MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2013
30. SREČANJE

VSOTA ZAPOREDNIH NARAVNIH ŠTEVIL

Matematika
Raziskovalna naloga

Avtor: MIHA SMAKA, JAKOB VERLIĻ

Mentor: JOĢE SENEKOVIĻ

Ġola: OĠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2013

Kazalo vsebine

1. Povzetek

V okviru izbirnega predmeta Matematične delavnice, sva naletela na problem ali obstajajo zaporedna naravna števila, katerih vsota je število 171. Precej hitro sva problem rešila, seveda pa sva zapisala samo dve oziroma tri zaporedna naravna števila. Šele v nadaljevanju dela nama je postalo jasno, da to nista nujno edini rešitvi. Zanimalo naju je, koliko različnih možnosti za zapis vsote števila 171 je. Prav tako naju je zanimalo ali obstaja kakšno pravilo, po katerem brez poskušanja lahko ugotovimo, koliko možnosti zapisov je in katere možnosti so. Skozi veliko primerov in z znanjem matematike sva pravila tudi našla.

2. Uvod

Naravna števila ($\mathbb{N}$) so vsa pozitivna števila iz neskončne množice celih števil ($\mathbb{Z}$). Če k naravnim številom pridružimo še število 0, zapišemo množico ($\mathbb{N}_0$). Večkratnik nekega števila npr. *x*, je število, ki ga dobimo tako, da pomnožimo število *x* s katerimkoli naravnim številom. Delitelj števila *x* je število, ki deli število *x* brez ostanka. Praštevila so naravna števila, ki imajo samo dva delitelja, sebe in število 1. Število 1 ni praštevilo. Vsako naravno število ima vsaj enega praštevilskega delitelja. Tako ima število 12 šest deliteljev $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$, praštevilska delitelja sta števili 2 in 3. Vsako naravno število lahko zapišemo kot produkt praštevil ali njihovih potenc. Vidimo da ima število 12 dva praštevilska delitelja, zato lahko 12 zapišemo kot produkt več praštevil, $12 = 2^2 \cdot 3$. Ker produkte pri množenju imenujemo faktorji, postopek imenujemo razcep na prafaktorje. Prafaktorje najlažje določimo, če izbrano število delimo z najmanjšim praštevilom, ki izbrano število deli brez ostanka in nato postopek nadaljujemo. Zadnji izračunani količnik je število 1. Vzemimo za primer število 171. Najmanjše možno praštevilo, ki deli število 171 je število 3. Količnik števila 171 in števila 3 je število 57. Najmanjši praštevilski delitelj števil 57 je 3, s katerim delimo število 57 in dobimo število 19. Nato ostane samo še 19, ki je deljivo samo s sabo in dobimo 1, kjer se razcep konča (Slika 1).

Za število 171 zapišimo vse njegove delitelje s pomočjo praštevil. Razvrstimo jih po velikosti od najmanjšega do največjega. Prvi je seveda 1, nato 3, zatem 9 (3×3), 19, 57 (3×19) in seveda 171, $D_{171} = \{1,3,9,19,57,171\}$.

171	3
57	3
19	19
1	1

Slika 1

3. Ali obstajajo dve, tri, štiri... zaporedna števila.

Ko sva pri izbirnem predmetu dobila ta problem, sva se odločila, da ga bova reševala s pomočjo enačb tipa prvih nekaj naravnih zaporednih števil npr. $x + x + 1 + x + 2 + x + 3$ ...= y (*y* v tem primeru predstavlja izbrano število. Izbrano število v problemu je bilo 171.

Reševala sva enačbe z dvema, tremi, štirimi ali več zaporednimi števili.

a) Dve zaporedni števili

$$x + x + 1 = 171$$

$$2x = 170$$

$$x = 85$$

Rešitev enačbe sta zaporedni števili 85 in 86.

b) Tri zaporedna števila

$$x + x + 1 + x + 2 = 171$$

$$3x = 168$$

$$x = 56$$

Rešitev enačbe so zaporedna števila 56, 57, 58.

c) Štiri zaporedna števila

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 171$$

$$4x = 165$$

$$x = 41{,}25$$

41,25 ni naravno število, zato ne obstajajo štiri zaporedna naravna števila z vsoto 171.

