Mladi za napredek Maribora 2013
30. srečanje

Od Jurija Vege do Billa Gatesa

Interdisciplinarno področje – MATEMATIKA, RAČUNALNIŠTVO (STROJNA OPREMA, PROGRAMSKA OPREMA, INFORMATIKA)

Raziskovalna naloga

Avtor: JAN KREN

Mentor: KSENIJA BRAĻ IĻ BRAĻ KO, REBEKA RENKO ZVER

Ġola: PRVA GIMNAZIJA MARIBOR

Maribor, februar, 2013

Mladi za napredek Maribora 2013
30. srečanje

Od Jurija Vege do Billa Gatesa
Interdisciplinarno področje – MATEMATIKA, RAČUNALNIŠTVO (STROJNA OPREMA, PROGRAMSKA OPREMA, INFORMATIKA)
Raziskovalna naloga

Maribor, februar, 2013

Kazalo

Kazalo slik

Kazalo tabel

Povzetek

Delo z velikimi števili je v preteklosti ljudem povzročalo preglavice. Le-te so delno zmanjšali z iznajdbo logaritmov. Z njimi se je ukvarjal tudi slavni slovenski matematik Jurij Vega. Znan je po izpopolnitvi točnosti in uporabnosti logaritmov kot računskega pripomočka. Njegovo najpomembnejše delo so logaritmovniki Zakladnica vseh logaritmov, kjer so logaritmi izračunani na 10 desetiških mest. V logaritemskih tablicah so se pojavljale tudi napake, ki so izginile komaj po iznajdbi računalnika. Osnovni namen raziskovalne naloge je predvsem poiskati pomen Vege in logaritmov na svet računalništva in ali so logaritmi dandanes sploh še uporabni ali sodijo na smetišče zgodovine. To sem storil s pregledovanjem pisnih virov ter uporabil tudi metodo primerjave. Moje ugotovitve so, da Jurij Vega ni pomembneje vplival na računalniški razvoj, je pa izjemno izpopolnil računanje logaritmov. Logaritmi so bili pomemben dejavnik za razvoj analitičnega stroja ter posledično računalništva nasploh.

Zahvala

Zahvaljujem se mentoricama za vse spodbude in nasvete pri izdelavi raziskovalne naloge.

Zahvaljujem se tudi lektorici za vse popravljene napake.

1. UVOD

Dandanes si ne znamo več predstavljati zahtevnejših izračunov brez kalkulatorja. Prvi kalkulator za splošno uporabo se je pojavil komaj pred štiridesetimi leti.

Kako so pa včasih računali z izjemno velikimi števili?

Astronomi ter številni drugi so se vsakodnevno srečevali z velikimi števili.

Množenje in deljenje velikih števil je zahtevno, seštevanje in odštevanje le-teh pa ne tako in prav tukaj se pokaže uporabnost **logaritmov**, saj imajo zmožnost, da pretvorijo množenje in deljenje v seštevanje in odštevanje. Vendar so logaritmi izjemno težavni za računanje brez kalkulatorja, zato so včasih bile v uporabi **logaritemske tabele**.

Zanimalo me je, kako so računali logaritme včasih, po kakšni metodi in ali se danes računajo po podobnih postopkih. So danes še sploh uporabni ob kalkulatorjih ali sodijo že v zgodovino? Z logaritmi je računal tudi najslavnejši slovenski matematik Jurij Vega, kmalu po izdaji njegovih logaritmov pa je bil zasnovan tudi analitičen stroj.

Ustvaril sem nekaj **hipotez**:

- **Hipoteza 1**: Logaritemske tabele so bile uporabljene tudi med nematematiki.
- **Hipoteza 2:** Vegov način računanja logaritmov je primeren za računanje logaritmov na vsaj 10 mest natančno.
- **Hipoteza 3:** Vegov način računanja logaritmov je najbolj izpopolnjen način ter lažji od predhodnih.
- **Hipoteza 4:** Prvi računalnik je bil ustvarjen pod vplivom logaritmov.
- **Hipoteza 5:** Prvi računalnik je bil ustvarjen pod vplivom Jurija Vega.
- **Hipoteza 6.** Računalnik računa logaritme na isti način kot je računal Vega.
- **Hipoteza 7:** Čeprav je bil logaritem zamišljen kot računski pripomoček, ki bi poenostavil računanje, se ga lahko danes, ko računanje več ni problem, uporablja na številne načine.
- **Hipoteza 8:** Že Vega je vedel za praktičnost njegovih logaritmov v kriptografiji.
- **Hipoteza 9:** Brez Jurija Vege Bill Gates ne bi bil to, kar je.

Cilj raziskovalne naloge je predvsem ugotoviti pomen logaritmov ter Jurija Vege na tem področju. Čeprav je bil Vega največji slovenski matematik, povprečen Slovenec skoraj ne pozna njega in njegovega dela. Slovencem želim pokazati, da smo lahko tudi mi veliki na nekem področju, vendar samo, če imamo strast do tega.

Predvideval sem, da je Vegov način logaritmov najboljši in da je pomembno vplival na začetno dobo računalništva. Menil sem tudi, da mora biti praktična vrednost logaritmov danes še vedno prisotna, saj sicer načina delovanja tega računskega pripomočka/operacije v šolah ne bi imelo smisla poučevati.

2. METODOLOGIJA DELA

Pri svojem raziskovanju sem uporabil predvsem proučevanje pisnih virov. Proučeval sem stare logaritmovnike ter tudi kasnejše tekste o logaritmih ter pomenu le-teh. Primerjal sem način računanja logaritmov Vegovih predhodnikov ter Vege ter iskal možnosti za napredek.

3. RAZVOJ LOGARITMOV PRED VEGO

3.1 Osnove poenostavitev

Trgovci, bančniki ter predvsem astronomi se že od nekdaj ukvarjajo z izjemno velikimi števili. Množenje teh števil je bilo in še vedno je na pamet veliko težje množiti kot seštevati.

Tako so dolgo časa iskali različne metode s katerimi bi si olajšali delo. Sprva so iskali poenostavitve v trigonometriji. Konec 16. stoletja so iznašli metodo, ki se imenuje **prosthapheresis** in računa vrednosti sinusov in kosinusov. Takrat so že imeli tablice za sinus in kosinus.

Pravilo pravi:

$$\sin\alpha * \sin\beta \ = \frac{1}{2} * (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

Sledove te formule lahko najdemo že v antični Grčiji.

Metoda reševanja pa je sledeča:

1. Naj bosta dani dve pozitivni števili a in b.

2. Delimo ju s potenco števila 10, tako da bomo dobili število med 0.1 in 1.

$X = \frac{a}{10^n}$ tako, da je $0.1 < x \ \leq 1$

$Y = \frac{b}{10^m}$ tako, da je $0.1 < y \ \leq 1$

3. S pomočjo tabel poiščemo ustrezne vrednosti kotov za sinα=x in sinβ=y

4. Kote vstavimo v enačbo

$$\sin\alpha * \sin\beta \ = \frac{1}{2} * (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

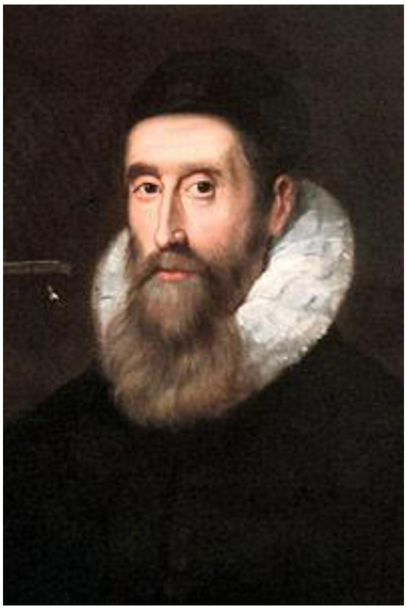
S pomočjo tabel dobimo rezultat.

5. Decimalno vejico premaknemo za toliko mest na desno kot je vsota števil m in n, ki sta bila prej eksponenta.

Dobili smo želen produkt, ki je natančen na toliko mest, kot so bile takrat natančne tablice z vrednostmi kosinus in sinus.

Ta metoda je izboljšala ter pospešila množenje velikih števil.

3.2 John Napier



SLIKA 1 PORTRET JOHNA NAPIERJA

V začetku 17. stoletja sta povsem ločeno drug od drugega in na povsem drugačen način delovala matematika Škot John Napier ter Švicar Jost Bürgi. Napierju je bogastvo svoje družine omogočilo, da je imel veliko hobijev. Poleg matematike se je tako ukvarjal tudi z astronomijo, teologijo in alkimijo. Svojemu očetu je pomagal pri pobiranju davkov ter spoznal, da so potrebne spremembe, saj je množenje in deljenje števil izjemno zamudno delo. Tako se je domislil načina, ki bi spremenil množenje ter deljenje v preprosto seštevanje in odštevanje. Napier je Bürgija pri izdaji svojih tabel prehitel za nekaj let ter izdal tabele, v katerih je tudi obrazložil metodo, ki jo je uporabljal. Delo se je imenovalo **Descriptio**. Logaritmom je dal tudi ime, ki v prevodu v slovenščino pomeni razmerno število. Izhaja iz besede logos (oz. ratio), kar pomeni razmerje, ter arithomos, kar pomeni število.

Najprej bom razložil dva pojma, ki ju bomo potrebovali v nadaljevanju.

Že nekaj stoletij prej so poznali izraza aritmetično ter geometrijsko zaporedje.

Aritmetično zaporedje je matematično zaporedje, pri katerem je razlika dveh zaporednih členov zaporedja vedno enaka – konstantna.

Npr. 4, 16, 28, 40, 52, 64.

Razlika je 12.

Geometrijsko zaporedje pa je matematično zaporedje, pri katerem pa je količnik dveh zaporednih členov vedno enak.

1/8 , ¼, ½, 1, 2, 4, 8, 16

Količnik je 2.

Pri Napierju se pojavi, da je za pripadajoče naraščajoče aritmetično zaporedje, geometrijsko zaporedje padajoče.

Kako se je Napier lotil računanja?

Splošni člen geometrijskega zaporedja pa bi lahko izrazili takole:

Geometrijsko zaporedje:

$$y_n = 10^7 * (1 - \frac{1}{10^7})^n$$

Napier se je posvetil predvsem temu. Poskusimo ga preoblikovati tako, da ga bomo lahko uporabili za splošno rabo.

$$y_n = 10^7 * (1 - \frac{1}{10^7})^n$$

Najprej logaritmiramo obe strani.

$$\log y_n = \log(10^7 * \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$$

Uporabimo pravila za logaritme.

$$\log y_n = \log 10^7 + n * \log(1 - \frac{1}{10^7})$$

Osamimo spremenljivko n.

$$\log y_n - 7 * \log 10 = n * \log\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$$

$$\frac{\log y_n - 7 * \log 10}{\log\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)} = n$$

Vemo, da je $1 - \frac{1}{10^7} = 0.9999999$ ter, da je $7 * \log 10 = 7$.

