnici, se dotikala obeh krožnic in imela z njima skupno tangento *t*.

Zanima nas polmer iskane krožnice.

Postopek načrtovanja:

- Razmišljajmo v obratni smeri.
  Načrtani imamo krožnici $K_1(S_1, 36\ e)$ in $K_2(S_2, 9\ e)$, ki imata skupno tangento *t*, ki se krožnic dotika v točkah *A* in *B* (slika 6).
  Lik ABS_2S_1 je trapez s pravima kotoma v ogliščih *A* in *B*.

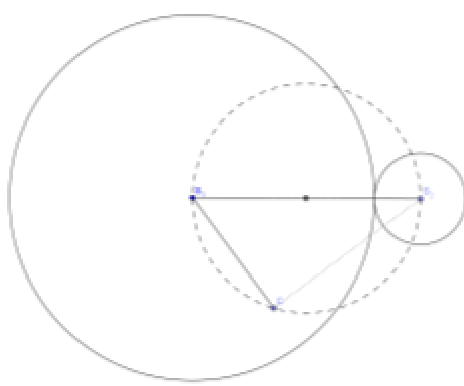


Slika 6: Krožnici $\boldsymbol{K_1}$ in $\boldsymbol{K_2}$ (lastni vir)

- Na daljici S_1S_2 določimo točko *C* s pomočjo Talesovega izreka (slika 7).
  Za kot v polkrogu velja Talesov izrek:

  <u>Definicija 5</u>

  Če vrh kota φ leži na polkrožnici, kraka pa potekata skozi krajišča premera, potem je φ pravi kot.



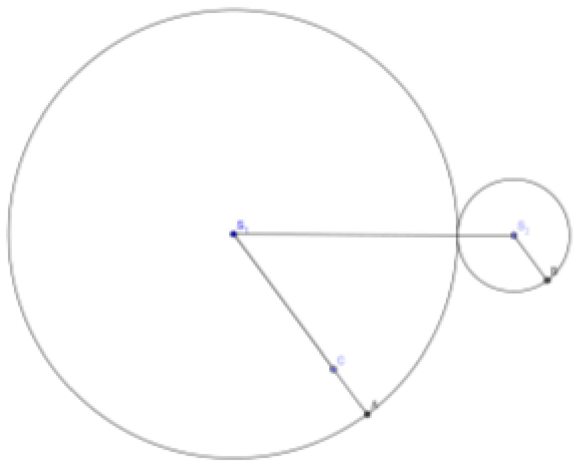
Slika 7: Točka *C* (lastni vir)

Presečišče daljice S_1S_2 (premer črtkane krožnice) je središče črtkane krožnice. S tem smo določili točko C, v kateri je po Talesovem izreku pravi kot in $\triangle CS_2S_1$ je pravokotni.

Vemo: $S_1S_2 = r_1 + r_2 = 45\ e$

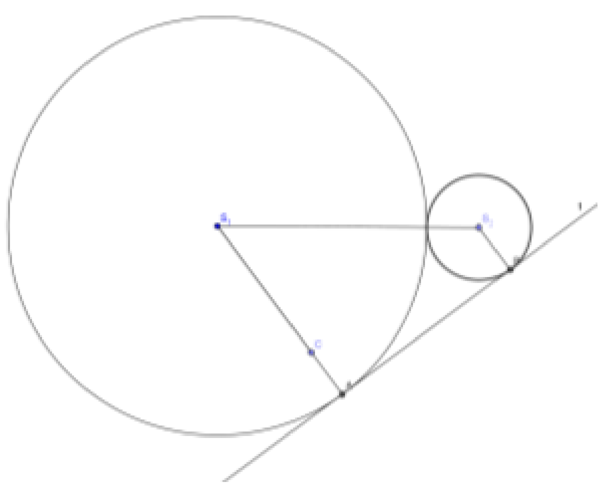
$S_1C = r_1 - r_2 = 27\ e$

- Skozi točki S_1 in C narišemo poltrak, ki seka krožnico K_1 v točki A. K daljici S_1A narišemo vzporednico skozi središče (slika 8) S_2. Dobimo daljico S_2B.



Slika 8: Vzporednici skozi središči krožnic (lastni vir)

- Skozi točki A in B narišemo premico t, ki je iskana tangenta (slika 9).



Slika 9: Tangenta t (lastni vir)

Sedaj moramo poiskati krožnico K_3, ki se bo dotikala preostalih dveh krožnic in imela z njima skupno tangento *t*.

