»Mladi za napredek Maribora 2013«
30. srečanje

PADEC Z ZEMLJE

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Avtor: VID VEDLIN

Mentor: POLONA DOVEĻ AR

Ġola: OĠ TABOR I MARIBOR

Maribor, februar 2013

»Mladi za napredek Maribora 2013«
30. srečanje

PADEC Z ZEMLJE

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Maribor, februar 2013

KAZALO

Kazalo slik

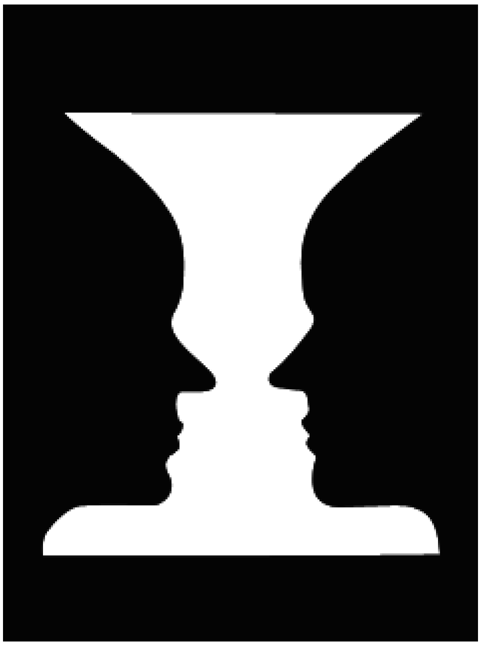
Kazalo tabel

POVZETEK

V raziskovalni nalogi bom predstavil in opisal uganko ameriškega ugankarja in inženirja Sama Loyda. Imenuje se Loydova uganka o izstopu z Zemlje. Govori o trinajstih kitajskih vojščakih, ki so sestavljeni iz posameznih delov (roke, noge, trup, glava in meč) ter stojijo na Zemlji. Pri zasuku ravninskega modela Zemlje se posamezni deli vojščakov prerazporedijo in pri tem en vojščak izgine. Zanimalo me je, kam se je vojščak »izgubil«. S pomočjo teoretičnega znanja o optičnih prevarah in metode matematičnega razstavljanja bom preučil matematično ozadje te uganke, ki temelji na zasnovi Fibonaccijevega zaporedja. Z raziskovalno nalogo želim pokazati, da nekatere optične prevare niso samo stvar naše fiziologije vida, temveč se v njih skriva matematično ozadje.

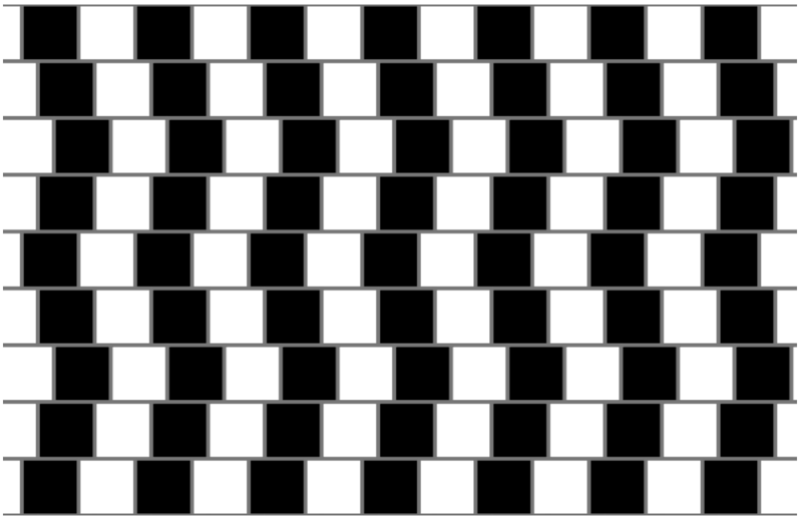
1 UVOD

Optične prevare so zmeraj privabljale ljudi, saj si niso znali čisto natančno razložiti, kaj vidijo. Imenujemo jih tudi optične iluzije. Gre za slike, ki si jih možgani razlagajo na več različnih načinov. Zaradi barv, ki so izrazito kontrastne, nas še bolj zmedejo oziroma nas prepričajo, da vidimo to, česar po navadi na sliki sploh ni. Lahko jih uvrstimo med uganke. Ena izmed najbolj znanih je zagotovo tista, ob gledanju katere se pojavi vprašanje kaj je na sliki, vaza ali dva obraza, ki si gledata iz oči v oči (slika 1). Zaradi razlike v barvah nekateri vidijo vazo, drugi vidijo dva obraza. Če intenzivnost barv povečujemo ali zmanjšujemo, se jasnost slike povečuje ali zmanjšuje.



Slika 1: Optična prevara 1 (Človek, zbudi se (b. d.))

Znana je tudi optična prevara, ko se pojavi vprašanje, ali so črte ravne ali ne. Črte so ravne, poševne jih naredijo črni in beli kvadrati, ki so zamaknjeni. Zaradi te zamaknjenosti, črte na prvi pogled izgledajo poševne. To optično prevaro opisuje slika 2 (Optična iluzija (b. d.)).