Tako dobimo funkcijo z enačbo:

$n(y_n) = \frac{\log y_n - 7}{\log(0.9999999)}$ oziroma $Nap(y_n) = \frac{\log y_n - 7}{\log(0.9999999)}$

$Nap(y_n)$ poimenujmo Napierjev logaritem.

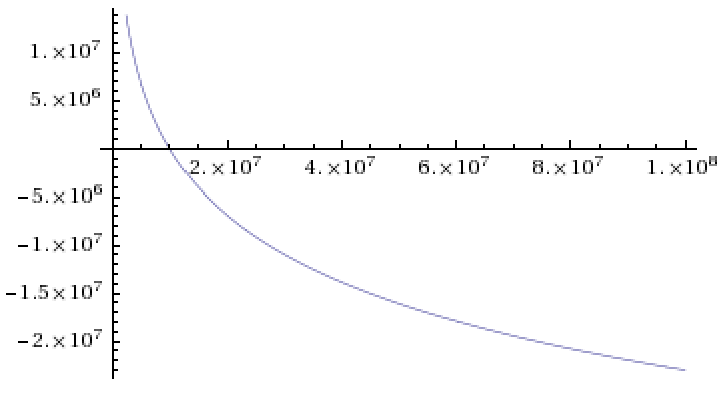
Kot rezultat dobimo naravni logaritem nekega števila. Poskusimo izračunati logaritem nekega poljubnega števila. Število, katerega logaritem želimo izračunati, je pomnožen z 10^7. Ker je Napier izbral količnik geometrijskega manjši od 1, dobimo pravo vrednost, vendar nasprotnega predznaka.

$$Nap(5 * 10^7) = \frac{\log(5 * 10^7) - 7}{\log(0.9999999)} = -16094378.32$$

Za naravni logaritem 5 nato vrednost pomnožimo z 10^{-7}.

Dejanska vrednost $\ln 5 = 1.609437912$.

Napaka se pojavi na osmem mestu.



SLIKA 2 GRAF NAPIERJEVIH LOGARITMOV

»Napier je svoje logaritme oblikoval tako, da je izračunal logaritme vrednosti kotnih funkcij od 90° do 30°.Osnova logaritmov se približuje vrednosti 1/e, vendar je nesmiselno govoriti o osnovi, saj je izraz y = $\log_a x$ $a^y = x$ prvi uporabil komaj Euler v 18. stoletju. Po Napierovi smrti je izšel dodatek v katerem so bili izračunani logaritmi tudi z osnovo e, vendar avtor verjetno ni Napier.

Razlikovala so se tudi znana štiri pravila logaritmiranja, kajti log1 še ni bil 0, to sta z Briggsom ugotovila komaj nekaj let kasneje.«(Tiegl, 2004, str. 106)

Pravila so bila:

$$\log r * s = \log r + \log s - \log 1$$

$$\log \frac{r}{s} = \log r - \log s - \log 1$$

$$\log r^n = n * \log r - (n-1) \log 1$$

$$\log \sqrt[n]{r} = \frac{1}{n} \log r + (1 - \frac{1}{n}) \log 1$$

Logaritmi so bili izjemno dobro sprejeti, sploh pri astronomih. V naslednjih nekaj desetletjih je nastalo ogromno različnih logaritemskih tabel.

3.2.1 Slabosti Napierjeve metode

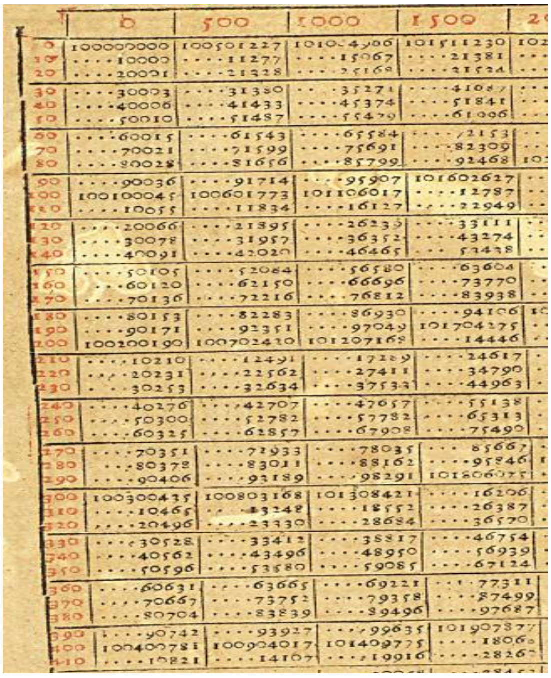
Če pogledamo iz današnje perspektive je problem Napierjeve metode predvsem osnova. Prav tako še Napier do izdaje svojega dela ni odkril pravila $\log_a 1 = 0$. Do te zamisli sta prišla kasneje z Briggsom. Ker si je Napier količnik geometrijskega zaporedja izbral manjši od 1, dobimo tudi negativne vrednosti. Absolutna vrednost sicer je pravilna, toda vseeno ne deluje preveč dobro. Napaka se pojavi na osmem mestu, ker si je zbral količnik geometrijskega zaporedja $1 - 10^{-7}$. Praktično je Napier žrtvoval 20 let svojega življenja za izum logaritmov in svoje tablice.

Lahko pa rečemo, da je Napier svojo idejo spravil v tok, tako da so si s to metodo pomagali številni matematiki ter tudi nematematiki še dolgih 350 let za tem.

3.3 Jost Bürgi

SLIKA 3 PORTRET JOSTA BÜRGIJA

V celinskem delu Evrope pa je brez vpliva Napierja logaritme zasnoval logaritme Jost Bürgi. Bürgi je bil astronom in se je veliko ukvarjal z računanjem. Tudi on je idejo dobil po geometrijskem in aritmetičnem zaporedju. V bistvu je Bürgi odkril povezavo pred Napierjem, vendar svoje logaritemske tablice dalj časa ni objavil. Njegove tablice so bile sestavljene iz takoimenovanih rdečih ter črnih števil. Rdeča števila si sledijo po aritmetičnem zaporedju, črna števila pa po geometrijskem.



SLIKA 4 ODSEK IZ BÜRGIJEVIH TABEL - RDEČA IN ČRNA ŠTEVILA

Poglejmo si člen obeh zaporedij.

Aritmetično zaporedje

$$x_n = 10 * n$$

Geometrijsko zaporedje

$$y_n = y_{n-1} * (1{,}0001)$$

Geometrijsko zaporedje lahko izračunamo s to formulo le, če poznamo vrednost prejšnjega. Kako pa bi lahko iz tega dobili bolj splošno formulo? Bürgi je svoje tablice oblikoval tako, da je začel geometrijsko zaporedje z vrednostjo 10^8.

In tako sedaj dobimo:

$$y_n = 10^8 * (1.0001)^n$$

Iz aritmetičnega zaporedja vemo, da je $n = \frac{x_n}{10}$.

Ker smo uvedli to substitucijo, dobimo sedaj funkcijo, ki je odvisna od spremenljivke x:

$$y(x) = 10^8 * (1.0001)^{\frac{x_n}{10}}$$

Uvedemo še eno substitucijo. $b = (1.0001)^{\frac{1}{10}}$

Dobimo:

$$y(x) = 10^8 b^x$$

To je splošni člen tega zaporedja. Takrat, kot sem že omenil, še niso vedeli za pravilo:

$$\log_a x = y => \ a^y = x$$

Bürgi še ni uporabljal izraz za logaritem. Ampak poglejmo, kako bi se to, z vsemi pravili, ki jih poznamo, videlo danes.

Če bi imeli Bürgijevi logaritmi osnovo, bi bila ta b. Zato logaritmiramo zgornjo enačbo z logaritmom z osnovo b.

$$\log_b(y(x)) = \log_b 10^8 + \log_b b^x$$

Iz tega sledi:

$$\log_b(y(x)) = \log_b 10^8 + x$$

Izpostavimo x:

$$x = \log_b\bigl(y(x)\bigr) - \log_b 10^8$$

Spremenimo osnovo na 10, da dobimo osnovo, ki je v danes uporabnejša:

$$x = \frac{\log y(x)}{\log b} - \frac{\log 10^8}{\log b} = \frac{\log(y(x)) - \log 10^8}{\log 1.00001}$$

Za boljšo preglednost zamenjajmo oznake spremenljivk

$$r(x) = \frac{(\log x - \log 10^8)}{\log b} = \frac{\log \frac{x}{10^8}}{\log 1.00001}$$

Poskusimo sedaj izračunati vrednost naravnega logaritma števila 7 po zgornji formuli. Tudi tukaj mora biti vrednost pomnožena z 10^8.

$$r(7 * 10^8) = \frac{\log(7 * 10^8) - \log 10^8}{\log 1.00001} = 194591.9879$$

Dejanska vrednost logaritma števila 7:

$$\ln 7 = 1.945910149$$

Napaka se pojavi na sedmem mestu. Torej sorazmerno velika napaka.

3.3.1 Slabosti Bürgijeve metode

To je še ena metoda, ki je čisto začetna in je bila praktično izgubljena v uporabi že kmalu za tem. Problem je, ker ta osnova kasneje ni pomenila nič. Količnik geometrijskega zaporedja je tudi sorazmerno visok, zato ne dobimo natančnega rezultata, tudi če enačbo preoblikujemo za današnje namene. Dobimo pa, nasprotno kot pri Napierju, pozitivne vrednosti, kar je zagotovo pozitivna stran enačbe. Tako kot pri Napierju so vrednosti izjemno visoke, saj takrat niso uporabljali decimalnih vejic.

Čeprav je bil Bürgi pravzaprav prvi, ki je odkril pozitivne lastnosti logaritmov, so bile njegove tablice, tako kot Napierjeve, bolj ali manj neuporabne v primerjavi z ostalimi.

3.4 Henrik Briggs

Napier je bil začetnik logaritmov, njihov izumitelj, vendar so bili logaritmi Henrika Briggsa nekaj let kasneje tako dodelani, da Napierjevih tablic ni več nihče uporabljal. Briggs je bil profesor matematike v Cambridgu in Oxfordu. Bil je Napierjev sodobnik in skupaj sta preobrazila logaritme z idejo, da naj bo $\log 10 = +1$. Tako se računanje logaritmov z osnovo 10 izjemno poenostavi in ravno zato se njegovi logaritmi tako uveljavijo. Posvetiti se mora namreč le računanju praštevil, saj ostala števila dobi s preprostim seštevanjem, ker vemo, da je $\log ab = \log a + \log b$. Leta 1624 Briggs izda tablice izračunane na 14 mest natančno.