Po sangáku primeru iz literature vemo, da za polmere med krožnicami velja naslednja zveza:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}.$$

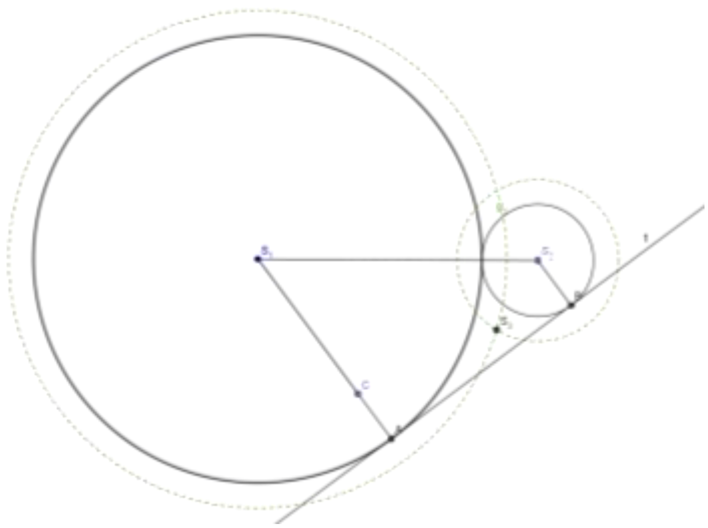
(Bogomolny, A., 1996)

Ker smo za polmere krožnic K_1 in K_2 izbrali popolne kvadrate naravnih števil 36 in 9, pomeni, da mora biti polmer iskane krožnice 4, da bo veljala zgornja zveza.

Poiščimo središče S_3.

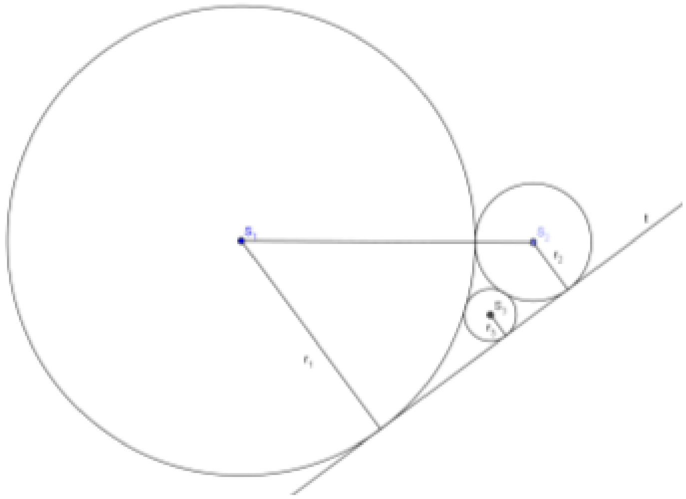
- Ker vemo, da je polmer iskane krožnice 4 e, narišemo pomožni krožnici s središčema v S_1 in S_2 in sicer:
  $K_{1_1}(S_1, 40\ e)$, $K_{2_2}(S_2, 13\ e)$.

  Presečišče krožnic K_{1_1} in K_{2_2} določa središče (slika 10) S_3.



Slika 10: Središče $\boldsymbol{S_3}$ (lastni vir)

Iz središča S_3 odmerimo polmer, ki je pravokotna razdalja med tangento *t* in točko S_3 ter narišemo krožnico (slika 11).



Slika 4: Krožnica $\boldsymbol{K_3(S_3, 4\,e)}$ (lastni vir)

Po predpostavljeni zvezi torej res velja:

$$\frac{1}{\sqrt{36}} + \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}}.$$

S pomočjo računalniškega orodja GeoGebra smo poiskali trojico naravnih števil (4, 9, 36), ki so polmeri krožnic, njihovi kvadratni koreni so trojica (2, 3, 6). Ugotovimo tudi, da je produkt prvih števil trojice tretje število: $2 \cdot 3 = 6$ in $4 \cdot 9 = 36$.

Torej za polmere velja: $r_3 \cdot r_2 = r_1$.

V nadaljevanju si bomo pogledali, ali obstajajo še kakšne trojice naravnih števil in njihovih popolnih kvadratov, ki zadoščajo zgornji zvezi med naravno-številskimi polmeri krožnic.

.

2. 2 Trojice naravnih števil in trojice popolnih kvadratov

Določimo trojice števil (r_3, r_2, r_1), kjer je *r* polmer krožnic.

Vzemimo trojico (1, 2, 2). Potem sledi, da imamo krožnice s polmeri, ki so popolni kvadrati izbranih naravnih števil: $r_1 = 4\ e, r_2 = 4\ e, r_3 = 1\ e \implies (r_3, r_2, r_1) = (1^2, 2^2, 2^2)$.

