»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2013«

30. SREČANJE

REŠUJ ME S SMEHOM, NE S SOLZAMI!

Matematika

RAZISKOVALNA NALOGA

Avtor: ALJAĢ ĢEL, ANĢE FEGUĠ

Mentor: URĠKA GSELMAN

Ġola: OĠ PREĢIHOVEGA VORANCA MARIBOR

MARIBOR, FEBRUAR 2013

KAZALO

1 POVZETEK

Vsak človek se že od rojstva srečuje s problemskimi situacijami. Že kot majhen otrok se mora, če želi dobiti igračo, lotiti problema premagovanja razdalje in/ali ovir. Če se želi povzpeti na stol, mora razmisliti in nadzirano izvesti vsak gib.

V življenju se nenehno srečujemo s takšnimi in drugačnimi problemi, za njihovo uspešno rešitev pa potrebujemo ustrezno strategijo. Zato se bova v raziskovalni nalogi lotila matematičnih problemov in poskušala ugotoviti, ali lahko otroci prenesejo spretnosti, ki jih pridobijo pri reševanju problemskih nalog pri matematiki, na reševanje problemov v vsakdanjem življenju. Predstaviti želiva različne tipe problemskih nalog, kako razvijati ustrezne spretnosti za reševanje problemskih nalog in nekaj najbolj znanih matematičnih problemov.
Za dodatno zabavo pri delu pa bova poskrbela tako, da bova raziskala in predstavila nekaj problemskih nalog s področja zabavne matematike.

2 UVOD

Vse od otroštva se srečujemo s problemi, npr. že kot majhni otroci se moramo postaviti na noge. Morda kasneje to več ni problem, za majhnega otroka pa je to prava revolucija. Ti vsakodnevni problemi se z leti stopnjujejo na čedalje višjo stopnjo, dokler jih ne rešujemo že načrtno. In prav to naju je pripeljalo do tega, da sva se odločila napisati raziskovalno nalogo o matematičnih problemih.

Problemi ljudi zanimajo že od časa pred našim štetjem. V Rimu, Egiptu, stari Grčiji so ljudje reševali probleme za zabavo in užitek. In tako jih bova poskusila predstaviti midva.

2.1 Namen naloge

V najini raziskovalni nalogi bo poudarek na matematičnih problemih in njihovem reševanju. Predstavila bova vrste matematičnih problemov in strategije za reševanje. Nato bova predstavila nekaj najbolj znanih matematičnih problemov in poti za njihovo reševanje. Podala se bova tudi na področje razvedrilne oz. zabavne matematike in tako z zanimivimi matematičnimi problemi pokazala, da matematika lahko pritegne vsakogar.

2.3 Cilji naloge

Najini cilji v tej raziskovalni nalogi so bili naslednji:

- naučiti se strategij za reševanje matematičnih problemov;
- vzbuditi zanimanje za reševanje matematičnih problemov;
- predstaviti, da lahko strategije pri reševanju matematičnih problemov uporabimo tudi pri reševanju vsakdanjih problemov.

2.2 Metodologija dela

Zamisel o tem, da bi spoznala zanimive matematične probleme, naju je oba zelo pritegnila in tako sva se raziskovanja lotila s prijetnimi pričakovanji.

Najprej sva se odpravila v knjižnico, kjer sva izbrala ustrezno literaturo. Nato sva za ustrezno vsebino pobrskala še po spletnih virih. Zbrane materiale sva prebrala, preučila in se o vsebinah pogovorila. Nato sva nova spoznanja analizirala še ob pomoči najine mentorice.

Pri delu sva uporabila naslednje metode:

- iskanje ustrezne literature,
- iskanje ustreznih vsebin na spletu,
- analiza dela,
- zapis in oblikovanje zapisa vsebine.

3 PROBLEM

Problem je situacija v kateri mora človek najti svoj način, da reši vprašanje, izziv, … Človek se z njimi srečuje že od rojstva, z vsakim uspešno rešenim problemov pa se stopnja reševanja viša. Problem je nerešena naloga, preko katere preidemo v problemsko situacijo oziroma končno do rešitve.