Kako pa je računal praštevila:

Določiti želimo vrednost log 5 = ?

Briggs se je lotil dela tako, da je določil geometrijsko sredino dveh logaritmov, katerih vrednost poznamo.

$$\log \sqrt{a * b} = \frac{1}{2} * (\log a * \log b)$$

Število 5 leži med 1 in 10. Ker vemo, da je $\log 10 = +1$ in $\log 1 = 0$ velja:

$$\log 3.16 = \log \sqrt{1 * 10} = \frac{1}{2} * (\log 1 * \log 10) = 0.500$$

Število 5 leži med številoma 3.16 in 10, zato izračunamo geometrijsko vrednost teh dveh števil in določimo njen logaritem:

$$\log 5.62 = \log\sqrt{3.16 * 10} \;= \frac{1}{2} * (\log 3.16 * \log 10) = \; 0.750$$

in tako nadaljujemo:

$$\log 4.21 = \log\sqrt{3.16 * 5.62} \;= \frac{1}{2} * (\log 3.16 * \log 5.62) = \; 0.625$$

$$\log 4.86 = \log\sqrt{4.21 * 5.62} \;= \frac{1}{2} * (\log 4.21 * \log 5.62) = \; 0.6875$$

$$\log 5.22 = \log\sqrt{4.86 * 5.62} \;= \frac{1}{2} * (\log 4.86 * \log 5.62) = \; 0.71875$$

$$\log 5.04 = \log\sqrt{4.86 * 5.22} \;= \frac{1}{2} * (\log 4.86 * \log 5.22) = 0.703125$$

$$\log 4.95 = \log\sqrt{4.86 * 5.04} \;= \frac{1}{2} * (\log 4.86 * \log 5.04) = 0.6953125$$

$$\log 4.99 = \log\sqrt{4.95 * 5.04} \;= \frac{1}{2} * (\log 4.95 * \log 5.04) = 0.6992$$

$$\log 5.01 = \log\sqrt{4.99 * 5.04} \;= \frac{1}{2} * (\log 4.99 * \log 5.04) = 0.7011625$$

$$\log 5.00 = \log\sqrt{4.99 * 5.01} \;= \frac{1}{2} * (\log 4.99 * \log 5.01) = 0.700$$

Takrat so obstajale tudi tablice z izračunanimi koreni različnih števil. Zato je bil ta način možen, v nasprotnem primeru bi bilo računanje korenov brez kalkulatorja preveč zamudno.

Na primeru vam bom pokazal kako so računali korene takrat.

3.4.1 Računanje kvadratnih korenov brez kalkulatorja

Izračunajmo $\sqrt{5}$ na 3 decimalke.

1. Korak:

Najprej poiščemo najbližje celo število, katerega kvadrat je manjši kot 5 torej 2. Dvojko zapišemo k rezultatu ter dodamo decimalno vejico.. Odštejemo 4 od 5, dobimo 1. To bomo potrebovali pri naslednjem koraku.

```
   5
-  4
=  1
```

torej: $\sqrt{5} = 2.$

2. Korak

Ostanku 1 dodamo 00 (vedno dvojne 00, saj gre za kvadratni koren). Sedaj podvojimo izračunano število od prej - 2 (torej 4) in iščemo enako enomestno vrednost, da pomnožimo $(4\quad) * (\quad)$ (prazni mesti morata biti enaki), da bo zmnožek manjši od 100. To število je 2, ki ga dodamo za decimalno vejico. Odštejemo 84 od ostanka 100

$5 - 4 = 1$, rezultatu dodamo dvojne ničle.

$$(4\quad) * (\quad) \leq 100$$

$$42 * 2 = 84$$

$$100 - 84 = 16$$

```
   5
-  4
=  100
-   84
=   16
```

$$42 * 2 = 84$$

$$\sqrt{5} = 2.2$$

3. Korak

Ostanku spet dodamo 00, da dobimo 1600. Sedaj ponovno podvojimo rezultat 2.2, da dobimo 44(brez decimalne vejice) in iščemo enomestno vrednost, da bo 44_ x _ manj kot 1600. To je 3, ki jo dodamo k rezultatu 2.2. Odštejemo od ostanka 1600.

$$(44\quad)*(\quad)\leq 1600$$

$$\sqrt{5}=2.23$$

5
- 4
= 100 $42*2=84$
- 84
= 1600 $(44\quad)*(\quad)\leq 1600$
- 1329 $443*3=1329$
= 271

4. Korak

Postopek ponovimo. Podvojimo 2.23 => 446 in iščemo enomestno vrednost,…

5
- 4
= 100 $42*2\ =\ 84$
- 84
= 1600 $443*3=1329$
- 1329
= 27100

$$(446\quad)*(\quad)\leq 27100$$
$$4466*6=26796$$

- 26796
= 304

Torej rezultat je 2.236. S postopkom lahko nadaljujemo.

3.4.2. Slabost Briggsove metode

Briggs je izdal tablice, ki so jih uporabljali zelo dolgo – še v 20. stoletju so nekateri uporabljali njegove tablice. Če pogledamo iz vidika natančnosti je bila njegova metoda zelo slaba. Potrebujemo veliko izračunov in tako na koncu dobimo točne vrednost le na 4 do 5 decimalk, če ne uporabimo dovolj natančnih korenov. Prav tako je bilo računanje izjemno zamudno, saj smo naredili okrog 8 korakov samo za izračun desetiškega logaritma 5. So pa njegovi logaritmovniki prinesli novo idejo. Uporabil je osnovo 10, določil je majhna pravila kot na primer $\log 1=0$. Briggs je bil profesor matematike na Cambridgu in temu velja pripisati izjemni natančnosti njegovih logaritmov.. Dejstvo je, da je uporabnost odvisna od tega, kdo bo uporabljal te logaritme. Inženir potrebuje natančnost na 4 do 5 mest, astronom že na nekaj več, medtem ko matematik išče čim večjo popolnost. Nekaterim matematikom tako ne bo dovolj niti natančnost na 30 mest. Kot primer bi dal tudi koren števila dva. Inženir bi bil popolnoma zadovoljen z vrednostjo 1.414213562, medtem ko matematik samo z $\sqrt[2]{2}$.

SLIKA 5 KNJIŽICA ALOJZIJA SODNIKA

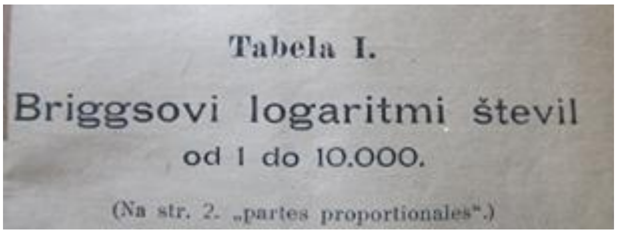


Tabela I.

Briggsovi logaritmi števil
od 1 do 10.000.

(Na str. 2. „partes proportionales".)

SLIKA 6 BRIGGSOVE TABELE SO BILE V SLOVENIJI V UPORABI ŠE V 20. STOLETJU

V knjižnici Alojzija Sodnika iz leta 1923 so bile uporabljene tabele Briggsovih logaritmov. V njej je avtor še podrobno razložil metodo računanja logaritmov.

3.4.3. Primer uporabe Briggsove knjižice

Briggs je prvi uporabil logaritme z osnovo 10. To daje njegovim tabelam izjemno preprostost v uporabi. Vsak logaritem lahko ponazorimo s karateristiko in mantiso. Karateristika je cel del logaritemske vrednosti, medtem ko je mantisa decimalni del. Karateristika se da ugotoviti že iz števil danih števil.

Primer:

$$\log 5621 = 3.\boldsymbol{mantisa}$$

Kako sem to vedel? Preprosto, preštel sem število mest, ki jo ima število ter odštel eno. Vemo, da je:

$$\log 10 = 1$$
$$\log 100 = 2$$
$$\log 1000 = 3$$

Torej ugotovimo, da je karakteristika ($karateristika = število\ mest - 1$). Seveda velja to le do decimalne vejice.

Tablice so tudi mnogokrat vsebovale funkcije sinus in kosinus, za katere pa vemo, da so vrednosti manjše od 1.

Vemo, da je:

$$\log 1 = 0$$

Če so vrednosti manjše od 1 pomeni, da so logaritmi teh funkcij negativni. Kako pa tam prepoznamo karateristiko? Glede na število ničel za decimalno vejico. Če ni nobene ničle za decimalno vejico lahko sklepamo, da bo karateristika -0.mantisa, če bo ena ničla pomeni, da bo logaritem -1.mantisa, in tako dalje. Karatersitika se torej da izračunati že z nekaj logičnega razmišljanja.

Zanimiva pa je še ena lastnost.

Kaj imajo skupnega logaritmi števil 0.2, 2, 20, 200…?

Poglejmo si izračunane vrednosti:

$$\log 0.2 = -0.69897$$
$$\log 2 = 0.3010299$$
$$\log 20 = 1.3010299$$
$$\log 200 = 2.3010299$$

Kaj smo opazili? Da se mantisa ohranja in če bolje pogledamo vidimo, da je mantisa logaritma 0.2, ki edina odstopa v bistvu par ostalim. To pomeni, da:

$$mantisa\ 0.2 + mantisa\ 2 = 1$$

To je le nekaj zanimivih in uporabnih lastnostih desetiških logaritmov.

3. Naravni logaritmi

Če bi imeli Napierjevi logaritmi osnovo, bi bila le-ta število e oziroma 1/e. Se pa pojavlja vprašanje, zakaj sploh število e. Kaj je na tem število posebnega, da je tako množično uporabljeno? Preprost odgovor je, da je e število, ki je zelo tesno povezano s fizičnim svetom, tako kot npr. število pi ali fi. Vemo, da je e iracionalno število, katerega približna vrednost je:
e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699995.

Kakšne pa so povezave s fizičnim svetom?