Poglejmo, ali trojica (1, 4, 4) zadošča prej omenjeni zvezi med polmeri:

$$\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$$

Zveza torej drži.

Sedaj vzemimo naslednjo trojico (2, 3, 6). Že v 2. 1 smo dokazali, da zveza velja za trojico popolnih kvadratov (4, 9, 36).

Nadaljujmo s trojico (3, 4, 12). Potem imamo polmere $r_1 = 144\ e, r_2 = 16\ e, r_3 = 9\ e$.

$$\frac{1}{\sqrt{144}} + \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{9}}$$

Vidimo še, da se trojice, ki zadoščajo zvezi med polmeri, nadaljujejo po vzorcu, in sicer:

Tabela 1: Vzorec trojic naravnih števil in njihovih popolnih kvadratov

$n \in \mathbb{N}$	Trojica naravnih števil	Produkt števil	Trojica popolnih kvadratov (r_3, r_2, r_1)	Produkt popolnih kvadratov $r_3 \cdot r_2 = r_1$
$n = 1$	$(1, 2, 2)$	$1 \cdot 2 = 2$	$(1, 4, 4)$	$1 \cdot 4 = 4$
$n = 2$	$(2, 3, 6)$	$2 \cdot 3 = 6$	$(4, 9, 36)$	$4 \cdot 9 = 36$
$n = 3$	$(3, 4, 12)$	$3 \cdot 4 = 12$	$(9, 16, 144)$	$9 \cdot 16 = 144$
$n = 4$	$(4, 5, 20)$	$4 \cdot 5 = 20$	$(16, 25, 400)$	$16 \cdot 25 = 400$
$n = 5$	$(5, 6, 30)$	$5 \cdot 6 = 30$	$(25, 36, 900)$	$25 \cdot 36 = 900$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$poljuben\ n$	$(n, n+1, n^2+n)$	$n \cdot (n+1) = n^2 + n$	$(n^2, (n+1)^2, (n^2+n)^2)$	$n^2 \cdot (n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2$

Iz tabele 1 je razvidno, da velja: $r_3 \cdot r_2 = r_1$.

Ugotovitev dokažimo z matematično indukcijo:

1) Za $n = 1$:

Tabela 2: Prvi indukcijski korak

	Trojica naravnih števil	Produkt števil	Trojica popolnih kvadratov	Produkt popolnih kvadratov
	$(n, n+1, n^2+n)$	$n \cdot (n+1)$ $= n^2 + n$	$(n^2, (n+1)^2, (n^2+n)^2)$	$n^2 \cdot (n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2$
$n = 1$	$(1, 1+1, 1^2+1)$ $= (1, 2, 2)$	$1 \cdot (1+1) =$ $= 1^2 + 1 = 2$	$(1^2, (1+1)^2, (1^2+1)^2)$ $= (1, 4, 4)$	$1^2 \cdot (1+1)^2 = 4$

Prvi korak indukcije drži.

2) Če trditev velja za naravno število n $(n \in \mathbb{N})$, potem velja tudi za njegovega naslednika $n + 1$:

V trojice vstavimo $n + 1$.

Tabela 3: Drugi indukcijski korak – trojica naravnih števil

Trojica naravnih števil	Produkt števil
$(n+1, n+2, (n+1)^2 + (n+1))$	$(n+1)(n+2) = (n+1)^2 + (n+1)$ Rešujemo enačbo. Leva stran: $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$ Desna stran: $(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 =$ $= n^2 + 3n + 2$ L = D

Tabela 4: Drugi indukcijski korak – trojica popolnih kvadratov

Trojica popolnih kvadratov (r_3, r_2, r_1)	Produkt popolnih kvadratov $r_3 \cdot r_2 = r_1$
$((n+1)^2, (n+2)^2, ((n+1)^2 + (n+1))^2$	$(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 = (n+1)^4 + 2(n+1)^3 + (n+1)^2$ Leva stran: $(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 =$ $= n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4$ Desna stran: $(n+1)^4 + 2(n+1)^3 + (n+1)^2 =$ $= (n+1)^2(n+1)^2 + (2n+2)(n+1)^2 + (n+1)^2 =$ $= n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4$ L = D

Dokazali smo, da trditev $r_3 \cdot r_2 = r_1$ velja, če je *r* popolni kvadrat naravnega števila.

2. 3 Dokaz s Pitagorovim izrekom

Japonska tempeljska geometrija in dokazi imajo ozadje tudi v Pitagorovem izreku. Znotraj krožnic in polmerov se skrivajo pravokotni trikotniki.

Vzemimo naš primer in zvezo $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$ dokažimo z Pitagorovim izrekom (slika 12).