Ob reševanju enačb in zapisih (2*x* + 1, 3*x* + 3, 4*x* + 6 …) sva opazila, da lahko napoveva naslednjo enačbo. Torej velja neko pravilo za zapis enačb. Zapisane so vse enačbe (Slika 2), za vsoto dveh, treh…devetih zaporednih naravnih števil.

$$2n + 1 = 171$$

$$3n + 3 = 171$$

$$4n + 6 = 171$$

$$5n + 10 = 171$$

$$6n + 15 = 171$$

$$7n + 21 = 171$$

$$8n + 28 = 171$$

$$9n + 36 = 171$$

Slika 2

Opazila sva da se na levi strani enačb kot členi pojavljajo trikotniška števila (1, 3, 6 …), ki jih lahko zapišemo $\frac{n(n-1)}{2}$. Koeficient neznanke n je število neznank (*x*), oziroma število zaporednih naravnih števil. Po premisleku pravila sva zapisala enačbo

$$nx + \frac{n(n-1)}{2} = 171.$$

Spremenljivka *x* je v tem primeru prvo izmed zaporednih števil, ki jih iščemo, *n* pa je število zaporednih števil. Število 171 je seveda vsota zaporednih števil, ki jih iščemo. Pravilo zapišimo še tako: $xn + \frac{x(x-1)}{2} = 171.$

V tem primeru je *n* neznanka, prvo število zaporedja, ki ga iščemo. Število *x* je število zaporednih števil in 171 število, za katerega iščemo vsoto zaporednih števil. Kaj se zgodi, če izrazimo *n*, število, ki ga iščemo? Uporabila sva znanje reševanja enačb, ki sva ga pridobila v tem šolskem letu. Poglejmo postopek.

$$xn + \frac{x(x-1)}{2} = 171 \quad / : x$$

$$n + \frac{x-1}{2} = \frac{171}{x}$$

$$n = \frac{171}{x} - \frac{x-1}{2}$$

Število *n* (prvo izmed števil v zaporedju vsote naravnih števil) je razlika dveh členov.

Člen $\frac{171}{x} \in \mathbb{N}$, zato mora biti *x* delitelj izbranega števila ali mora biti naravno število razlika obeh členov.

Z razcepom na prafaktorje zapišemo delitelje števila 171, $D_{171} = \{1, 3, 9, 19, 57, 171\}$. Tako je $x \in \{1, 3, 9, 19, 57, 171\}$. Vsak delitelj sva vstavila v enačbo, enačbo rešila ter tako zapisala iskana zaporedja naravnih števil.

a) $x = 1$

$$n = \frac{171}{1} - \frac{1-1}{2}$$

$$n = 171$$

Gre za eno zaporedno število. To je število samo, 171 .

b) $x = 3$

$$n = \frac{171}{3} - \frac{3-1}{2}$$

$$n = 57 - 1 = 56$$

Pri treh zaporednih številih je prvo torej 56. Iskana vsota števil je 56 + 57 + 58 = 171.

c) $x = 9$

$$n = \frac{171}{9} - \frac{9-1}{2}$$

$$n = 19 - 4 = 15$$

Pri devetih zaporednih številih je prvo torej 15. Iskana vsota števil je

15 + 16 + 17 + … + 23 = 171.

d) $x = 19$

$$n = \frac{171}{19} - \frac{19-1}{2}$$

$$n = 9 - 9 = 0$$

Pri devetnajstih zaporednih naravnih številih je prvo torej 0 (ki ni naravno). Iskana vsota števil je

0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 171.

e) $x = 57$

$$n = \frac{171}{57} - \frac{57-1}{2}$$

$$n = 3 - 28 = -25$$

Ko dobimo negativno rešitev enačbe, trditev da je *x* število zaporednih naravnih števil ne velja več. Pri tem pa je 57 celih števil od – 25 do + 31. Izkaže se, da je vsota vseh sedeminpetdesetih celih števil prav tako 171. Med vsemi celimi števili je vsota od – 25 do + 25 enaka 0. Tako k vsoti prispevajo le naravna števila 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 = 171.

f) $x = 171$

$$n = \frac{171}{171} - \frac{171-1}{2}$$

$$n = 1 - 85 = -84$$

Rešitev enačbe je število – 84. Pri tem pa je 171 celih števil od – 84 do + 86. Izkaže se, da je vsota vseh sto enainsedemdesetih celih števil prav tako 171. Med vsemi celimi števili je vsota od – 84 do + 84 enaka 0. Tako k vsoti prispevata le naravni števili 85 + 86 = 171.