Rešiti problem pomeni poiskati izhod iz določene težave, poiskati pot, ki pelje do zastavljenega cilja, kateri ni takoj dosegljiv. Reševanje problemov je specifična dejavnost razuma, razum pa je specifičen samo za človeka: torej je reševanje problemov osnovna človeška aktivnost. (Polya, 1971; cit. po Cotič 1999, str. 6)

4 MATEMATIČNI PROBLEMI

Matematični problem je vprašanje, na katerega moramo najti rešitev s preučitvijo naloge in izbiro prave strategije. Namen reševanja matematičnih problemov je, da se učenec z vsakim uspešno rešenim problemom nauči novih spretnosti in znanj.

Tradicionalni matematični problemi so bili v večini primerov podani samo kot vaje s še eno slabostjo: zoženi so bili na aritmetične probleme, s katerimi se je predvsem urilo štiri osnovne računske operacije. Aritmetične operacije so prav gotovo ena izmed najpomembnejših matematičnih vsebin na razredni stopnji, kar pa ne pomeni, da učencu ne zastavimo tudi probleme iz geometrije, merjenja, logike in obdelave podatkov. (Cotič, 1999, str. 9)

Nujno je, da učenca postavimo v take problemske situacije, ki so v območju njegove zavesti in realnih ali vsaj pričakovanih rešitvenih možnosti, kakor tudi njegovega interesa in hotenja, da se z njimi spoprime.

Reševanje problemov je samostojno kombiniranje dveh ali več že naučenih zakonitosti v princip višjega reda. Odkrita rešitev problema se potem posploši na celo kategorijo podobnih problemov. (Marentič-Požarnik, 2003, str. 78)

»Beseda problem je po mojem mnenju ena najbolj rabljenih besed današnjega časa. Prepletena je z vsakdanjim življenjem ljudi in jih spremlja od zgodnjega otroštva pa vse do starosti. Reševanje problemov je torej pomembno v vsakem trenutku našega življenja in v vseh družbenih procesih, tako da ni nič čudnega, da je postalo tudi eden najpomembnejših elementov načrtov in ciljev vseh izobraževalnih ustanov na vseh nivojih izobraževanja, od vrtca do univerze.« (Ristič, 2004, str. 49)

4.1 Splošni cilji pouka matematike povezani z znanjem reševanja problemov

Učenje skozi reševanje problemov je vodilni koncept pri matematiki. Matematika mora učencu zagotoviti dvoje:

- izziv in
- občutek uspeha,

kar dosežemo prav z reševanjem matematičnih problemov.

S splošnimi cilji pouka matematike opredelimo namen poučevanja matematike. Splošni cilji pouka matematike, ki jih lahko kasneje povezujemo z znanjem reševanja problemov:

- razvijanje matematičnega mišljenja: abstraktno-logično mišljenje in geometrijske predstave;
- oblikovanje matematičnih pojmov, struktur, veščin in procesov ter povezovanje znanja znotraj matematike in tudi širše;
- razvijanje uporabe različnih matematičnih postopkov in tehnologij;
- spoznavanje uporabnosti matematike v vsakdanjem življenju;
- spoznavanje matematike kot procesa ter učenje ustvarjalnosti in natančnosti;
- razvijanje zaupanja v lastne (matematične) sposobnosti, odgovornost in pozitiven odnos do dela in matematike;
- spoznavanje pomena matematike kot univerzalnega jezika;
- sprejemanje in doživljanje matematike kot kulturne vrednote.

(Učni načrt, str. 5)

4.2 Besedilni problem

Besedilni problem ločimo na dve obliki:

1. Prva oblika oziroma zgodba je umeščena v realni svet.

   PRIMER: Na avtocesti je bila v ponedeljek kolona avtomobilov dolga 30 kilometrov, nato pa je vsak dan za 5 kilometrov naraščala. Kako dolga je bila kolona avtomobilov naslednji ponedeljek?

2. Druga oblika besedilnega problema pa vsebuje matematično vprašanje izraženo z besedami, ki pa je običajno zapisano v/z matematičnimi simboli (v simbolni obliki).

   PRIMER: Tovorni vlak je imel sprva 9 vagonov, nato se je število le-teh podvojilo. Koliko vagonov ima tovorni vlak tretji dan po dnevu, ko jih je imel 9?

4.3 Iskanje matematičnega problema

Učenec naj bi se z matematičnimi problemi srečal preko matematične problemske situacije.