Slika 2: Optična prevara 2 (Optična iluzija (b. d.))

Seveda obstaja še veliko drugih, a sem navedel samo, po mojem mnenju, najzanimivejši.

Tudi Loydovo uganko o izstopu z Zemlje bi lahko uvrstili med optične prevare. Pri uganki se namreč pojavi vprašanje, kam je izginil eden izmed vojščakov, ko se je zemlja zavrtela. Ko vojščak izgine iz našega vidnega polja, gre za prevaro naših očes, po drugi strani pa uganka v sebi skriva matematično ozadje. S slednjim sem se ukvarjal v raziskovalni nalogi.

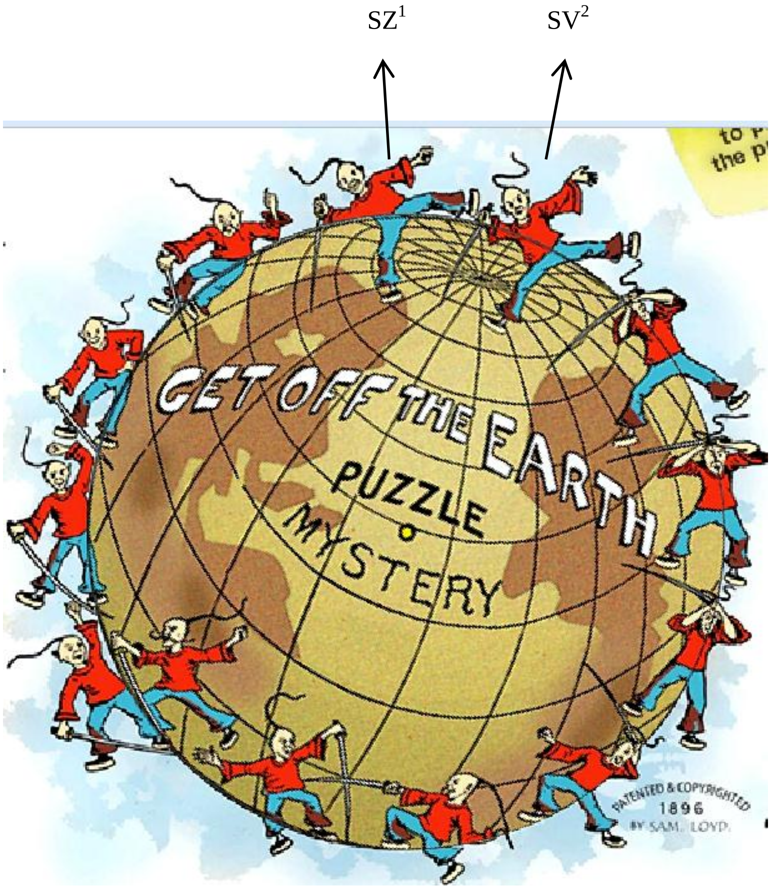
Cilj naloge je pokazati, da se na videz nerešljivi in za naše oko abstraktni problemi dajo rešiti s pomočjo različnih metod.

Metodologija, ki sem jo v nalogi uporabil je bila proučevanje pisnih virov.

2 GLAVNI DEL

2.1 Loydova uganka o izstopu z Zemlje

To je uganka, pri kateri je na začetku na Zemlji trinajst kitajskih vojščakov (slika 3). Vsak vojščak je sestavljen iz posameznih delov, kot so roke, noge, trup, glava in meč.
Osnovna lega Zemlje je na začetku obrnjena proti severovzhodu (↗) (Danesi, 2007, str. 135).



Slika 3: Zemlja v osnovni poziciji s trinajstimi vojščaki (Sam Loyd (b. d.))

Ko Zemljo zavrtimo v smeri urinega kazalca tako, da vojščak, ki je v prvotni legi kazal na severozahod preide na mesto vojščaka, ki je v prvotni legi kazal na severovzhod, en vojščak izgine. Ta zasuk nam prikazuje slika 4.

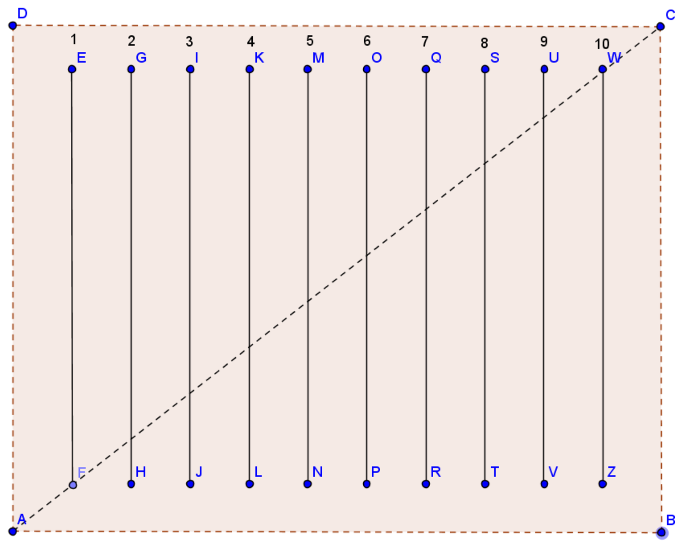
[1] SZ – Vojščak ima smer neba severozahod.
[2] SV – Vojščak ima smer neba severovzhod.