4.1. Primeri in pravilo za liha števila

Število 171 je liho število. Poglejmo ali ustreznost pravila velja npr. za lihi števili 21 in 231.

Primer 1

Delitelje števila 21 sva dobila z razcepom na prafaktorje $D_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$. Nato sva delitelje vstavila v enačbo.

a) $x = 1$

$$n = \frac{21}{1} - \frac{1-1}{2}$$

$$n = 21$$

Gre za eno zaporedno naravno število, to je število 21.

b) $x = 3$

$$n = \frac{21}{3} - \frac{3-1}{2}$$

$$n = 6$$

Pri treh zaporednih številih je prvo število 6. Vsota števil je tako 6 + 7 + 8 = 21.

c) $x = 7$

$$n = \frac{21}{7} - \frac{7-1}{2}$$

$$n = 0$$

Pri sedmih zaporednih številih je prvo število 0, ki sicer ni naravno število. Je pa vsota števil 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.

d) $x = 21$

$$n = \frac{21}{21} - \frac{21-1}{2}$$

$$n = -9$$

Rešitev enačbe je število – 9. Pri tem pa je 21 celih števil od – 9 do + 11. Izkaže se, da je vsota vseh enaindvajsetih celih števil prav tako 21. Med vsemi celimi števili je vsota od – 9 do + 9 enaka 0. Tako k vsoti prispevata le naravni števili 10 + 11 = 21.

Primer 2

Izbrala sva število 231. Delitelje števila 231 sva določila z razcepom na prafaktorje $D_{231} = \{1, 3,7,11,21,33,77,231\}$. Delitelje sva vstavila v enačbo in zapisala vsoto zaporednih naravnih števil.

a) *x* = 1

$$n = \frac{231}{1} - \frac{1-1}{2}$$

$$n = 231$$

Pri enem zaporednem številu smo dobili kar število 231.

b) *x* = 3

$$n = \frac{231}{3} - \frac{3-1}{2}$$

$$n = 76$$

Pri treh zaporednih številih je prvo število 76 . Vsota treh števil je 76 + 77 + 78 = 231.

c) *x* = 7

$$n = \frac{231}{7} - \frac{7-1}{2}$$

$$n = 30$$

Pri sedmih zaporednih številih je prvo število 30. Vsota zaporednih števil je

30 + 31 + 32 + … + 36 = 231.

d) *x* = 11

$$n = \frac{231}{11} - \frac{11-1}{2}$$

$$n = 16$$

Tukaj je prvo zaporedno število 16. Zapišemo vsoto enajstih števil

16 + 17 + 18 + … + 26 = 231.

e) $x = 21$

$$n = \frac{231}{21} - \frac{21-1}{2}$$

$$n = 1$$

Pri enaindvajsetih zaporednih številih je prvo število 1. Zapišemo vsoto števil

1 + 2 + 3 + 4 + … + 21 = 231.

f) $x = 33$

$$n = \frac{231}{33} - \frac{33-1}{2}$$

$$n = -8$$

Rešitev enačbe je število – 8. Pri tem pa je 33 celih števil od – 8 do + 24. Izkaže se, da je vsota vseh triintridesetih celih števil prav tako 231. Med vsemi celimi števili je vsota od – 8 do + 8 enaka 0. Tako k vsoti prispevajo le naravna števila 9 + 10 + 11 + … + 24 = 231.

g) $x = 77$

$$n = \frac{231}{77} - \frac{77-1}{2}$$

$$n = -35$$

Rešitev enačbe je število – 35. Pri tem pa je 77 celih števil od – 35 do + 41. Izkaže se, da je vsota vseh sedeminsedemdesetih celih števil prav tako 231. Med vsemi celimi števili je vsota od – 35 do + 35 enaka 0. Tako k vsoti prispevajo le naravna števila 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 = 231.

h) $x = 231$

$$n = \frac{231}{231} - \frac{231-1}{2}$$

$$n = -114$$

Rešitev enačbe je število – 114. Pri tem pa je 231 celih števil od – 114 do + 116. Izkaže se, da je vsota vseh dvesto enaintridesetih celih števil prav tako 231. Med vsemi celimi števili je vsota od – 114 do + 114 enaka 0. Tako k vsoti prispevata le naravni števili 115 + 116 = 231.