Problem je učinkovit takrat, kadar pomaga učencem razvijati znanja, ki jih učitelji želijo razvijati. Pri iskanju problemov si lahko pomagamo z učbeniki, priročniki, otroško in ostalo literaturo, matematičnimi revijami, marsikaj pa se najde tudi na spletu, vendar pa moramo biti pri brskanju po spletu previdni, saj to, da je objavljeno na spletu, še ne pomeni, da je dobro. Probleme si z lahkoto izmislimo tudi sami, če vsaj nekoliko poznamo sredstva variiranja problemov, kot so posplošitve, specializacija, analogija, sestavljanje in razstavljanje.« (Polya, 1989, str. 72).

Za samostojno reševanje matematičnih problemov mora učenec razviti spretnosti za reševanje problemov oziroma se seznaniti z njihovim načinom reševanja in poleg tega razviti tudi svoje metode, s katerimi na utemeljen način pride do rezultata.

Frobisher (Vršič, 2010, str. 51) je razporedil procese v naslednje kategorije:

1. komunikacijski procesi (npr. pojasnjevanje, govorjenje, dogovarjanje, spraševanje);
2. operativni procesi (npr. zbiranje, razvrščanje, urejanje, spreminjanje);
3. procesi zapisovanja (npr. risanje, pisanje, oblikovanje seznamov, oblikovanje grafov);
4. miselni procesi (npr. zbiranje, interpretiranje, analiziranje, razumevanje).

Oblikoval je tudi shemo, s katero je želel prikazati povezanost posameznih procesov pri reševanju in preiskovanju problemov. V shemi je izpostavil naslednje matematične procese: ugibanje oziroma domnevanje, postavljanje domnev (hipotez), posploševanje, dokazovanje.

Vsi ti procesi so splošni, zato jih lahko uporabljamo pri reševanju problemov na vseh predmetnih področjih. Nabor procesov, urejenih v neko zaporedje, ki se uporablja za reševanje problemov, imenujemo strategija.

Še sedaj veliko učiteljev verjame, da je namen reševanja problemov, da učenci z vnaprej naučenim znanjem računskih postopkov pridejo do rešitve naloge. Do neke mere je to razumljivo, saj je pri vrednotenju reševanja problemov naša pozornost preveč usmerjena le na končno rešitev danega problema.

4.4 Vrste matematičnih problemov

Ločimo več vrst problemov. Dve izmed kategorizacij problemov sta Mialaretova kategorizacija problemov in Frobisherjeva kategorizacija problemov. (Cotič, 1999)

Mialaretova kategorizacija problemov:

- vodeni problemi
- nevodeni problemi
- nepopolni problemi

Vodeni problemi:

Pri vodenih problemih besedilo že določa vrstni red reševanja. Najbolj preprost vodeni problem je problem, ki se ga reši samo z eno operacijo in ga je Mialaret poimenoval enostavni vodeni primer. Vodeni primeri so lahko tudi sestavljeni.

Velikokrat je smiselno sestavljene probleme razstaviti na podprobleme, pri tem je nujno postavljati vmesna vprašanja. Razstavljanje problemov na manjše dele znižuje zahtevnost in dopušča, da učenec na razredni stopnji najde rešitev.

Nevodeni problemi:

Pri teh problemih postopek ni pokazan v besedilu problema. Učenec mora sam odkriti pot oziroma poti, ki jih mora premagati, da doseže nek cilj, ki je v besedilu določen. Zato so ti problemi miselno zahtevnejši od vodenih problemov.

Nepopolni problemi:

Te vrste problemov so predstavljali s situacijami, pri katerih je odprta tako pot do cilja kot cilj sam. Pri takšnih problemih je toliko različnih poti in ciljev, kolikor je učencev oziroma skupin učencev, če poteka reševanje v skupini; hkrati pa tudi ista skupina učencev poišče več različnih rešitev istega problema.

Frobisherjeva kategorizacija problemov:

- problemi z zaprto potjo in zaprtim ciljem
- problemi z odprto potjo in zaprtim ciljem
- problemi z odprto potjo in odprtim ciljem

Cotičeva pa še zapiše, da naj bi učencem na razredni stopnji pri pouku matematike zastavljali poleg obstoječih matematičnih problemov še naslednje vrste problemov:

- probleme, ki nimajo zadostnega števila podatkov za rešitev;
- probleme, ki imajo več podatkov, kot je potrebnih za rešitev;
- probleme z več rešitvami;
- probleme, ki jih rešimo na različne načine;
- probleme, v katerih so si podatki nasprotujoči oziroma nimajo rešitev.

4.5 Reševanje matematičnega problema

Pri reševanju problemov gre predvsem za razvijanje učenčevega mišljenja, saj mora pot do rešitve najti sam.