1. Newtonov zakon ohlajanja

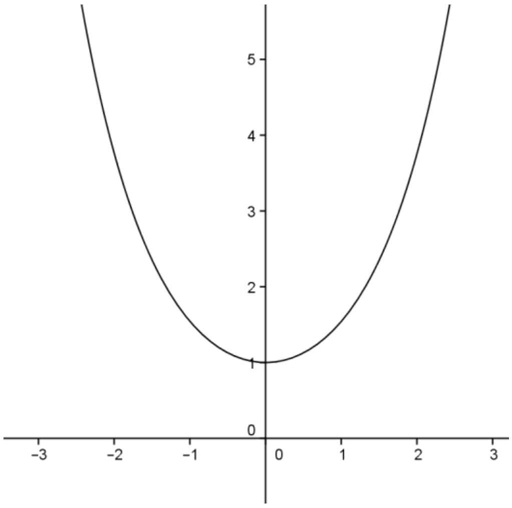
$$T(t) = Tm + (Ti - Tm) * e^{\cdot kt}$$

Ta zakon govori o tem, kako se spremeni temperatura nekega objekta, če ga postavimo v drugo okolje. Kot opazimo je v enačbi prisotno število e.

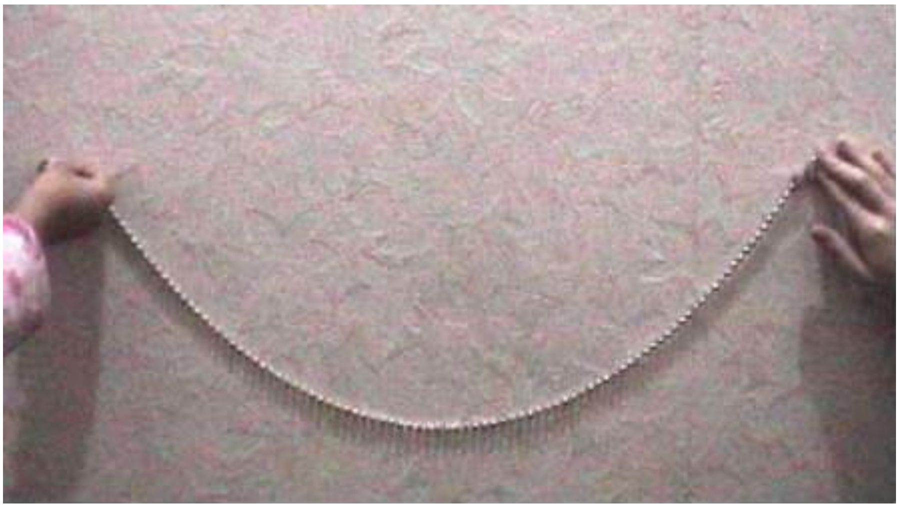
2. Verižnica

$$y = (e^x + e^{-x})\frac{1}{2}$$

Formula predstavlja parabolo, ki jo zavzame nit oziroma vrv, ko je pritrjena na dva nosilca. Kot vidimo bi lahko rekli, da je število e zapisano v vesolju.



SLIKA 7 PARABOLA, KI JO ZAVZAME VRV



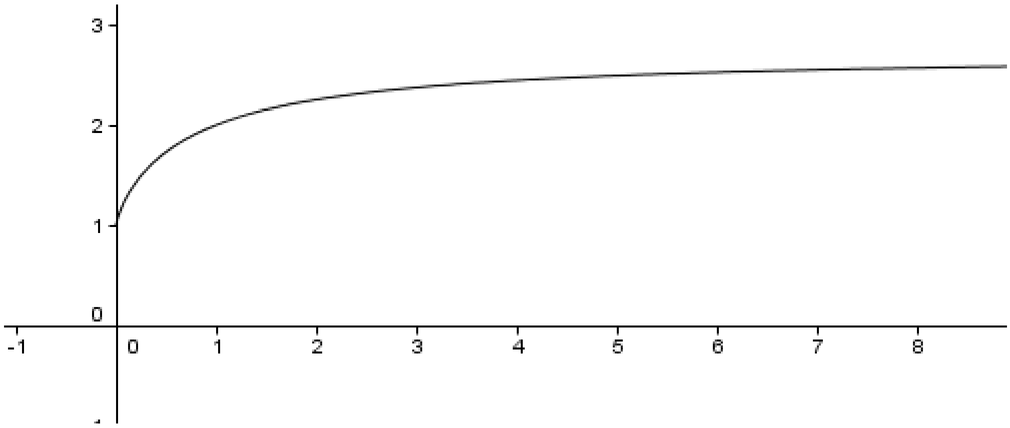
SLIKA 8 OBLIKA, KI JO ZASEDE VRV

To sta dva izmed številnih zanimivih primerov iz fizičnega sveta. Matematiki pa so število e izračunali s pomočjo osnove, ki jo je uporabljal eden izmed začetnikov logaritmov Jost Bürgi. Ta je svojo »osnovo definiral kot »$osnova = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^4$«. Matematik Leonhard Euler pa to formulo posplošil.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Limita pomeni, da se približuje neka funkcija v neskončnosti neki končni vrednosti.

Graf funkcije f(x) = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ je naslednje oblike:



Slika 9 Graf funkcije (1+1/x)^x

Opazimo, da se graf približuje vrednosti 3. V neskončnosti bi zavzel vrednost e=2.71828182846…

Število e je možno izračunati na mnogo načinov. En izmed njih še je:

$$e = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \dots$$

Pri tem je $n! = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 2 * 1$ in beremo »n fakulteta«. Na primer: $5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120.$

Naravne logaritme z osnovo e uporabljamo bolj pogosto, saj ima eksponentne funkcije e^{x} ugodne lastnosti tudi pri odvajanju in integriranju.

5. JURIJ VEGA

SLIKA 10 BARON JURIJ VEGA

5.1 Življenje Jurija Vege

5.1.1 Otroštvo

Jurij Vega (Veha) se je rodil v Zagorici pri Dolskem, takrat Kranjska, zdaj Slovenija. Rodil se je v kmečki družini, vendar sta ga starša skozi njegovo intelektualno pot izjemno podpirala. Imel je tri sestre, Marijo, Jero ter Polono. Osnovno znanje si je pridobil pri lokalnem duhovniku v Moravčah, nato pa je odšel v Ljubljano. Tam je obiskoval jezuitsko šolo, vendar mu ni bilo postlano z rožicami. Starša mu nista zmogla pomagati in tako se je predvsem kasneje preživljal z inštrukcijami. Na liceju je imel dober odnos s svojim učiteljem matematike Jožefom Maffeijem, ki je imel izredno očetovski odnos do njega. Maffeijevo pomoč pa je Vega znal zelo ceniti in ga tudi, ko je postal znan, ni pozabil.

5.1.2 Službovanje

Njegova prva služba je bila v Ljubljani, kjer je delal kot cesarsko kraljevi navigacijski inženir, a je kmalu ugotovil, da tukaj ne bo mogel pokazati vseh svojih talentov. Tako je opravil sprejemni izpit in postal topničar v avstrijski vojski. Do tedaj se je Vega pisal Veha, vendar se je zaradi negativnega prizvoka, priimek odločil spremeniti. Zaposlil se je kot profesor matematike v topničarski šoli ter poskušal z matematičnimi izračuni posodobiti avstrijsko vojsko. Leta 1789 se je udeležil bitke pri Beogradu. Dobil je poveljstvo nad možnarskimi oddelki. Svoje izračune naj bi preverjal tako, da je hodil od topa do topa in dajal vejice pod topove, da bi le-ti imeli pravilno naklonino. Topovi naj bi začeli zadevati z neverjetno natančnostjo in Turki so se že po dveh dneh predali. V naslednjih nekaj letih se je boril v kar nekaj bitkah in zaradi neverjetne sposobnosti se mu je vztrajno višal tudi čin. Dobil je nalogo, da modernizira cesarsko topništvo. Načrtovanja se je lotil po pravilih matematike in rezultati so bili hitri. Doseg topov se je povečal iz približno 515 metrov na okrog 935 metrov, kar je dalo avstrijski vojski izjemno prednost v bitkah.

5.1.3. Baronski naziv, delo ter smrt

Zaradi svojih znanstvenih in predvsem vojaških dosežkov je bil leta 1796 povišan v viteški stan, kar je odmevalo tudi v Sloveniji. Leta 1800 ga je cesar Franc Jožef I povišal v barona. Vega se je zavedel, da se bitke kaj hitro pozabijo, zato ni deloval le na tem področju. V svojem življenju je izdal nekaj učbenikov, izračunal število π na 140 decimalk (od katerih je bilo prvih 126 pravilnih), najbolj pa je verjetno cenjen zaradi njegovega dela v svetu logaritmov. Izdal je tri logaritmovnike, v katerih je tudi poenostavil njihovo računanje. Morda je prav zato, ker je dosegel preveč, leta 1802 svoje uspehe plačal z življenjem. Njegova smrt je še vedno nepojasnjena, veliko zgodovinarjev je mnenja, da je šlo za umor.

5.1.4. Spoštovan doma in po svetu

Vega je bil eden izmed najboljših matematikov svojega časa. Njegovi logaritmovniki so bili v uporabi še vrsto let po njegovi smrti in danes velja kot naš najboljši matematik..

Tako je bil upodobljen tudi na naši nekdanji denarni valuti tolar:

Slika 11 Bankovec za 50 SIT

Po njem so poimenovali tudi priznanja za najboljše slovenske mlade matematike, torej priznanja za tekmovanje Evropski matematični kenguru ter kasnejša regijska in državna tekmovanja. Po njem je poimenovan tudi krater na luni.

5.2 Vegovo delo na različnih področjih

5.2.1. Število π

Vega pa ni bil pomemben le za razvoj logaritmov, ampak je deloval tudi na ostalih področjih v matematiki ter fiziki. Kot sem že omenil je na nek način pomembno vplival na razvoj avstrijske vojske, saj so topovi z njegovo pomočjo postali natančnejši.

Število π je računalo že ogromno matematikov, nekateri bolj, nekateri manj uspešno. Veliko ljudem zadostuje približek 22/7 ali pa celo 3.14. Ta približka sta več kot dovolj za večino izračunov, vendar to nikoli ni bilo dovolj za matematike. Vega je bil eden izmed njih in tako je leta 1789 izračunal število π na 140 mest natančno. To stori s formulo:

$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$, kjer arctan predstavlja inverzno funkcijo k funkciji tangens.

Čeprav kasneje pride do formule, ki konvergira do pravilnih decimalk še hitreje kot ta enačba pa je Vega svoj »svetovni rekord« odkril s formulo, ki sem jo omenil zgoraj.