Slika 4: Zemlja v zasukani poziciji z dvanajstimi vojščaki (Sam Loyd (b. d.))

Pri vrtežu Zemlje se vojščaki razporedijo in jih je z našega vidnega polja na Zemlji ostalo le dvanajst. Natančnejši pogled pokaže, da je en vojščak izgubil vse svoje dele in je nekako »izginil« z našega vidnega polja. Vsak vojščak namreč drži v roki meč. Pred zasukom meč v desni roki drži osem vojščakov, v levi dva, nad glavo pa meč držijo trije vojščaki. Po zasuku v desni roki meč drži osem vojščakov, v levi dva, nad glavo pa prav tako dva vojščaka.

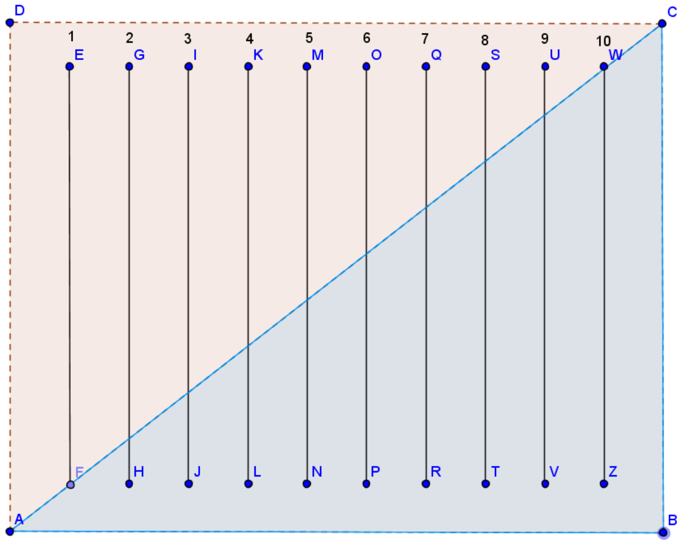
2.2 Izginjajoče vzporednice

Ideja dokaza uganke je trik s poljubnim pravokotnikom ABCD, ki ga bomo imenovali trik »izginjajočih vzporednic«. Znotraj pravokotnika je deset skladnih vzporednic, ki so med seboj enako oddaljene (slika 5). Preko njih poteka diagonala AC in se dotika oglišča prve daljice (F) in oglišča desete daljice (W).



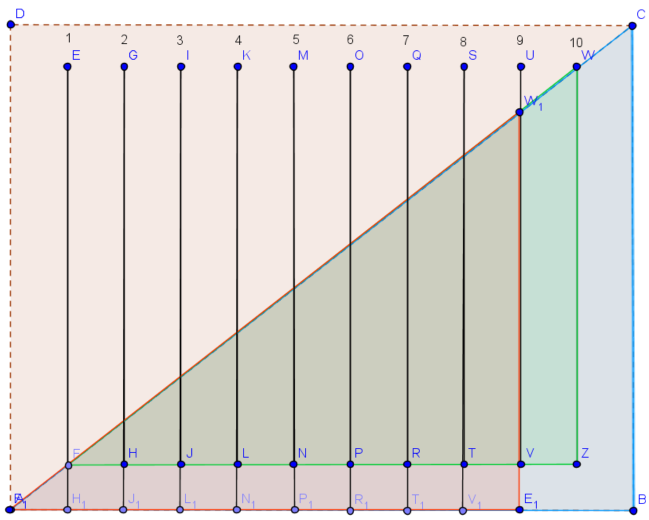
Slika 5: Osnovni pravokotnik z desetimi daljicami (lastni vir)

Pravokotnik po diagonali AC prerežemo in pri tem dobimo dva novonastala skladna pravokotna trikotnika, ADC in ABC. Pri tem se tudi vse daljice razen, prve (daljica EF) in desete (daljica WZ), razdelijo na dva dela (slika 6).



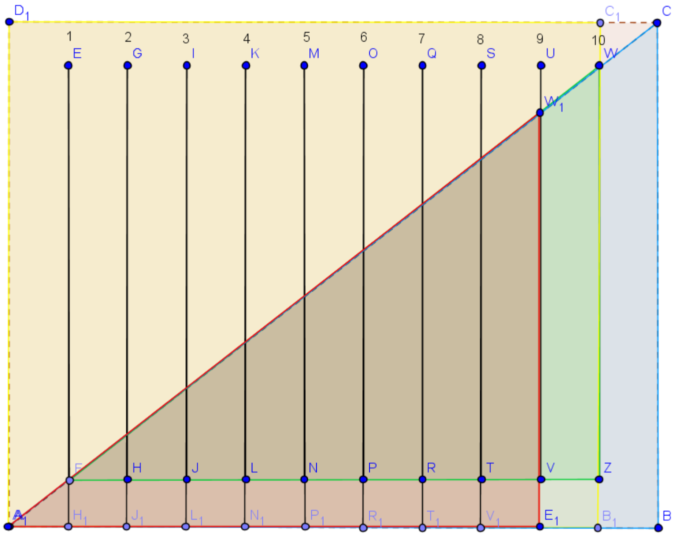
Slika 6: Prerezani pravokotnik (lastni vir)

Pri naslednjem koraku trikotnik ABC premaknemo po diagonali AC za dolžino razdalje med vzporednicama UV in WZ (slika 7).