Po ameriškem pedagogu Johnu Deweyu (Marentič-Požarnik, 2003, str. 80) lahko razvrstimo faze za reševanje problemov v naslednjem zaporedju:

1. zaznava problemske situacije;
2. opredelitev problema (kaj je dano, kaj se išče);
3. preizkušanje hipotez, zbiranje podatkov in reševanje v ožjem smislu;
4. ugotovitev rešitve in njeno preverjanje;
5. posplošitev rešitve, prenos v nove situacije.

Te faze so lahko pomešane zaradi tega, ker so lahko med seboj prepletene ali pa se lahko katera izmed njih tudi izpusti zaradi različnega mišljenja različnih učencev.

Dobro reševanje je predvsem odvisno od posameznika in njegovega predhodnega znanja, sposobnosti, različnih strategij, ki mu pomagajo najti rešitev problema na več načinov reševanja, in pomoči učencev oziroma učiteljev.

Reševanja problemov ni mogoče enačiti z reševanjem nalog po ustaljenem načinu, ker gre za sposobnost uporabe znanja v novih situacijah.

Besedilno oziroma problemsko nalogo običajno rešujemo z uporabo Descartove t.i. algebrske metode reševanja. Zanjo je značilno, da poiščemo znane količine ali podatke in neznane količine (neznanke ali spremenljivke), zapišemo enačbo oz. enačbe (odvisno od števila neznank) in enačbo rešimo. Potem iz rešitve enačbe in besedila naloge izluščimo rešitev naloge, ki jo preverimo na besedilu naloge, saj je možno, da smo napačno sestavili ali rešili enačbo.

Algebrska metoda je samoumevna za nekoga, ki ima za seboj več let učenja matematike. Učenci pa se z reševanjem besedilnih nalog srečajo veliko prej, kot so sposobni razumeti pojem enačbe in algebrskih postopkov reševanja enačb in sistemov enačb.

Tistim učencem, ki ne znajo pričeti z reševanjem naloge, ki ne znajo zanesljivo uporabljati aritmetike in aritmetičnih izrazov oziroma algebrskih izrazov in enačb za opise problemskih situacij, torej nimajo idej, lahko pomagamo z namigi in usmeritvami k uporabi drugih postopkov reševanja, kot so npr.:

- metoda napačne predpostavke;
- metoda reševanja nazaj;
- grafično aritmetična metoda;
- metoda postopnega približevanja;
- metoda iskanja vzorcev.

(Kmetič, 2011, str. 7)

Kot sva zapisala že zgoraj, mora matematika učencu zagotoviti dvoje: izziv in občutek uspeha. Obilo matematičnih izzivov se skriva v logičnih ugankah in matematičnih igrah. To področje se imenuje r**azvedrilna** ali **rekreativna matematika** in lahko pokriva tudi področja, kot so logika in druge uganke z deduktivnim mišljenjem. Nekateri najbolj zanimivi problemi s tega področja ne zahtevajo znanja naprednejše matematike, vendar pa za uspešno rešitev potrebujemo ustrezno strategijo.

5 RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Vsebina razvedrilne matematike lahko vsebuje tudi drugo snov, kot je estetika matematike, svojske ali zabavne zgodbe in naključja o matematiki in matematikih. Njen največji prispevek je njena zmožnost zbujanja radovednosti in navdušenja za nadaljnje proučevanje matematike.

Razvedrilna matematika vsebuje področja, kot so magični kvadrati in raziskovanje fraktalov s pomočjo računalnikov.

5.1 Najbolj znani matematični problemi

Ena najbolj znanih razvedrilnih ugank vseh časov je zagotovo sfingina uganka:
»Na začetku se plazi po štirih, kasneje hodi po dveh, na koncu pa mu služi palica za tretjo nogo.«
To uganko je sfinga postavila Ojdipu. Odgovora ni težko razvozlati in hitro ugotovimo, da je rešitev človek. Uganke, kot je ta, lahko rešimo na veliko načinov in tudi zelo hitro. Za to nalogo je zagotovo najboljša možnost rešitve intuitivno razmišljanje. Za reševanje naloge na tak način ne rabimo nobenega naprednega znanja matematike ali da smo pri matematiki zelo uspešni. Le ne smemo misliti preozko, kar je osnova za reševanje vseh matematičnih problemov. Torej lahko naloge, kot so te, reši vsak. (Danesi, 2007, str. 13)

Takšna pa je tudi svetovno znana Alcuinova uganka:
V tej uganki mora popotnik preko reke prepeljati volka, kozo in veliko glavo zelja. S sabo lahko naenkrat vzame le volka, le kozo ali le zelje, saj je čoln narejen za dva. Volk seveda lahko poje kozo, koza pa zelje. Kako bo popotnik prečkal reko?