Formula, ki je še popolnejša pa je odkril že Euler 35 let pred njim in se glasi:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan\frac{1}{7} + 2 \arctan\frac{3}{79}$$

Kasneje pa objavi še popolnejšo formulo, ki pa je najmanj dvakrat tako zahtevna kot prejšnja:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan\frac{1}{13} + 5 \arctan\frac{1}{21} + 2 \arctan\frac{1}{31} + 2 \arctan\frac{1}{43} + 3 \arctan\frac{1}{57}$$

Zakaj je Vega to počel? Vega je le bil zaposlen v avstrijski vojski. 140 decimalk števila π ne prinese nič pomembnega. Že s petnajstimi decimalkami se da zračunati razdaljo med Zemljo in Soncem na milimeter natančno. Torej, kje je bil motiv za to? Mnogi menijo, da je Vega šel v te izračune, da bi logaritmi, ki jih je objavil čez nekaj let, imeli večjo težo. Če zna človek izračunati število π na 140 mest natančno, bo definitivno zmogel tudi logaritme na 10 mest. Verjetno so bili tudi zaradi tega njegovi logaritmi kasneje tako spoštovani ter uporabljani. Je pa Vega držal tudi rekord v številu π še nadaljnih 50 let, torej vrsto let po njegovi smrti.

5.2.2 Praštevila

Vega se je ukvarjal tudi s praštevili. V drugi izdaji Logaritemsko-trigonometričnih tabel je izdal tudi števila od 102001 pa vse do 400031. Vseh praštevil na tem odseku je 24096, Vega je v svojem delu navedel prav toliko števil, vendar se je kmalu izkazalo, da so bila nekatera napačna. Pred računalniško dobo pa so to bile vseeno ene izmed najboljših tabel. Praštevila pa, kot vemo, so zelo pomembna tudi dandanes za kriptografijo. Zanimivo pa je, da je Gauss kasneje z uporabo ravno Vegovih tabel iznašel praštevilski izrek.

5.3 Vegova dela na področju logaritmov

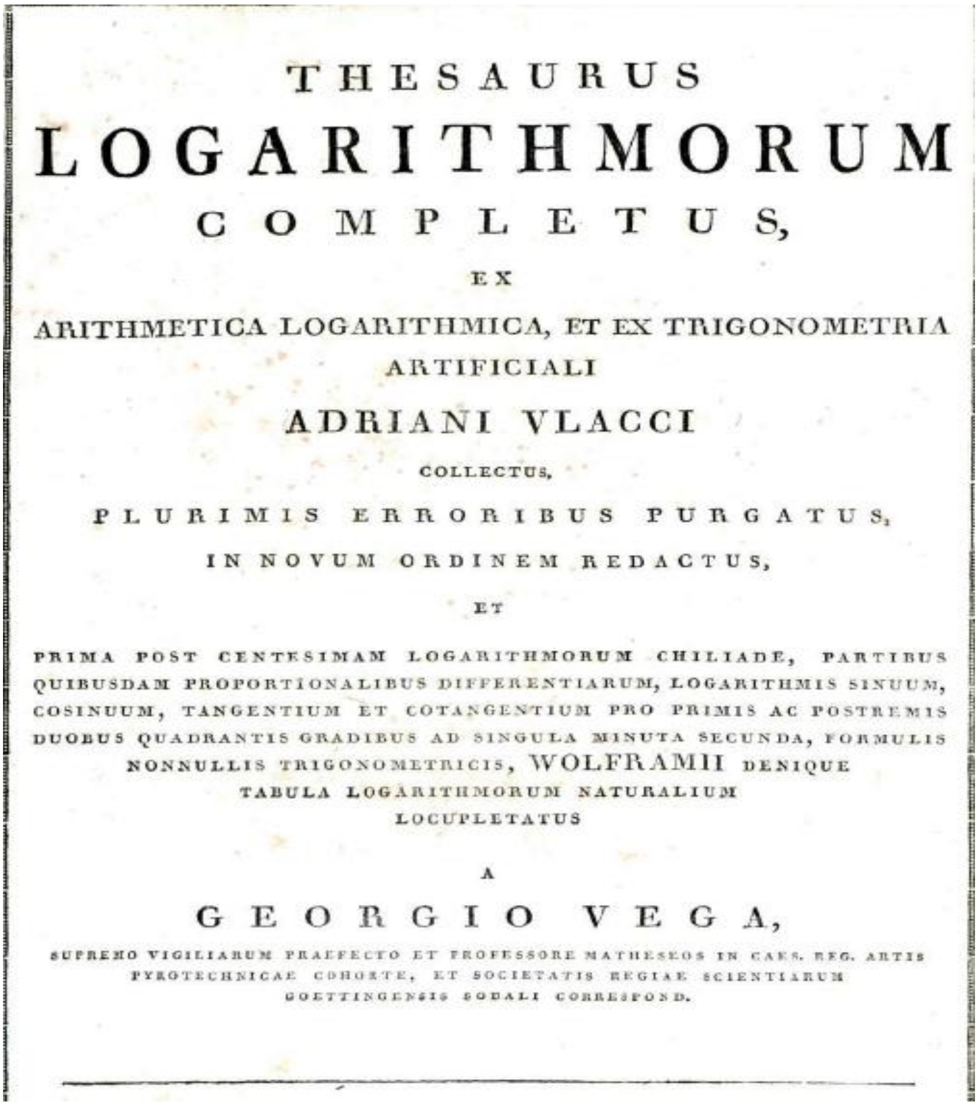
Vega je v svojem življenju izdal številna dela. Za marsikoga so bila najpomembnejša dela na področju logaritmov. Prvo te vrste je izdal leta 1783 z naslovom Logaritemske, trigonometrijske in druge, za uporabo matematike pripravljene tabele in formule. Za svoje delo je uporabil številne logaritemske tablice ostalih matematikov. Na primer Schulzeja, Gardinerja, Vlacka ter Sherwina. Pri primerjavi s Sherwinovimi tabelami je odkril v svojih logaritemskih tablicah štiri napake, medtem ko v Sherwinovih tablicah kar 75. Tukaj se je videla natančnost Vege. Vega je obljubil tudi denarno nagrado vsakemu, ki bo odkril napako v njegovih tablicah.

Pred izdajo svojega najslavnejšega zbornika je še leto poprej izdal Logaritemsko-trigonometrijski priročnik v katerem je napovedal veliko zbirko tabel.

Leta 1794 je v Leipzigu tako izdal verjetno svoje najboljšo delo na tem področju. Popolna zbirka večjih logaritemsko- trigonometrijskih tabel je bila uporabljena še vrsto let po njegovi smrti, kar je kazalo na popolnost v njegovem delu. Matematik Kluegel je v svojem delu kasneje zapisal, da bi moralo biti delo imenovano Zakladnica vseh logaritmov. Logaritmi so bili izračunani na 10 desetiških mest natančno in so služili za osnovo tudi številnim slavnim matematikom, kot je na primer Gauss. Napake so se sicer še vedno pojavljale, vendar izjemno redko. Za osnovo temu delu sta bili deli Adriana Vlacka na tem področju. Logaritmi so bili sicer večkrat pregledani s strani njegovih tovarišev v topničarskem korpusu. Je pa bilo to delo sorazmerno poceni in to je tudi vzrok za njegovo razširjenost. Prevedeno je bilo v številne jezike.

Logaritemsko-trigonometrijske tabele poleg drugih, za matematiko uporabnih tabel in formul, je bilo izdano leta 1797. Glavni razlog za izdajo teh tabel pa je bil, da so bile prejšnje že bolj ali manj razprodane. Delo je bilo izdano v treh delih in sicer razdeljeno glede na namen. Prvo delo je bilo primerno za učence matematike, drugo za izobražene v matematiki in tretjo za profesorje, astronome in druge vešče v matematiki. V njih je popravil vse znane napake ter jih izdal v obliki, ki so bili karseda priročni za bralca.

Leta 1800 pa je izdal svoje zadnje delo te vrste. Logaritemsko-trigonometrijski priročnik je posvetil svojemu profesorju matematike na liceju. V posvetilu je pokazal izjemno spoštovanje do profesorja Maffeija in se mu iskreno zahvalil, da ga je vodil v svet matematike.

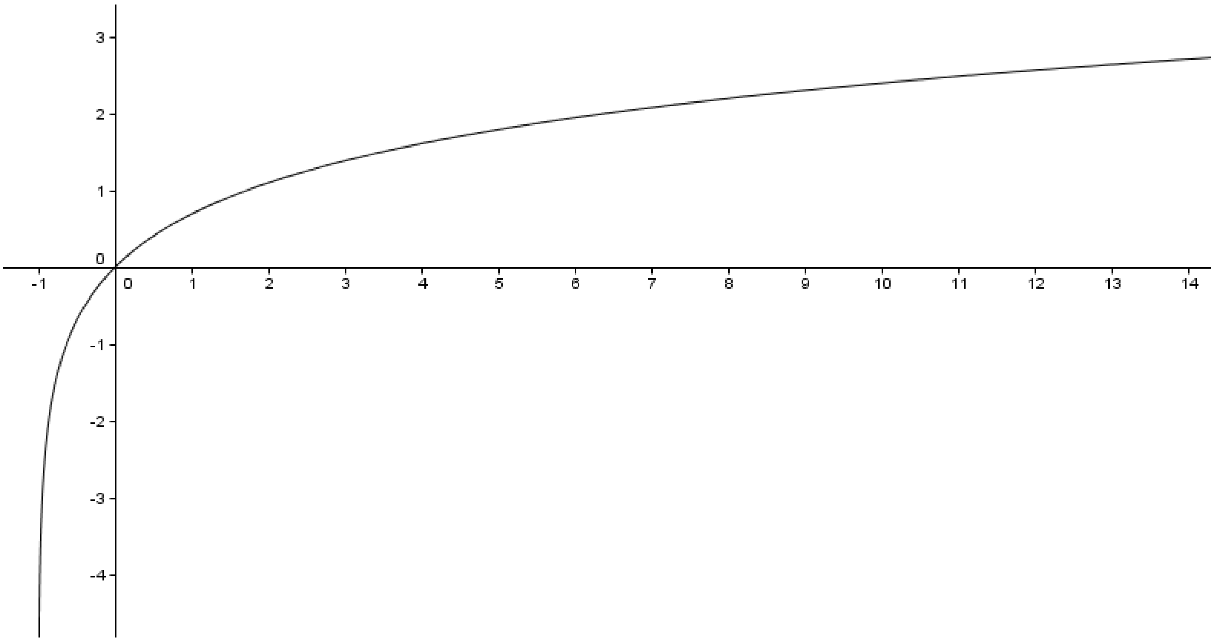

THESAURUS
LOGARITHMORUM
COMPLETUS,
EX
ARITHMETICA LOGARITHMICA, ET EX TRIGONOMETRIA
ARTIFICIALI
ADRIANI VLACCI
COLLECTUS,
PLURIMIS ERRORIBUS PURGATUS,
IN NOVUM ORDINEM REDACTUS,
ET
PRIMA POST CENTESIMAM LOGARITHMORUM CHILIADE, PARTIBUS QUIBUSDAM PROPORTIONALIBUS DIFFERENTIARUM, LOGARITHMIS SINUUM, COSINUUM, TANGENTIUM ET COTANGENTIUM PRO PRIMIS AC POSTREMIS DUOBUS QUADRANTIS GRADIBUS AD SINGULA MINUTA SECUNDA, FORMULIS NONNULLIS TRIGONOMETRICIS, WOLFRAMII DENIQUE TABULA LOGARITHMORUM NATURALIUM LOCUPLETATUS
A
GEORGIO VEGA,
SUPREMO VIGILIARUM PRAEFECTO ET PROFESSORE MATHESEOS IN CAES. REG. ARTIS PYROTECHNICAE COHORTE, ET SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARUM GOETTINGENSIS SODALI CORRESPOND.