Ugotovitve: Za poljubno liho naravno število *y* določimo vsoto zaporednih naravnih števil s pomočjo enačbe

$$n = \frac{y}{x} - \frac{x-1}{2}$$

Število *x* je delitelj poljubnega lihega naravnega števila *y*. Število *n* je prvo naravno število v zaporedju.

Število *x* je hkrati tudi število členov vsote.

Če je rešitev enačbe $\boldsymbol{n \leq 0}$, je v vsoti zaporednih naravnih števil natanko $\boldsymbol{y - (2|n| + 1)}$ števil.

4. Primeri in pravila za soda števila

V nadaljevanju naju je zanimalo ali pravilo velja tudi za soda naravna števila. Za primer sva izbrala število 170. Delitelje sva določila z razcepom na prafaktorje. $D_{170} = \{1,2,5,10,17,34,85,170\}$. Nato sva ponovno vstavila delitelje v enačbo.

$$\begin{array}{r|l} 170 & 2 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

a) $x = 1$

$$n = \frac{170}{1} - \frac{0-1}{2}$$

$$n = 170 - 0 = 170$$

Pri enem zaporednem številu je prvo številu 170 , kar je število samo.

b) x = 2

$$n = \frac{170}{2} - \frac{2-1}{2}$$

$$n = 85 - \tfrac{1}{2} = 83\tfrac{1}{2}$$

Pri dveh zaporednih številih je prvo število v zaporedju vsote število 83 ½ . To število ni naravno število čeprav je 2 delitelj števila 170. Kar pomeni, da ni dveh zaporednih naravnih števil, katerih vsota je število 170.

Težavo sva hitro pojasnila. Dve zaporedni naravni števili sta vedno liho in sodo število. Vsota lihega in sodega števila je vedno liho število. Tako nobeno sodo število ne moremo zapisati z vsoto dveh zaporednih naravnih števil.

c) *x* = 5

$$n = \frac{170}{5} - \frac{5-1}{2}$$

$$n = 34 - 2 = 32$$

Pri petih zaporednih številih je prvo število 32. Zapišemo vsoto petih števil 32 + 33 + 34 + 35 + 36 = 170.

d) *x* = 10

$$n = \frac{170}{10} - \frac{10-1}{2}$$

$$n = 17 - 4\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$$

Pri desetih zaporednih številih je prvo število 12 ½, ki spet ni naravno število čeprav je 10 delitelj števila 170.

Podobno kot v primeru x = 2 lahko trdimo, da ni desetih zaporednih naravnih števil z vsoto 170.

Tukaj sva opazila vzorec. Če je delitelj liho število, lahko izbrano število zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil. Poglejmo za primer

x = 34

$$n = \frac{170}{34} - \frac{34-1}{2}$$

$$n = 5 - 16\frac{1}{2} = -11\frac{1}{2}$$

Števila 170 ne moremo zapisati z vsoto zaporednih naravnih števil.

Za lihi delitelj *x* = 17 pa zapišemo

$$n = \frac{170}{17} - \frac{17-1}{2}$$

$$n = 10 - 6 = 4$$

Število 170 lahko zapišemo z vsoto zaporednih naravnih števil. Ta vsota je

4 + 5 + 6 + … + 20 = 170.

Odločila sva se, da ugotovljeno lastnost preveriva še za števili 6 in 20.

Primer 1

Delitelje števila 6 določimo z razcepom na prafaktorje $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$.

a) *x* = 1

$$n = \frac{6}{1} - \frac{1-1}{2}$$

$$n = 6$$

> Pri enem zaporednem številu smo kot prvo število dobili 6, kar je število samo.

b) *x* = 2

$$n = \frac{6}{2} - \frac{2-1}{2}$$

$$n = 2{,}5$$

> Rešitev enačbe 2,5 pomeni, da ni dveh zaporednih naravnih števil z vsoto 6.

c) $x = 3$

$$n = \frac{6}{3} - \frac{3-1}{2}$$

$$n = 1$$

Za tri zaporedna naravna števila je prvo število v vsoti število 1. Vsota treh števil je 1 + 2 +3 = 6.