To je seveda še ena izmed takšnih ugank, ki jo brez težav rešimo z logičnim razmišljanjem. Nalogo moramo rešiti v čim manj potezah.
Način reševanja: »Popotnik najprej vzame kozo in z njo odpluje na drugo stran reke. Volk in zelje ostaneta na začetnem bregu. Ko kozo odloži, se vrne nazaj, naloži volka in pusti zelje samo. Na drugi strani odloži volka in s sabo na začetni breg vzame kozo. Tam jo zamenja z zeljem, ki ga odpelje na drugo stran k

volku. Nazaj se ponovno vrne sam, medtem ko sta volk in zelje varna na drugi strani reke. Na začetnem bregu pobere še kozo in še zadnjič prečka reko. Sedaj ima spet svojega volka, kozo in zelje, nepoškodovane in pripravljene za nadaljevanje potovanja.« (Danesi, 2007 str. 37)
Za celotni proces je bilo potrebnih samo 7 prečkanj reke.

Hanojski stolpi oziroma problem Hanojskega stolpa je igra ali uganka s področja razvedrilne matematike. Za igro so potrebne tri palice (trije kupčki), na katere zlagamo (ali natikamo) okrogle ploščice različnih velikosti. Število ploščic je poljubno, vse pa morajo biti različnega premera.
Igra se začne tako, da so ploščice v kupčku na začetnem stolpu urejene od vrha do tal v vrstnem redu od najmanjše do največje, tako da ima kup obliko stožca. Cilj igre je premakniti celotni kupček ploščic na drug kupček ploščic (končni stolp) z najmanjšim možnim številom potez in z upoštevanjem pravil: naenkrat lahko premaknemo samo eno ploščico in na vrh manjše ploščice ne smemo postaviti večje.
Te hkrati preproste, a ne tako lahko rešljive naloge se lahko lotimo na različne načine:

- z začetkom iz poljubnega položaja;
- z nerekurzivnim reševanjem;
- z rekurzivnim reševanjem.

(Danesi, 2007, str. 113)

5.2 Najbolj znani še nerešeni matematični problemi

Problemi za Milenijsko nagrado:

- P proti NP
- Hodgeova domneva
- Riemannova domneva
- Yang-Millsov obstoj in primanjkljaj mase
- Obstoj in gladkost Navier-Stokesove enačbe
- Birch in Swinnetnon-Dyerova domneva

Od sedmih problemov za Milenijsko nagrado, ki jih je postavil Clayev matematični inštitut, je rešen samo eden.

Seveda je tukaj še ogromno drugih nerešenih problemov, ki pa jih je zelo težko razložiti, saj so izjemno zahtevni in jih ne razumejo niti največji veleumi.

5.3 Paradoksi

Zelo znani »člani« matematike pa so tudi paradoksi. Paradoksi (neskladno s pričakovanji) so poimenovani po Zenonovih argumentih iz stare Grčije, za katere se je zdelo, da se upirajo zdravemu razumu oz. so paradoksalni. V poglavju o paradoksih se bova posebej posvetila Paradoksu lažnivca, ki ga je postavil Epimenid.

Pred obravnavo paradoksa lažnivca pa si je dobro na kratko pogledati podoben paradoks, ki ga pozna praktično vsak.

- Kaj je bilo prej kokoš ali jajce?

Če rečemo, da je bila prej kura, lahko nekdo odvrne, da to ni mogoče, saj se mora kokoš najprej izvaliti iz jajca. Če rečemo, da je bilo prej jajce, nam ponovno lahko nekdo nasprotuje in reče, da to ni mogoče, saj mora kokoš jajce najprej znesti. Vprašanje o tem, kaj je bilo prej - kokoš ali jajce - se zdi nerešljivo. Odgovarjanje vodi le do izmenjave dogovorov, ki se lahko vrti v krogu za vedno. (Danesi, 2007, str.153)

Paradoks lažnivca izzove popolnoma enako vrsto »krožnosti«. Do nas je prišel bolj ali manj v naslednji obliki:

- Kretski filozof Epimenid je dejal: » Vsi Krečani so lažnivci.« Je Epimenid govoril resnico?
  Predpostavimo, da Epimenid govori resnico. Zato je njegova trditev: »Vsi Krečani so lažnivci.« resnična. Ker pa je Epimenid Krečan, moramo zaključiti, da je tudi on lažnivec. Toda s tem smo prišli do protislovja. Sedaj je razumljivo, da moramo našo predpostavko ovreči. Ugotovili smo namreč, da Epimenidova trditev ne more biti resnična. Torej obstaja vsaj

> en Krečan, ki ni lažnivec. Če je ta Krečan ravno Epimenid in so vsi drugi lažnivci, ponovno pridemo do protislovja. V tem primeru se spet soočimo s krožnostjo, ki ni nič drugačna od tiste, ki smo jo srečali pri kuri in jajcu. V nasprotnem primeru je Epimenidova izjava sicer neresnična, ni pa paradoksalna. (Danesi, 2007, str. 151)

Britanski matematik P. E. B. Jourda si je leta 1913 izmislil zelo zanimivo verzijo paradoksa lažnivca, ki svojo osnovno naravo kaže na konkreten način:

- Na eni strani kartice piše: »Izjava na drugi strani te kartice je resnična.«. Toda na njeni drugi strani je napisano: »Izjava na drugi strani kartice je neresnična.« Kaj boš naredil s kartico?

Kartica nas prisili, da jo obračamo sem in tja, z ene strani na drugo in se praskamo po glavi. Bralci se morda na tem mestu sprašujejo, kaj ima paradoks lažnivca skupnega z matematiko. Odgovor je naslednji. Za matematiko je vedno veljalo, da ne vsebuje logičnih krožnosti. Toda ni tako. Zaradi tega je paradoks lažnivca vedno navduševal matematike in čez čas postal eden izmed številnih bistroumnih paradoksov, ki so povzročili revolucionarne spremembe v matematiki.

6 LOGIČNE NALOGE

Logika je filozofski nauk o mišljenju ter njegovih zakonitostih. Logika v ožjem smislu je znanost o pravilnem sklepanju. Tradicionalno je logika filozofska disciplina, v 19. stoletju pa je postala tudi del matematike in kasneje računalništva.

6.1 Zgodovina logike

Aristotel je utemeljitelj logike. Njegovi logični spisi (njegovo osrednje logično delo je *o razlaganju* - *Peri Hermeneias*) se ukvarjajo zakonitostmi pravilnega sklepanja. Aristotel je sistematično razmejil logiko kot znanost o pravilnem sklepanju od sofistike, grškega miselnega gibanja, ki se je pogosto posluževalo paradoksov in prikritih zmot v argumentih.

Sholastika je razvila Aristotelov sistem v logiko, ki jo danes poznamo pod imeni *logika terminov*, silogistika ali A-sistem. Najpomembnejša sodobna logika sta Frege in Russell. Utemeljila sta prepozicijsko logiko, logiko, ki z razliko od Aristotelove logike, ne operira s *termini*, temveč s prepozicijami, s *stavki*. Propozicijsko logiko lahko sicer v zametkih zasledimo že v stoiški logiki.
Sodobnejši logični sistemi so po navadi utemeljeni na opustitvi nekaterih aksiomov iz starejših logičnih sistemov ter uvedbi intencionalnosti.

Matematična logika je matematična disciplina, ki proučuje formalne sisteme v povezavi z načinom, kako opišejo intuitivna koncepta dokaza in računanja kot dela temeljev matematike.

Čeprav bi si laik mislil, da je matematična logika logika matematike, je ta v resnici bližje matematiki logike. Sestavljajo jo tisti deli logike, ki jih lahko matematično modeliramo. Nekdaj se je tej disciplini reklo simbolna logika (za razliko od filozofske logike) ali matematika (ta izraz je dandanes omenjen na nekatere poglede teorije dokaza), današnje ime pa je matematični logiki dal Peano.

Primer naloge (ki je bila na 27. šolskem tekmovanju iz znanja logike), kjer moramo za njeno rešitev uporabiti pravila matematične logike. Naloga zahteva veliko logičnega razmišljanja.

- **Vitezi, oprode in normalneži**

  Na Otoku vitezov in oprod imajo otočani naslednji lastnosti: vitezi vedno govorijo resnico, oprode pa vedno lažejo. Poleg tega velja še, da so vsi moški iz iste družine istega tipa.