Slika 7: Pravokotnik po premiku (lastni vir)

Če daljice po premiku preštejemo, ugotovimo, da jih je le devet. Pri premiku trikotnika ABC je krak BC prekril daljico WZ (slika 8) (Danesi, 2007).



Slika 8: Novonastali pravokotnik z devetimi daljicami (lastni vir)

Nastal je novi pravokotnik $A_1B_1C_1D_1$, znotraj katerega je ostalo devet skladnih, vzporednih in enako oddaljenih daljic.

Če bi s tem postopkom nadaljevali, bi po vsakem koraku dobili pravokotnik, ki bi vseboval daljico manj, kot v predhodnem koraku. Tako bi v desetem koraku dobili pravokotnik brez notranje daljice, saj bi se daljica EF prekrila s stranico novonastalega pravokotnika.

3 MODEL MATEMATIČNEGA RAZSTAVLJANJA

Trik uganke izginulega vojščaka z Zemlje in izginjajoče vzporednice ima za ozadje Fibonaccijevo zaporedje, ki ga bom na kratko predstavil v nadaljevanju.

3.1 Fibonaccijevo zaporedje

Leonardo Fibonacci, znan tudi kot Leonardo iz Pise, se je rodil okoli leta 1170 v Pisi v Italiji. Poznamo ga predvsem zaradi njegovega zaporedja (Leonardo Fibonacci (b. d.)).

Pravilo za Fibonaccijevo zaporedje se glasi, da je vsota dveh prejšnjih členov zaporedja enaka naslednjemu členu.
Splošni predpis, oziroma rekurzivna formula zaporedja je:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2,}, \; n = 1, 2, 3,.$$

Zaporedje je sledeče: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Fibonaccijevo zaporedje je zato primer neskončnega zaporedja.

Da bomo lažje razumeli nadaljevanje raziskovanja, si bomo ogledali Fibonaccijevo idejo, in sicer je zaporedje predstavil na modelu razmnoževanja zajcev.

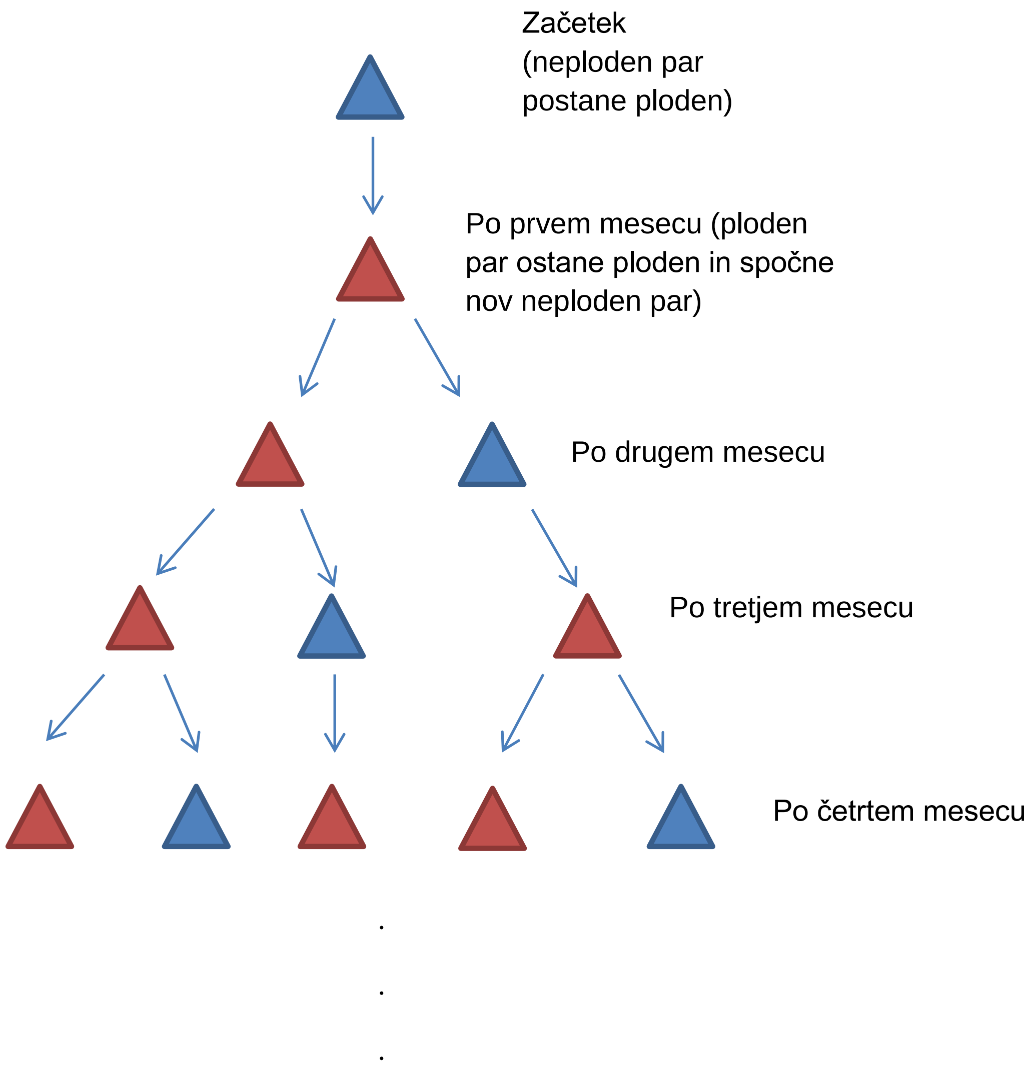
Zamislil si je, da so okoliščine razmnoževanja idealne. Predpostavil je, da bi se dvema zajcema (samcu in samici) vsak mesec rodil nov par zajcev. Predpostavil je tudi, da samica ne more kotiti, preden ne dopolni starosti dveh mesecev in da zajci nikoli ne bi umrli.