Naj bo:

$S_1S_2 = r_1 + r_2$

$S_1S_3 = r_1 + r_3$

$S_2S_3 = r_2 + r_3$

$AM = US_3 = x \quad in$

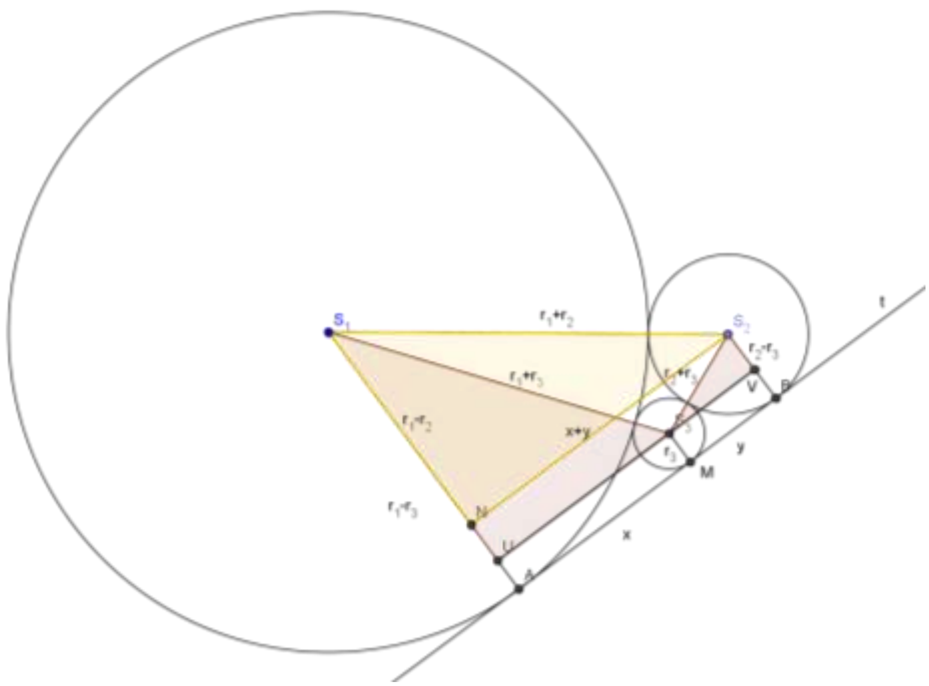
$MB = S_3V = y$

$S_1N = r_1 - r_2$

$S_1U = r_1 - r_3$

$S_2V = r_2 - r_3$

$NS_2 = x + y$



Slika 5: Dokaz s Pitagorovim izrekom (lastni vir)

Na sliki so trije pravokotni trikotniki. Za vsak trikotnik zapišemo Pitagorov izrek:

$\triangle\, US_3S_1: \quad x^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$

$\triangle\, S_3VS_2: \quad y^2 + (r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$

$\triangle\, NS_2S_1: \quad (x + y)^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$

x in *y* sta neznani količini in ju izrazimo s polmeri:

$x^2 = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2$

$x^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_3^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_3^2$

$x^2 = 4r_1r_3$

$y^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2$

$y^2 = r_2^2 + 2r_2r_3 + r_3^2 - r_2^2 + 2r_2r_3 - r_3^2$

$y^2 = 4r_2r_3$

$(x + y)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$

$(x + y)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2$

$(x + y)^2 = 4r_1r_2$

Enačbe korenimo:

$x^2 = 4r_1r_3 /\sqrt{\ }$	$y^2 = 4r_2r_3 /\sqrt{\ }$	$(x + y)^2 = 4r_1r_2 /\sqrt{\ }$
$x = 2\sqrt{r_1r_3}$	$y = 2\sqrt{r_2r_3}$	$x + y = 2\sqrt{r_1r_2}$

$$x + y = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3}$$

$\Rightarrow\ 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3} = 2\sqrt{r_1r_2} /: 2$

$\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3} = \sqrt{r_1r_2} /: \sqrt{r_1r_2r_3}$ upoštevamo pravilo: $\sqrt{r_1r_2r_3} = \sqrt{r_1} \cdot \sqrt{r_2} \cdot \sqrt{r_3}$

$$\frac{\cancel{\sqrt{r_1}} \cdot \cancel{\sqrt{r_3}}}{\cancel{\sqrt{r_1}} \cdot \sqrt{r_2} \cdot \cancel{\sqrt{r_3}}} + \frac{\cancel{\sqrt{r_2}} \cdot \cancel{\sqrt{r_3}}}{\sqrt{r_1} \cdot \cancel{\sqrt{r_2}} \cdot \cancel{\sqrt{r_3}}} = \frac{\cancel{\sqrt{r_1}} \cdot \cancel{\sqrt{r_2}}}{\cancel{\sqrt{r_1}} \cdot \cancel{\sqrt{r_2}} \cdot \sqrt{r_3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

oziroma, ker velja zakon o zamenjavi seštevancev:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

3 ZAKLJUČEK

Zveza med naravno-številskimi polmeri krožnic

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

je v nalogi utemeljena na 3 načine.