  Nekega dne star vitez (a še vedno odličen logik) prosi svoja sinova Vita in Vida, naj prihodnji dan vprežeta svoja konja in odjahata do svojega strica na sosednjem posestvu. Zjutraj se sinova prideta opravičit očetu, da z njunim izletom ne bo nič, ker v staji ne najdeta svojih konj – nekdo ju je skril. Oče sumi prijatelja svojih sinov, norčava dvojčka Maka in Žaka, hkrati pa se zaveda, da Vitu in Vidu ideja o izletu sploh ni bila všeč. Odloči se, da bo oba sinova in njuna prijatelja poklical na pogovor.

  > Mak: Če je Žak skril enega konja, potem sem jaz drugega.
  > Žak: Vidovega konja je skril Vito.
  > Vito Vidu: Brat, nisem skril tvojega konja, prisežem.
  > Mak: Vidovega konja je skril nekdo izmed naju z Žakom.

  Oče se ob tem nasmehne, ker mu postane kristalno jasno, kdo je komu ponagajal.
  Kdo je skril Vidovega konja?
  Kdo je skril Vitovega konja?

  Rešitev:
  Kdo je skril Vidovega konja? VID
  Kdo je skril Vitovega konja? ŽAK
  Razlaga:
  Vito in Vid sta viteza, ker je njun oče vitez in ker so vsi moški iz iste družine vedno istega tipa.
  Vitova izjava je torej resnična, Vito ni skril Vidovega konja. Zato je Žakova izjava lažna in je Žak oproda.

Torej je tudi Mak oproda, ker sta z Žakom brata.

Makova druga izjava je laž, zato ne Mak ne Žak nista skrila Vidovega konja. Ker ga tudi Vito ni, ga je torej skril Vid.

Tudi prva Makova izjava je laž, kar pomeni, da je prvi del resničen, drugi pa neresničen. Torej je Žak skril enega konja, Mak pa nobenega.

Ker je Vidovega konja skril Vid sam, je Žak skril Vitovega konja.

(Zveza za tehnično kulturo Slovenije, Naloge, 2012)

Mehka logika je matematična razširitev Boolove logike, ki pozna samo dve stanji (0 in 1) na neskončno število stanj (interval).
Mehko logiko je javnosti leta 1965 prvič predstavil znanstvenik Lofti A. Zadeh.
Mehke množice so razširitev običajnih, ostrih množic. Medtem ko ima lahko pripadnostna funkcija ostre množice zalogo vrednosti {0, 1} (tj. določen element pripada ali ne pripada tej množici), ima pripadnostna funkcija mehke množice (μ_A) zalogo vrednosti znotraj intervala [0, 1]. Torej je lahko določen element v mehki množici vsebovan s pripadnostjo $\in$ [0, 1].
Primer:

Opazujemo skupino ljudi.

Definirajmo množico $A=\{x;\ x \text{ je človek in } x \text{ je mlad}\}$

Torej množica vsebuje vse ljudi, ki so mladi. Če na množico gledamo kot na običajno množico, ji lahko posamezen človek v celoti pripada ali pa v celoti ne pripada. Problem nastopi z definicijo mladosti. Lahko rečemo, da je človek, ki je mlajši od tridesetih let, mlad. Iz tega sledi, da človeka, ki je star trideset let in en mesec, nimamo več za mladega, kar je nesmisel. Medtem ko so pri običajnih množicah prehodi med pripadnostjo in nepripadnostjo ostri, diskretni, so pri mehkih množicah le ti počasni, zvezni. Če gledamo na množico A kot na mehko množico, ji bo človek, ki je star 30 let in en mesec, pripadal z za malenkost manjšo pripadnostjo kot človek, ki je star 29 let in 11 mesecev. Primer pripadnostne funkcije za množico A.

Mehka logika se kot običajna logika ukvarja z izjavami. V običajni logiki so lahko izjave pravilne ali napačne, torej njihova zaloga vrednosti zasede vrednosti 1 in 0. Mehka logika dovoljuje tudi vmesne vrednosti, torej dovoljuje delno pravilnost. Temu rečemo stopnja pravilnosti.