Ker je 3 liho število, lastnost drži.

d) $x = 6$

$$n = \frac{6}{6} - \frac{6-1}{2}$$

$$n = -1{,}5$$

Pri šestih zaporednih naravnih številih je rešitev negativno racionalno število. Kar pomeni, da število 6 ne moremo zapisati z vsoto šestih celih števil.

Število 6 je sodo število in predpostavka, da za sodi delitelj ne dobimo rešitve, drži.

Primer 2

Zapišimo delitelje števil 20, $D_{20} = \{1, 2, 4, 5,\ 10, 20\}$.

Po predpostavki lahko zapišemo število 20 z vsoto zaporednih naravnih števil na dva načina (delitelja 1 in 5). Poglejmo.

a) x = 1

$$n = \frac{20}{1} - \frac{1-1}{2}$$

$$n = 20$$

Pri enem zaporednem številu je iskano število samo, to je število 20.

b) $x = 2$

$$n = \frac{20}{2} - \frac{2-1}{2}$$

$$n = 9{,}5$$

Pri dveh zaporednih številih je prvo število 9,5. Ker to ni naravno število, števila 20 ne moremo zapisati z vsoto dveh zaporednih naravnih števil.

c) $x = 4$

$$n = \frac{20}{4} - \frac{4-1}{2}$$

$$n = 3{,}5$$

Pri štirih zaporednih številih je prvo število 3,5. Ker to ni naravno število, števila 20 ne moremo zapisati z vsoto štirih zaporednih naravnih števil.

d) $x = 5$

$$n = \frac{20}{5} - \frac{5-1}{2}$$

$$n = 2$$

Pri petih zaporednih naravnih številih smo kot prvo število dobili število 2. Število 20 lahko zapišemo z vsoto 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20.

e) $x = 10$

$$n = \frac{20}{10} - \frac{10-1}{2}$$

$$n = -2{,}5$$

Pri desetih zaporednih številih je prvo število - 3,5. Ker to ni naravno število, števila 20 ne moremo zapisati z vsoto desetih zaporednih celih števil.

f) *x* = 20

$$n = \frac{20}{20} - \frac{20-1}{2}$$

$$n = -8{,}5$$

Pri dvajsetih zaporednih številih je prvo število - 8,5. Ker to ni naravno število, števila 20 ne moremo zapisati z vsoto dvajsetih zaporednih celih števil.

Ugotovitve: Za poljubno sodo naravno število *y* določimo vsoto zaporednih naravnih števil s pomočjo enačbe

$$n = \frac{y}{x} - \frac{x-1}{2}$$

Število *x* je lihi delitelj poljubnega sodega naravnega števila *y*. Število *n* je prvo naravno število v zaporedju.

Število *x* je hkrati tudi število členov vsote.

Če je rešitev enačbe $\boldsymbol{n \leq 0}$, je v vsoti zaporednih naravnih števil natanko $\boldsymbol{y - (2|n| + 1)}$ števil.

5. Povzetek

V raziskovalni nalogi sva odkrila zanimivo lastnost naravnih števil. Vsako naravno število, razen števil 1, 2 in 4 lahko zapišemo z vsoto vsaj dveh zaporednih naravnih števil. Uspelo nama je ugotoviti in zapisati pravilo, s katerim izračunamo prvo število v zaporedju vsote naravnih števil, $n = \frac{y}{x} - \frac{x-1}{2}$.

S spremenljivko *y* je označeno poljubno naravno število, s spremenljivko *x* označimo delitelj števila *y*. Število x pomeni tudi število členov vsote naravnih števil. S spremenljivko *n* označimo prvo izmed števil v vsoti.

Vrednost spremenljivke x je lahko samo liho število.

Če je rešitev enačbe $n \leq 0$, je v vsoti zaporednih naravnih števil natanko $y - (2|n| + 1)$ števil.

Pri zapisovanju možnosti moramo najprej zapisati vse delitelje izbranega števila. Pomagamo si z razcepom števila na prafaktorje.

7. Viri

Jože Žabkar, Matematika za VIII. razred osnovne šole; Mladinska knjiga 1962

Cvetka Frešer, M. Gazvoda, J. Senekovič; Matematika za radovedneže 6, Kamnik, ICO 2012