SLIKA 12 ENA IZMED UVODNIH STRANI NJEGOVEGA VELIKEGA DESETIŠKEGA LOGARITMOVNIKA

5.4 Vegovo računanje logaritmov

Na osnovi binomske formule je Vega izpeljal vrsto za ln(1+x), ki se imenuje tudi Taylorjeva vrsta.

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots)$$



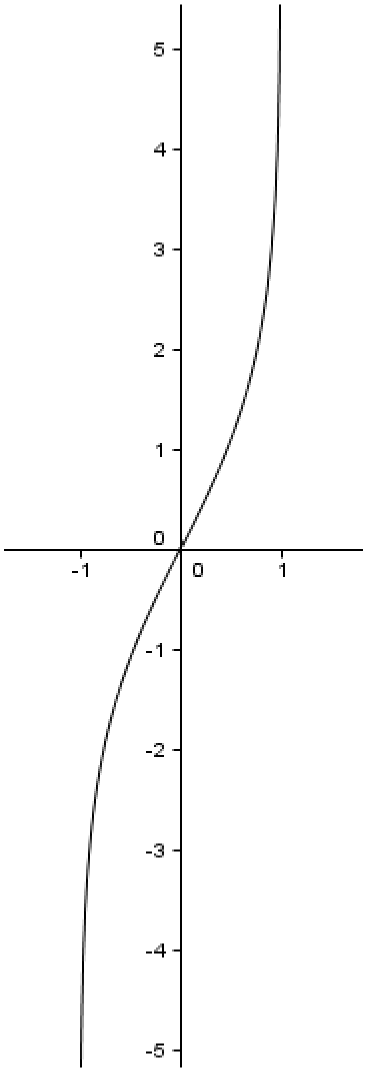
SLIKA 13 GRAF TAYLORJEVE VRSTE

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right).$$

Vega je nato ti dve formuli med seboj odštel oziroma delil.

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \ldots$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots).$$



SLIKA 14 GRAF FUNKCIJE LN(1+X)/(1-X)

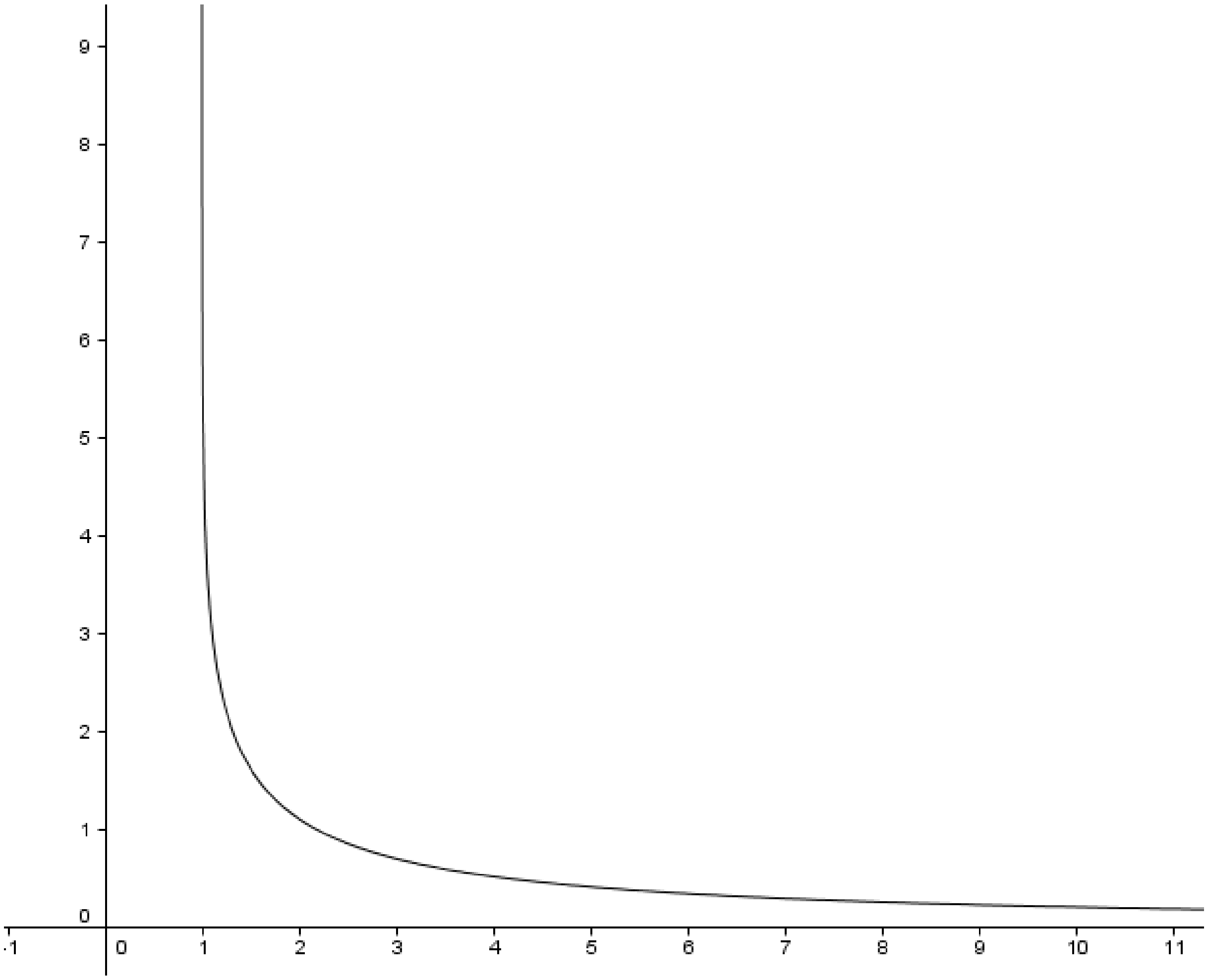
Ta formula je še vedno bila možna le za $-1 < x < 1$.

V zgornjo formulo je vpeljal substitucijo $x = \frac{1}{q}$ (pri predpostavki $q > 1$)).

Dobil je sledečo enačbo:

$\ln \frac{q+1}{q-1} = 2(\frac{1}{q} + \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{5q^5} + \cdots)$.

katere graf je naslednje oblike:



SLIKA 15 LN(Q+1) - LN(Q-1)

Opazimo, da ta vrsta konvergira za $q > 1$. Prepišemo jo v obliki:

$\ln(q+1) = \ln(q-1) + 2(\frac{1}{q} + \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{5q^5} + \cdots)$

Vstavimo q = 3

$$\ln(3+1) = \ln(3-1) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \cdots\right)$$

Vendar poglejmo pri kateri vrednosti dobimo dovolj dober približek.

$$\ln(3+1) = \ln(3-1) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81}\right) = 1.384505205$$

$$\ln(3+1) = \ln(3-1) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}\right) = 1.386151296$$

$$\ln(3+1) = \ln(3-1) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309}\right) = 1.386281938$$

Hočemo pokazati, da je takšno računanje zelo zapleteno oziroma, da moramo uporabiti veliko ulomkov, da pridemo do natančne vrednosti, ki je 1.386294361, da se razlika pojavi šele na 6 mestu. Ker vrsta ne konvergira dovolj hitro, je Vega vpeljal še eno substitucijo:

$$\frac{q+1}{q-1} = \frac{p^2}{p^2-1}$$

$$(q+1)(p^2-1) = p^2(q-1)$$

$$q = 2p^2 - 1$$

Vstavimo to v vrsto. Dobimo:

$$\ln\frac{p^2}{p^2-1} = 2(\frac{1}{2p^2+1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5(2p^2-1)^5} + \cdots)$$

Uporabimo pravilo za logaritme: $\ln\frac{p}{q} = \ln p - \ln q$.

$$\ln p^2 - \ln(p^2-1) = 2(\frac{1}{2p^2+1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5(2p^2-1)^5} + \cdots)$$

$\ln(\, p^2 - 1)$ damo na drugo stran enačbe.

$$2\ln p = \ln(p^2-1) + 2(\frac{1}{2p^2+1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5(2p^2-1)^5} + \cdots)$$

Delimo z dva in navsezadnje dobimo:

$$\ln p = \frac{1}{2}(\ln(p-1) + \ln(p+1)) + (\frac{1}{2p^2+1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5(2p^2-1)^5} + \cdots)$$

Ta enačba nam omogoča hitro konvergiranje k natančni rešitvi.

S to enačbo ima vsak možnost, da z relativno lahkim postopkom ustvari svoje logaritemske tablice, ki so izjemno natančne. Praktično potrebujemo le vsa praštevila, za vsa ostala števila pa potrebujemo le enostavne postopke seštevanja ter odštevanja.

Vega je nato opazil še eno podrobnost. Računal je logaritma števil 2 ter 3.

$$\ln 2 = \frac{1}{2}(\ln(1) + \ln 3) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{3 * 7^3} + \frac{1}{5 * 7^5} \dots)$$

Ker vemo, da je $\ln 1 = 0$, dobimo:

$$\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{3 * 7^3} + \frac{1}{5 * 7^5} \dots$$

ter

$$\ln 3 = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 4) + \frac{1}{17} + + \frac{1}{3 * 17^3} + \frac{1}{5 * 17^5} + \cdots$$

$$\ln 3 = 1/2(3 * \ln 2) + \frac{1}{17} + + \frac{1}{3 * 17^3} + \frac{1}{5 * 17^5} + \cdots$$

Za poenostavitev dodamo dve substituciji.

$$P = \frac{1}{7} + \frac{1}{3 * 7^3} + \frac{1}{5 * 7^5} \dots$$

$$Q = \frac{1}{17} + + \frac{1}{3 * 17^3} + \frac{1}{5 * 17^5} + \cdots$$

Torej, če zdaj to vstavimo v prejšnje enačbe dobimo:

$$\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 3 + P$$

$$\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 2 + Q$$

Preuredimo enačbe in dobimo

$$\ln 3 = 2 * \ln 2 - 2P$$

Zgornjo enačbo odštejemo od osnovne:

$$\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 2 + Q$$

Dobimo enačbo:

$-\frac{1}{2}\ln 2 + Q + 2P = 0$

$$\frac{1}{2}\ln 2 = Q + 2P$$

Enačbo pomnožimo z dva ter dobimo:

$$\ln 2 = 4P + 2Q$$

To vstavimo v eno izmed enačb z $\ln 3$.

$$4P + 2Q = \frac{1}{2}\ln 3 + P$$

$$3P + 2Q = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$\ln 3 = 6P + 4Q$$

To pomeni, da: $\ln 2 = 4 * \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3*7^3} + \frac{1}{5*7^5} + \frac{1}{7*7^7} + \cdots\right) + 2 * (\frac{1}{17} + \frac{1}{3*17^3} + \frac{1}{5*17^3} + \frac{1}{7*17^7} + \cdots)$. Če to enačbo uporabimo do 9. stopnje dobimo točno vrednost na 8 decimalk, kar je odlično za večino potrebnih računanj. Torej rezultat te enačbe, če vstavimo do 9 stopnje je 0.69314718.