Primer naloge, kjer uporabimo pravila mehke logike, je zgodba o kaznjencu**.**

- Kaznjencu pod vislicami rečejo: »Povej izjavo. Če bo pravilna, boš obešen, če bo nepravilna, boš ustreljen.«
  Kaznjenec pove izjavo: »Ustreljen bom.«

Po premisleku kaznjenca oprostijo, saj se je izkazal kot izvrsten logik.
Niso ga mogli obesiti, saj bi bila njegova izjava tako nepravilna in bi ga morali ustreliti, in niso ga mogli ustreliti, saj bi bila tako njegova izjava pravilna in bi ga morali obesiti. (Wikipedia, Mehka logika, 2011)

7 DRUŽBENA ODGOVORNOST

V najini nalogi se družbena odgovornost kaže v samem reševanju problemov. Kot sva že zapisala, z reševanjem problemov pri matematiki se naučimo strategij reševanja, ki jih lahko uporabimo v vsakdanjem življenju. Tako se tudi naučimo spoprijeti se s problemi in razmisliti o možnih poteh za rešitev. Tehten in temeljit razmislek nas odvrne od prenagljenega ali nepravilnega ukrepanja in tako lahko odgovorno delujemo v odnosu do soljudi, narave in skupnosti.

8 ZAKLJUČEK

V zaključku najine naloge lahko zapiševa, da je bilo raziskovanje o vsebinah naloge prijetno in zanimivo. Oba avtorja sva ob raziskovanju uživala in se naučila veliko novega o reševanju matematičnih problemov, logiki, razvedrilni matematiki.

Ugotovila sva, da problemi potekajo od problemske situacije do oblikovanja problema, spoznala sva Miliaretovo kategorizacijo problemov, ki jih deli na vodene probleme, nevodene probleme in nepopolne probleme, in Frobisherjevo kategorizacijo problemov, ki jih deli na probleme z zaprto potjo in zaprtim ciljem, probleme z odprto potjo in zaprtim ciljem in probleme z odprto potjo in odprtim ciljem.

Nadalje sva spoznala situacije v matematičnem problemu in njihovo reševanje. Nato sva se odpravila na področje razvedrilne matematike, kjer sva izvedela vse o zgodovini logičnih nalog, vse o logiki in med drugim spoznala tudi mehko logiko. Zatem sva opisala še nekaj najbolj znanih matematičnih nalog, kot so Sfingina uganka, uganka Hanojskih stolpov in paradoks lažnivca.

Meniva, da je pomembno, da učenje pri posameznem predmetu ni ozko osredotočeno samo na eno učno vsebino in da snov obravnavamo širše. Meniva, da ravno z matematičnimi problemi preprečimo algoritemsko reševanje nalog.

Tako postane tudi matematična snov zanimiva za nas učence, kar nas bolj motivira za delo in prispeva k boljšemu uspehu. Prav tako se nama zdi pomembno, da je matematika zanimiva za učence, da je prikazana kot del vsakdanjika in da ne predstavlja samo nekega »groznega« predmeta, ki mora čim prej miniti.

Šele ko učenci v matematiki vidijo zanimive in zabavne izzive, lahko strategije reševanja matičnih problemov prenesejo na vsakdanje življenje.

9 LITERATURA

1. Cotič, M. (1999). Matematični problemi v osnovni šoli 1-5: teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. Ljubljana.

2. Danesi, M. (2007). Paradoks lažnivca in hanojski stolpi: deset največjih matematičnih ugank vseh časov. DMFA – založništvo. Ljubljana.

3. Kmetič, S. (2011). Metode reševanja besedilnih in problemskih nalog: Zbirka metod, didaktičnih napotkov in prispevkov učiteljev. Predmetna skupina za matematiko na ZRSŠ.

4. Marentič-Požarnik, B. (2003). Psihologija učenja in pouka. DZS. Ljubljana.

5. Polya, G. (1989). Kako rešujemo matematične probleme. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS. Ljubljana.

6. Ristič, A. (2004). Matematični problemi malo drugače, Matematika v šoli, 11, str. 49.

7. Vršič, V. (2010). Matematični problemi – izziv za učitelje in učence, Razredni pouk: revija Zavoda RS za šolstvo, 11(3), str. 47-51.

8. Učni načrt. Program osnovna šola – matematika. 2011. Ljubljana.

9. Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Naloge - 27. šolsko tekmovanje. (2012). Preneseno februar 2013. http://www.zotks.si/www/portal/dokumenti/38/2/2012/89_naloge_solsko2012_2832.pdf.

10. Wikipedia. Mehka logika. (2011). Preneseno februar 2013. http://sl.wikipedia.org/wiki/Mehka_logika.