Na začetku je v kletki en par zajcev, na koncu prvega meseca se par že pari, vendar je v kletki še vedno le en par. Po drugem mesecu samica skoti prvi par zajcev, tako, da sta v kletki zdaj dva para. V tretjem mesecu prva samica povrže svoj drugi par mladičev, druga samica pa še ni spolno zrela, tako, da so v kletki zdaj trije pari. Po koncu četrtega meseca prva in druga samica povržeta vsaka svoj par mladičev, tako, da je v kletki zdaj pet parov zajcev. Tako se nadaljuje v neskončnost, saj je Fibonacci predpostavil, da zajci nikoli ne umrejo (Plešec, 2002).

Na spodnji sliki (slika 9) je predstavljen drevesni prikaz razmnoževanja zajcev.

… neploden par

… ploden par



Slika 9: Drevesni prikaz razmnoževanja zajcev (lastni vir)

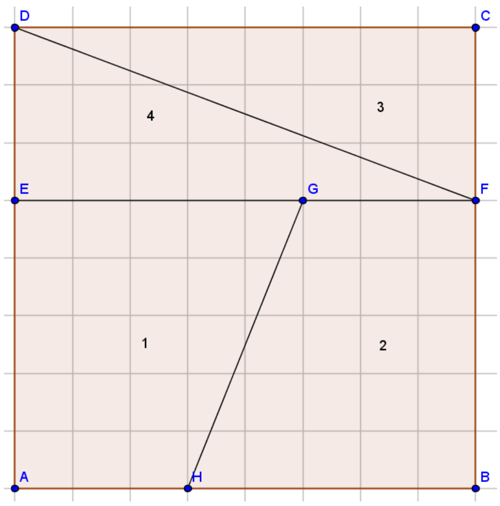
V nadaljevanju sem predstavil matematično razstavljanje »padca kitajskega vojščaka z Zemlje«.

3.2 Matematično razstavljanje

Sestavljanje in razstavljanje slik s šestilom in ravnilom je vedno predstavljalo in še danes predstavlja konkretno in zanesljivo metodo za proučevanje lastnosti slik. Takšno metodo je uporabil tudi Sam Loyd pri razstavljanju svoje uganke.

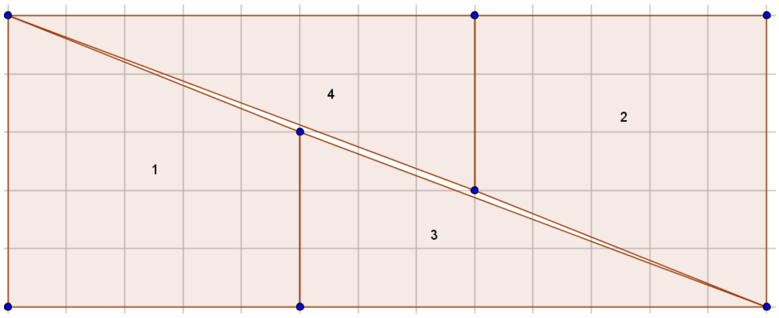
Postopek razstavljanja njegove uganke bom opisal v nadaljevanju.

Kvadratno polje velikosti 8×8 razdelimo na štiriinšestdeset kvadratkov. Višino kvadrata razdelimo v razmerju $3:5$, spodnjo stranico razdelimo v istem razmerju. Nato kvadrat razdelimo na skladna trapeza in skladna pravokotna trikotnika. Krajša kateta trikotnikov meri 3 enote, daljša pa 8 enot. Dopolnjujeta se v pravokotnik, prav tako, kot trapeza (slika 10).



Slika 10: Kvadrat velikosti $\mathbf{8 \times 8}$, razdeljen na like (lastni vir)

V naslednjem koraku dobljene like sestavimo v pravokotnik (slika 11).