Za $\ln 3$ pa vstavimo… $\ln 3 = 6 * \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3*7^3} + \frac{1}{5*7^5} + \frac{1}{7*7^7} + \cdots\right) + 4 * (\frac{1}{17} + \frac{1}{3*17^3} + \frac{1}{5*17^3} + \frac{1}{7*17^7} + \cdots$.

Vega je izračunal števili P in Q na 12 decimalnih mest natančno. Vendar to še vedno ni popolna metoda. Vrsta ne konvergira tako hitro, še vedno je kar nekaj računanja. Vega je tako iznašel še en način računanja naravnih logaritmov števil 2 in 3, ki konvergira še hitreje kot P in Q.

Izračunajmo na primer logaritem števila 7.

$$\ln 7 = \frac{1}{2}(\ln 6 + \ln 8) + \left(\frac{1}{97} + \frac{1}{2738019} + \frac{1}{4.3 * 10^{10.}} \dots\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3 + 3 * \ln 2) + (\frac{1}{97} + \frac{1}{3 * 97^3} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{2}(4P + 2Q + 6P + 4Q + 12P + 6Q) + (\frac{1}{97} + \frac{1}{3 * 97^3} + \cdots =$$

$= \frac{1}{2}(22P + 12Q) + \left(\frac{1}{97} + \frac{1}{3*97^3} + \cdots\right) = 11P + 6Q + \left(\frac{1}{97} + \frac{1}{3*97^3} + \cdots\right) = 1.945910149$ -> izpis iz kalkulatorja je popolnoma enak.

Vidimo, da je ta metoda razmeroma popolna. Konvergira razmeroma hitro, pozorni moramo biti le na računanje praštevil, vendar so v osnovi pomembne le štiri osnovne računske operacije.

Vega je izdal logaritme z osnovo 10, ves čas pa govorimo le o naravnih logaritmih…

Poznamo pa sledeče pravilo:

$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ oziroma $\log 2 = \ln 2/\ln 10 = 0.3010299$

Kajti vemo, da je:

$$\ln 10 = \ln 2 + \ln 5 = 2.302585$$

Lahko pa tudi naravne logaritme pomnožimo z 0.434294482. To število pa dobimo s pomočjo formule: $\frac{\log x}{\ln x} = Y = 0.434294482$

Poskusimo poiskati vrsto, ki bo konvergirala še hitreje kot zgoraj omenjena. Vstavimo v vrsto 7, 8, 9, 10 ter 11.

$$\ln 7 = \frac{1}{2}(\ln 6 + \ln 8) + R = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3 + 3\ln 2) + R = 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + R$$

$$\ln 8 = \frac{1}{2}(\ln 7 + \ln 9) + S = \frac{1}{2}\left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + R + 2\ln 3\right) + S = \ln 2 + \frac{5}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}R + S$$

$$\ln 9 = \frac{1}{2}(\ln 8 + \ln 10) + T = \frac{1}{2}(3\ln 2 + \ln 5 + \ln 2) + T = 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 + T$$

$$\ln 10 = \frac{1}{2}(\ln 9 + \ln 11) + U = \frac{1}{2}\left(2\ln 3 + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 5 + V\right) + U$$

$$= \frac{5}{4}\ln 3 + \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{2}V + U$$

$$\ln 11 = \frac{1}{2}(\ln 10 + \ln 12) + V = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 5 + 2\ln 2 + \ln 3) + V$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 5 + V$$

Torej dobimo zdaj pet osnovnih enačb. V enačbi je 5 neznank: R, S, T, U, V. Seveda, če vemo da vse izhaja iz osnovne enačbe

$$\ln p = \frac{1}{2}(\ln(p-1) + \ln(p+1)) + (\frac{1}{2p^2+1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5(2p^2-1)^5} + \cdots)$$

Potem vemo, da je:

$$R = \frac{1}{(2*7^2-1)} + \frac{1}{(2*7^2-1)^3} + \frac{1}{(2*7^2-1)^5} + \cdots$$

$$S = \frac{1}{(2*8^2-1)} + \frac{1}{(2*8^2-1)^3} + \frac{1}{(2*8^2-1)^5} + \cdots$$

$$T = \frac{1}{(2*9^2-1)} + \frac{1}{(2*9^2-1)^3} + \frac{1}{(2*9^2-1)^5} + \cdots.$$

$$U = \frac{1}{(2*10^2-1)} + \frac{1}{(2*10^2-1)^3} + \frac{1}{(2*10^2-1)^5} + \cdots$$

$$V = \frac{1}{(2*11^2-1)} + \frac{1}{(2*11^2-1)^3} + \frac{1}{(2*11^2-1)^5} + \cdots$$

Nato iz ene enačbe izpostavimo ln5.

$$\ln 9 = 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 + T$$

$$2\ln 3 = 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 + T$$

$$2\ln 3 - 2\ln 2 - T = \frac{1}{2}\ln 5$$

$$4\ln 3 - 4\ln 2 - 2T = \ln 5$$

To vstavimo v drugo enačbo:

$$\ln 10 = \frac{5}{4}\ln 3 + \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{2}V + U$$

$$\ln 2 + \ln 5 = \frac{5}{4}\ln 3 + \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{2}V + U$$

$$\frac{3}{4}\ln 5 = \frac{5}{4}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}V + U$$

$$\frac{3}{4}(4\ln 3 - 4\ln 2 - 2T) = \frac{5}{4}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}V + U$$

$$3\ln 3 - 3\ln 2 - \frac{3}{2}T = \frac{5}{4}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}V + U$$

$$\frac{7}{4}\ln 3 = \frac{11}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}V + U + \frac{3}{2}T$$

$$\ln 3 = \frac{11}{7}\ln 2 + \frac{2}{7}V + \frac{4}{7}U + \frac{6}{7}T$$

Dobili smo izpostavljen naravni logaritem števila 3 z enačbo, ki nam zelo koristi, saj vsebuje le naravni logaritem števila 2 ter vrednosti s katerimi želimo izraziti ta dva logaritma.

Sedaj lahko vstavimo v enačbo za naravni logaritem 8 vse nadomestne enačbe.

$$\ln 8 = \ln 2 + \frac{5}{4}\left(\frac{11}{7}\ln 2 + \frac{2}{7}V + \frac{4}{7}U + \frac{6}{7}T\right) + \frac{1}{2}R + S$$
$$3\ln 2 = \ln 2 + \frac{55}{28}\ln 2 + \frac{10}{28}V + \frac{5}{7}U + \frac{30}{28}T + \frac{1}{2}R + S$$
$$3\ln 2 = \frac{83}{28}\ln 2 + \frac{10}{28}V + \frac{5}{7}U + \frac{15}{14}T + \frac{1}{2}R + S$$
$$\frac{1}{28}\ln 2 = \frac{10}{28}V + \frac{5}{7}U + \frac{15}{14}T + \frac{1}{2}R + S$$
$$\ln 2 = 14R + 28S + 30T + 20U + 10V$$

Dobili smo enačbo za naravni logaritem števila 2.Naravni logaritem števila 3 dobimo, če vstavimo sedaj dobljene podatke v katerokoli izmed zgornjih enačb. Pa poskusimo z enačbo za logaritem števila 8.

$$\ln 8 = \ln 2 + \frac{5}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}R + S$$
$$3\ln 2 - \ln 2 - \frac{1}{2}R - S = \frac{5}{4}\ln 3$$
$$2(14R + 28S + 30T + 20U + 10V) - \frac{1}{2}R - S = \frac{5}{4}\ln 3$$
$$28R + 56S + 60T + 40U + 20V - \frac{1}{2}R - S = \frac{5}{4}\ln 3$$
$$\frac{4}{5}\left(\frac{55}{2}R + 55S + 60T + 40U + 20V\right) = \ln 3$$
$$\ln 3 = 22R + 44S + 16V + 32U + 48T$$

Prišli smo do vrste, ki konvergira izjemno hitro. Zelo dobro se obnese že, če vzamemu pri vsaki vrednosti le en člen, če pa vzamemo dva ali tri pa je res že zelo natančno vrsto. Vega je torej iznašel izjemno enostavno metodo s katero lahko poiščemo naravne logaritme. Logaritme z osnovo 10 pa dobimo le s preprostim deljenjem s številom 2.302585093, ki je hkrati naravni logaritem števila 10.

5.4.1 Slabosti Vegove metode

Praktično je težko najti slabosti v tej metodi. Metoda je izjemno natančna ter zmožna računanja logaritmov tudi na več deset mest natančno. Tudi računanje brez računskega stroja ni pretežko niti za povprečnega matematika. Sicer je metoda še vedno podvržena napakam človeka, toda manj kot pri na primer Briggsovi metodi. Zaradi dobre metode so verjetno bili Vegovi logaritmovniki tako spoštovani še dolgo po njegovi smrti.

6. LOGARITMI PRED IN PO INDUSTRIJSKI REVOLUCIJI

6.1 Ideja

V času pred industrijsko revolucijo se je večina ljudi z matematiko ukvarjala le ljubiteljsko. Praktično so jo uporabljali le v bančništvu, arhitekturi, vojski ter teoretični fiziki. Industrijska revolucija je vse to krepko spremenila. Stroji so stvari postavili na glavo. Za uporabo v inženirstvu ter tudi fiziki so potrebovali izjemno natančne izračune, kajti drugače bi bili stroji slabo izdelani in posledično bi dobivali slabe izdelke. Seveda pa niso bili ogroženi samo stroji, ampak tudi ljudje. Logaritemske tablice so uporabljali tudi pomorščaki za navigiranje in že mala napaka jih je lahko vodila v smrt. Kot sem že omenil, so se na različnih tablicah z izračuni pogosto pojavljale napake. Charles Babbage se je tega zavedal. Vedel je, da bo do napak prihajalo, dokler bo v računanje vpleten človek. Lotil se je snovanja stroja, ki bi reševal te račune. Najprej se je lotil snovanja stroja, ki ga danes imenujemo **diferenčni stroj**. Z njim naj bi tabeliral logaritme ter trigonometrične funkcije, iz katerih bi ustvaril približne polinome, a mu stroja ni uspelo nikoli dokončati.