1. *Z računalniškim orodjem GeoGebra*

S študijem literature smo določili polmera večjih krožnic $(r_1 = 36\ e, r_2 = 9\ e)$, ki se med seboj dotikata in imata skupno tangento. Z izpisovanjem dolžin načrtanih gradnikov (polmerov, krožnic, daljic) smo utemeljili predpostavko, ki velja za naravo-številske polmere.

2. *S poljubno izbiro naravnega števila*

Z izbiro naravnega števila smo določili trojice števil, katerih popolni kvadrati so polmeri krožnic. Ugotovili smo, da je produkt prvega in drugega števila trojice (r_3, r_2, r_1) tretje število:
$r_3 \cdot r_2 = r_1$.
Domnevo smo dokazali z uporabo matematične indukcije, kjer smo utemeljili, da zveza med polmeri velja za vsako naravno število.

3. *S Pitagorovim izrekom*

Orodje za obravnavo japonske tempeljske geometrije je velikokrat Pitagorov izrek. Med gradniki sangákujev, ki so daljice in krožnice, se skriva pravokotni trikotnik.
Obravnavan primer sodi med ravninske primere, kjer je osnovni gradnik krožnica s tangento. Vsote in razlike polmerov krožnic določajo dolžine stranic pravokotnih trikotnikov.
Tako smo s Pitagorovim izrekom utemeljili zvezo med naravno-številskimi polmeri krožnic.

4 DRUŽBENA ODGOVORNOST

S svojo raziskovalno nalogo sem želela spodbuditi zanimanje mladih za matematiko. Pomembno se mi zdi zavedanje preteklosti in zanimanje za nam manj znane kulture, kot je japonska in posledično njihovem drugačnem miselnem razvoju in razmišljanju. Drugačen način razmišljanja je to, zaradi česar je vsak posameznik edinstven. Posledica različnega razmišljanja so tudi različne odločitve, ki nas še bolj opredeljujejo. Zato se mi kot pomemben člen raziskovalne naloge zdi spodbujanje nam manj znane »vzhodne« matematike oziroma načina razmišljanja, ki nam ni prav blizu. Mislim, da bi z drugačnim postopkom reševanja matematičnih problemov lahko vsak posameznik razvijal več sposobnosti. Iz raziskovalne naloge bi lahko začutili potrebo po likovnem ustvarjanju in večjemu nagnjenju k umetnosti.

Iz tega sem zaključila, da bi sangáku probleme lahko umestili v vsak del življenja.

LITERATURA

BOGOMOLNY, A., (1996). *Cut the Knot.* [Citirano 12. 12. 2015; 10.40]. Dostopno na spletnem naslovu: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/TangentCirclesSangaku.shtml#solution

FUKAGAWA, H. in RODMAN, A. (2008). *Sacred mathematics: Japanese temple geometry.* Princeton, Oxford: Princeton University Press.

HOSKING, R. (2012). Sangaku – Japanese Temple Mathematics. **[**Citirano 16. 1. 2016; 17.20**]**. Dostopno na spletnem naslovu: http://www.math.canterbury.ac.nz/~r.sainudiin/primernotes/20120720_JapaneseTempleMaths_RosalieHosking.pdf

KABIĆ, M. (2014). *Sangaku problemi, geometrijski problemi u japnskim hramovima – 1. dio.* [Citirano 19. 11. 2015; 17.00.] Dostopno na spletnem naslovu: http://mis.element.hr/fajli/1132/64-04.pdf

KABIĆ, M. (2014). *Sangaku problemi, geometrijski problemi u japanskim hramovima - 2. dio.* [Citirano 19. 11. 2015; 17.00]. Dostopno na spletnem naslovu: http://mis.element.hr/fajli/1145/65-03.pdf

SHIOGAMA CITY (b. d.) [Citirano 13. 1. 2016; 18.30]. Dostopno na spletnem naslovu: https://www.city.shiogama.miyagi.jp/shiogama/index.html

SMOLLER, L. (2001). *Applications: Web-Based precalculus, Did you know?.* [Citirano 16. 1. 2016; 15.00]. Dostopno na spletnem naslovu: http://ualr.edu/lasmoller/pythag.html