Slika 11: Liki, sestavljeni v pravokotnik (lastni vir)

Če preštejemo kvadratke v pravokotniku oziroma izračunamo njegovo ploščino ($5 \times 13 = 65\ e^2$), ugotovimo, da je en kvadratek več, kot je bil v začetnem kvadratu ($8^2 = 64\ e^2$).
Ob natančnem pregledu pravokotnika ugotovimo, da po diagonali poteka ozek in dolg paralelogram, ki je skoraj neviden. Zanima nas njegova ploščina.

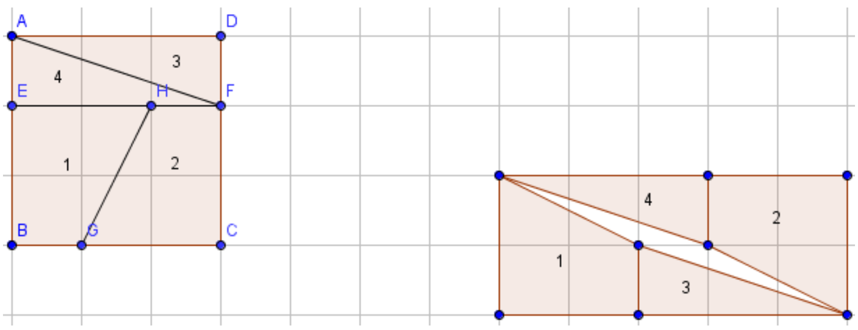
Ploščina pravokotnika: $5 \times 13 = 65\ e^2$

Ploščina kvadrata: $8^2 = 64\ e^2$

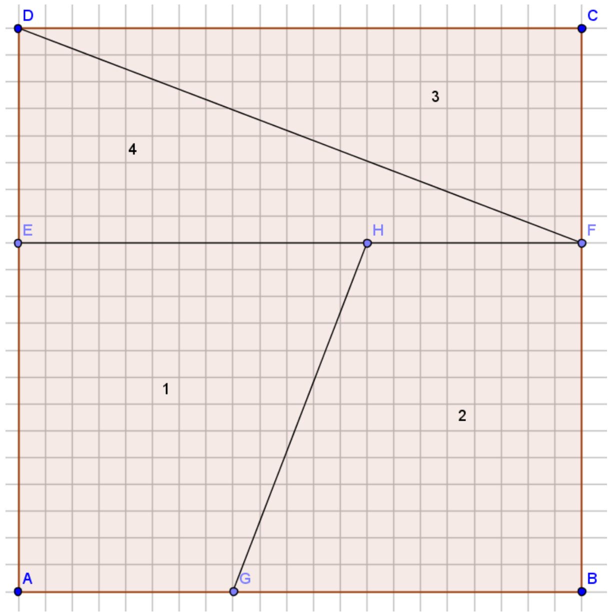
Razlika med ploščinama: $5 \times 13 - 8^2 = 1\ e^2$

Dobljena razlika med ploščinama, ki meri $1\ e^2$, predstavlja ploščino paralelograma.
Kot sem prej navedel, so števila 5, 8 in 13 zaporedna števila Fibonaccijevega zaporedja. Sedmi člen zaporedja ($a_7 = 13$) dobimo, če seštejemo člena $a_5 = 5$ in $a_6 = 8$.

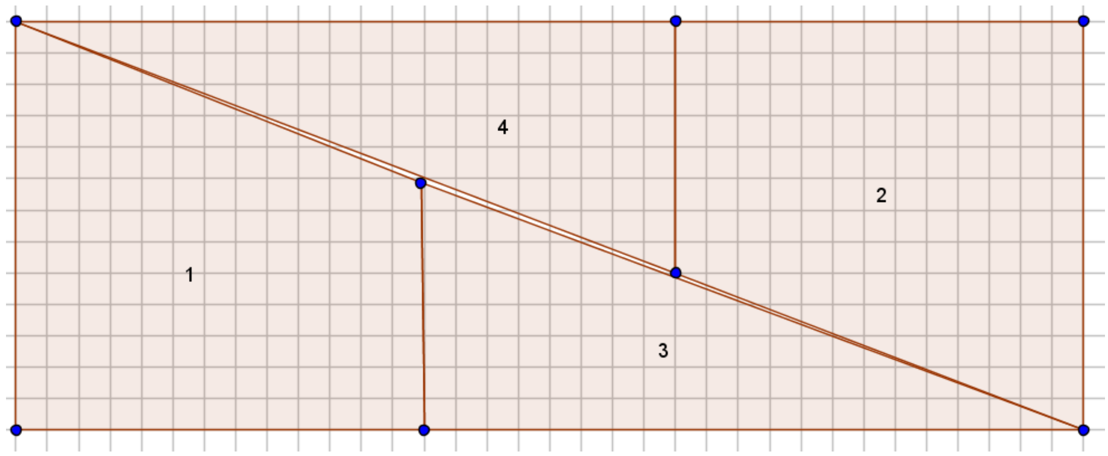
Enako sem naredil tudi s kvadratoma velikosti 3×3 (slika 12) in 21×21 (sliki 13 in 14). Ugotovil sem, da je tudi pri njiju razlika med ploščinama enaka $1\ e^2$.



Slika 12: Kvadrat velikosti **3 × 3**, razdeljen na like in liki, sestavljeni v pravokotnik (lastni vir)



Slika 13: Kvadrat velikosti 21×21, razdeljen na like (lastni vir)



Slika 14: Liki, sestavljeni v pravokotnik (lastni vir)

4 UGOTOVITVE

Na podlagi matematičnega razstavljanja sem prišel do ugotovitev, ki sem jih povzel v spodnji tabeli (tabela 1).

Tabela 1: Ugotovitve na podlagi modela razstavljanja

Kvadrat	Delitev stranice kvadrata v razmerju	Ploščina pravokotnika	Ploščina paralelograma	Trojica števil
$3 \times 3 = 9$	$1:2$	$2 \times 5 = 10$	$2 \times 5 - 3 \times 3$ $= 10 - 9 = 1$	$2, 3, 5$
$8 \times 8 = 64$	$3:5$	$5 \times 13 = 65$	$5 \times 13 - 8 \times 8$ $= 65 - 64 = 1$	$5, 8, 13$
$21 \times 21 = 441$	$8:13$	$13 \times 34 = 442$	$13 \times 34 - 21 \times 21$ $= 442 - 441 = 1$	$13, 21, 34$
55×55	$21:34$	$34 \times 89 = 3026$	$34 \times 89 - 55 \times 55$ $= 3026 - 3025$ $= 1$	$34, 55, 89$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Naslednji kvadrat bi bil dimenzije 144×144, še naslednji 377×377, in tako dalje. Iz tega sledi:

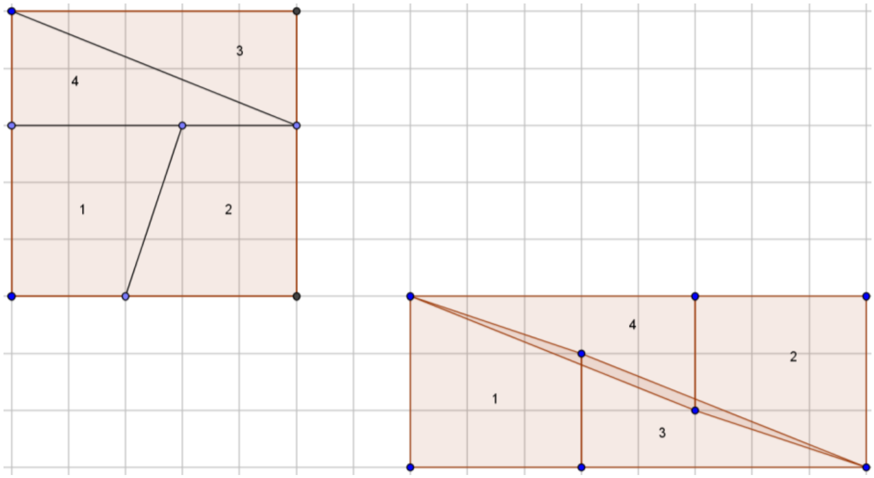
$$a_n^2 = a_{n-1} \times a_{n+1} - 1; \;\; n = 2k, \;\; k = 1, 2, 3, \dots$$

	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	$\cdots$
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$

Zgornja formula velja le za člene zaporedja, ki imajo sodi indeks ($a_2, a_4, a_6, \dots$).
Pri tem je izjema člen a_2, saj gre za kvadrat dimenzije 1×1. Ta kvadrat namreč ni mogoče razstaviti po pravilu razstavljanja s členi Fibonaccijevega zaporedja, saj nima dveh predhodnih členov, ki nam povedo, v kakšnem razmerju delimo stranico kvadrata.

Zgornja splošna formula ne velja za člene zaporedja, ki imajo lihi indeks.
To sem pokazal na naslednjem primeru.

Pri preoblikovanju razdeljenega kvadrata v pravokotnik, se liki prekrijejo in pri tem prekrivajoči se del ponazarja paralelogram, s ploščino 1 e^2. Prikazal sem primer kvadrata dimenzije 5×5 (slika 15).



Slika 15: Kvadrat $\mathbf{5 \times 5}$, razdeljen na like in liki, sestavljeni v pravokotnik (lastni vir)

Višino in stranico kvadrata velikosti 5×5 sem razdelil v razmerju $2:3$. Števili 2 in 3 sta namreč predhodna člena števila 5 v Fibonaccijevem zaporedju.

Iz slike pravokotnika je razvidno, da se liki med seboj prekrivajo in tako tvorijo paralelogram ploščine $1\ e^2$. V tem primeru torej en manjši kvadrat izgine, saj sestavljeni liki prekrijejo ploskev v velikosti njegove ploščine.

Splošna formula za člene z lihim indeksom bi torej bila:

$$a_n^2 = a_{n-1} \times a_{n+1} + 1; \;\; n = 2k + 1, \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$$

5 ZAKLJUČEK

Optične prevare ali optične iluzije so slike, ki si jih možgani razlagajo drugače od njihovega resničnega videza. Če so barve izrazito kontrastne, naše možgane še bolj zmedejo. Zato opazovalcu predstavljajo uganko.

Sam Loyd je ustvaril uganko z imenom Loydova uganka o izstopu z Zemlje. Govori o trinajstih vojščakih, ki stojijo na obodu Zemlje in so sestavljeni iz različnih delov (roke, noge, trup, meč in glava). Ko obod Zemlje zavrtimo in vojščake preštejemo, ugotovimo, da je eden izmed njih izginil. Na prvi pogled se opazovalca zanima, zakaj je prišlo do tega dogodka. Osnovna ideja uganke je zasnovana na osnovi »izginjajočih vzporednic«. Znotraj pravokotnika je deset skladnih vzporednic. Ko pravokotnik razrežemo po diagonali in spodnji dobljeni del pomaknemo levo navzdol, ugotovimo, da je ena vzporednica izginila.

S to uganko je močno povezano tudi Fibonaccijevo zaporedje $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots)$, na osnovi katerega temelji model matematičnega razstavljanja. Za osnovni lik izberemo kvadrat dimenzije $3 \times 3,\ 8 \times 8,\ 21 \times 21, \ldots$ (gre za člene zaporedja). Pri razstavljanju kvadrat razdelimo na dva skladna pravokotna trikotnika in dva skladna trapeza. Potem jih sestavimo v pravokotnik. Ob natančnem pregledu le-tega ugotovimo, da se na sredini pojavi ozek paralelogram, ki ima ploščino enega kvadratka. Torej je nastal en kvadratek več. Če to ponazorimo računsko in od ploščine pravokotnika odštejemo ploščino kvadrata, dobimo 1, kar je ploščina nastalega paralelograma oziroma tudi ploščina manjšega kvadrata.

Če pa izberemo kvadrate dimenzije $5 \times 5,\ 13 \times 13,\ 34 \times 34, \ldots$ ter jih ponovno razdelimo na dva skladna trikotnika in trapeza, se pri preoblikovanju likov v pravokotnik ti liki prekrijejo in pri tem en kvadratek oziroma paralelogram ploščine $1\ e^2$ izgine.

Loydovo uganko o izstopu z Zemlje uvrščamo na področje geometrije, natančneje geometrijske predstave. Reševanje geometrijskih problemov in ugank pa zahteva natančno risanje in analiziranje narisanega. Obravnavana uganka predstavlja posreden vstop v svet optičnih prevar. Zato ni zanimiva le z matematičnega vidika, temveč bi bila zanimiva obravnava tudi s področja psihologije. Slika, ki jo naše oči zaznajo, je namreč stvar kulturno osnovanega dejstva, ki smo se ga ljudje o neki stvari naučili in ga ponotranjili. Zato naše oči interpretirajo videno na stopnji nezavedne ravni. Optična prevara pa naše oko prisili k temu, da si določeno sliko razlaga na drug način.

6 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Ljudje nekatere stvari na prvi pogled vidimo povsem drugače, kot izgledajo v resnici. Drugače si lahko razlagamo na primer nasvete naših bližnjih, vsakdanje stvari, ki nas obdajajo in s katerimi se srečujemo, eden od primerov pa so optične prevare. Lahko bi rekel, da so naravnost ustvarjene za to, da si jih ljudje razlagajo drugače.

Zato, ker si vsak izmed nas razlaga stvari drugače, še ne pomeni, da si jih razlagamo narobe. Optične prevare si je mogoče razlagati na najmanj dva različna načina, kot sem že prikazal na začetku naloge s slikama 1 in 2. Razlog različnega razlaganja in interpretiranja slik ter drugih stvari je v posameznikovem načinu razmišljanja. Vsak izmed nas ima namreč svojo predstavo o določeni stvari, zato prihaja tudi do različnih rešitev.

V družbi velikokrat pride do različnih mnenj o posameznih stvareh. Lahko bi celo rekel, da je naš svet velikokrat optična prevara, saj si vsak izmed nas ustvari lastno mišljenje o posameznih rečeh. Odgovornost celotne družbe in vsakega izmed nas pa je v tem, da spoštujemo mnenja vsakega posameznika ali interesne skupine, tudi, če se z njimi ne strinjamo. Pomembno je, da je družba pravična do vsakega posameznika, da upošteva njegove odločitve, pri tem pa seveda vzpostavi kritičen odnos, ki ne sme preseči meje neetičnosti.

LITERATURA

Človek, zbudi se (b. d.): Optične prevare oz. optične iluzije – believing is seeing. Pridobljeno 18. 11. 2012 iz http://www.zbudise.net/blog/2008/01/opticne-iluzije-prevare/

Danesi, M. (2007). *Paradoks lažnivca in hanojski stolpi.* Ljubljana: DMFA.

Leonardo Fibonacci (b. d.). Pridobljeno 10. 1. 2013 iz http://sl.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

Optična iluzija (b.d.). Pridobljeno 20. 11. 2012 iz http://sl.wikipedia.org/wiki/Opti%C4%8Dna_iluzija

Plešec, J. (2002): Zlati rez. *Kvarkadabra, št. 15.* Pridobljeno 28. 12. 2012 iz http://www.kvarkadabra.net/article.php/zlati-rez

Sam Loyd (b. d.). Pridobljeno 7. 1. 2013 iz http://samuelloyd.com/gote/gote.html