6.2 Pascalov kalkulator (1645)

Z idejo računskega stroja, ki bi opravil izračune namesto človeka, se je ukvarjal že Blaise Pascal. Pascal je živel v času Briggsa oziroma malo kasneje ter je ustvaril prvi kalkulator, ki je bil dovolj zmogljiv, da je bil uporabljen pri vsakdanjih opravilih. Zmožen je bil seštevanja in odštevanja ter množenja in deljenja s ponavljanjem. Njegova izdelava je bila razmeroma draga, zato ni nikdar prišlo do serijske proizvodnje.

V naslednjih dveh stoletjih je bilo kar nekaj patentov novih in novih računskih strojev, vendar le pri redkih je prišlo do realizacije.

Ob koncu 18. stoletju pa so luč sveta ugledali številni izumi. Parni stroji so zamenjali živali pri številnih opravilih, železne ladje so začele tekmovati s tistimi, ki so imela jadra. Komuniciranje je doživelo popolnoma novo obliko. Če pogledamo širše: tehnologija je izjemno napredovala v vseh pogledih.

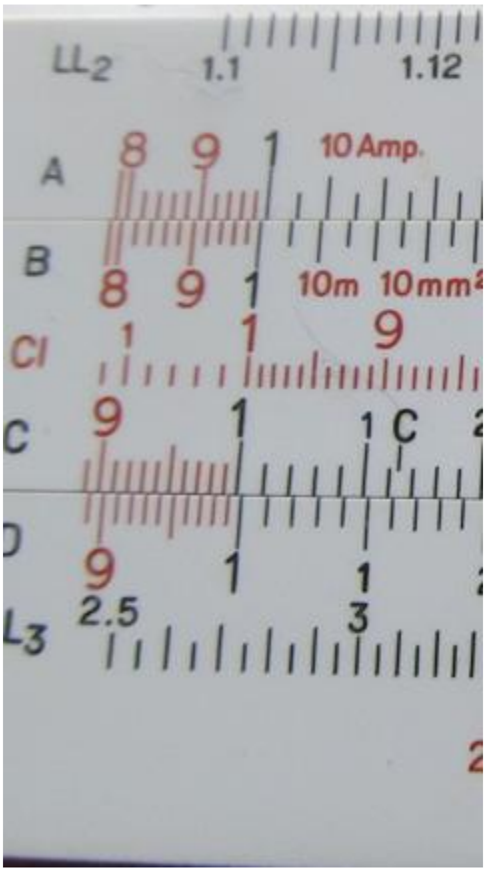
A matematiki so izračune še vedno večinoma opravljali ročno. Tudi Vega je ob koncu 18. stoletja vse svoje izračune opravljal ročno, tako kot mnogi njegovi sodobniki. Charles Babbage, ki je vse to spremljal ter tudi sam izkušal, kako zapleteno je, se je odločil to spremeniti.

6.3 Logaritemsko računalo

Kmalu po iznajdbi logaritmov je prišlo do še enega zanimivega pripomočka za računanje. Že v 20ih letih 17. stoletja so izumili t.i. **logaritemsko računalo**, ki je bilo v bistvu analogni računalnik kot na primer v antiki abakus.

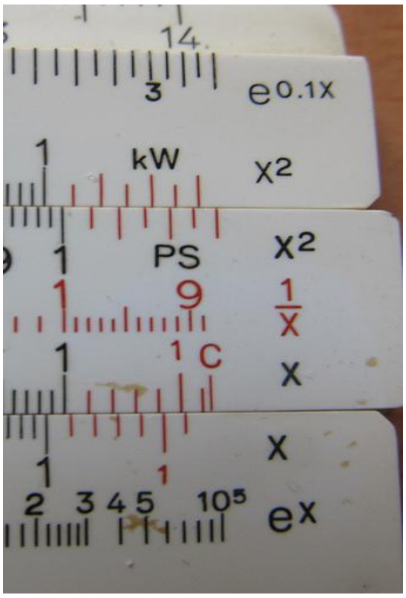
SLIKA 16 LOGARITEMSKO RAČUNALO

Računalo je bilo sestavljeno iz treh delov -> drsnika, jezička ter ravnila. Računala so se med seboj razlikovala, vendar je bil princip delovanja pri večini enak. Na levi strani ravnila so oznake od spodaj navzgor: LL3, D, A LL2. Na desni strani pa e^x, x, x^2 ter $e^{0.1x}$.



SLIKA 17 LEVA STRAN LOGARITEMSKEGA RAČUNALA

Tudi na drsniku so posebne oznake, po navadi na levi strani C, CI ter C. Na levi strani pa $x, \frac{1}{x}$ ter x^2.



SLIKA 18 DESNA STRAN LOGARITEMSKEGA RAČUNALA

Računalo ima **logaritemsko skalo**, torej presledki med števili niso enaki, ampak se manjšajo od leve proti desni. Zanimivo pa je, da so na primer številke le od ena proti deset oziroma od 1 do 100 na skali za x^2, vendar so vse ničle izpuščene. Zaradi tega se mora s števili, ki so večje od 10 oziroma 100, upravljati ročno, torej dodajati oziroma odvzemati decimalno vejico.

Naprava deluje po metodi logaritmov, zato zmore spremeniti množenje v seštevanje po pravilu:

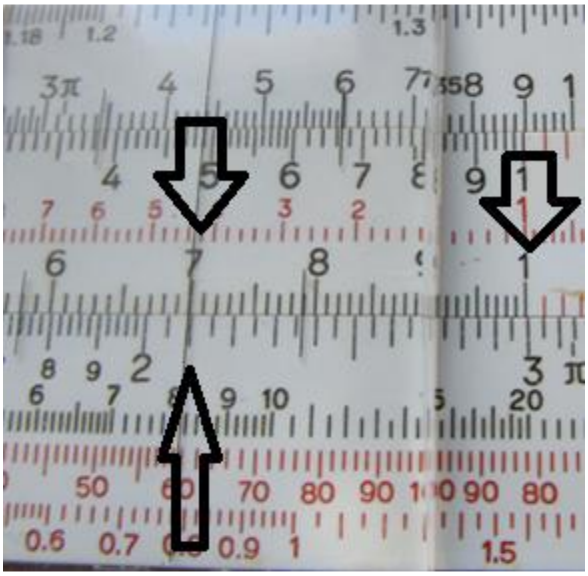
$$\log a * b = \log a + \log b$$

Iz tega lahko sklepamo, da seštevamo daljice.

Oglejmo si računanje na principu logaritemskega računala.

Izračunajmo preprost račun $3 * 7 = 21$ s pomočjo logaritemskega računala.

Enico na drsniku poravnamo z trojko na spodnjem ravnilu. Nato poiščemo sedmico na drsniku ter poglejmo katero število leži pod njim. Vidimo, da je to 2.1, vendar ker vemo, da smo računali z dvema številoma, ki sta večji od tega prestavimo decimalno mesto za eno, ter dobimo število 21.



SLIKA 19 3*7=21

Deljenje deluje po podobnem postopku. Po pravilih, ki jih poznamo, vemo da je:

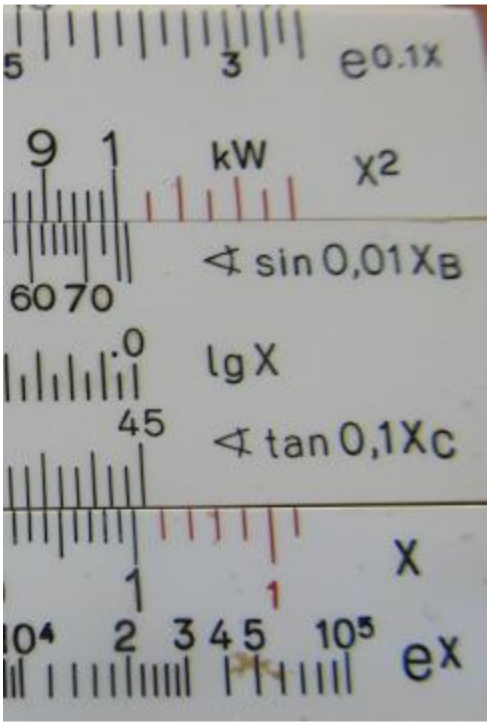
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Tako nastavimo deljenec na ravnilu, delitelja pa nad tem številom na drsniku. Nato pogledamo katero število je postavljeno pod številom 1 in to je naš rezultat.

Izračunajmo po tem postopku preprost račun: $\frac{8}{4} = 2$

Nad številom 8 na ravnilu nastavimo drsnik s številom 4. Poglejmo, kje je postavljeno število 1 in vidimo, da je to pri številu 2.

Na tem logaritemskem računalu pa je bila še možnost razbrati obratno vrednost ter tudi kvadrat števila.
Veliko računal je imelo možnost računanja vrednosti tangens ter sinus za različne kote. Seveda to ni bilo preveč natančno računanje, sploh na manjših računalih.

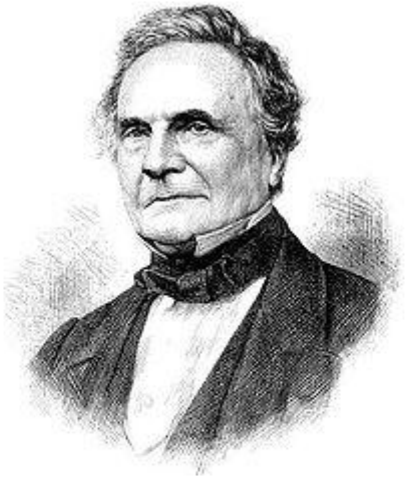


Slika 20 Obrnjen drsnik - možnost računanja tangens in sinus vrednosti.

Čeprav se računalo imenuje logaritemsko, pa se logaritmov s tem računalom ne da računati. Možno je določiti neko približno vrednost, vendar za uporabo v inženirske ali astronomske namene pa ni bilo primerno in je bilo bolje uporabiti že znane logaritemske tabele.

Računalo je bilo v splošni uporabi vse do 70-ih let 20. stoletja, ko ga je nadomestil žepni kalkulator. S tem pripomočkom se je računanje rahlo poenostavilo, vendar je bilo nenatančno ter podvrženo k napakam.

6.4 Charles Babbage (1792-1871)



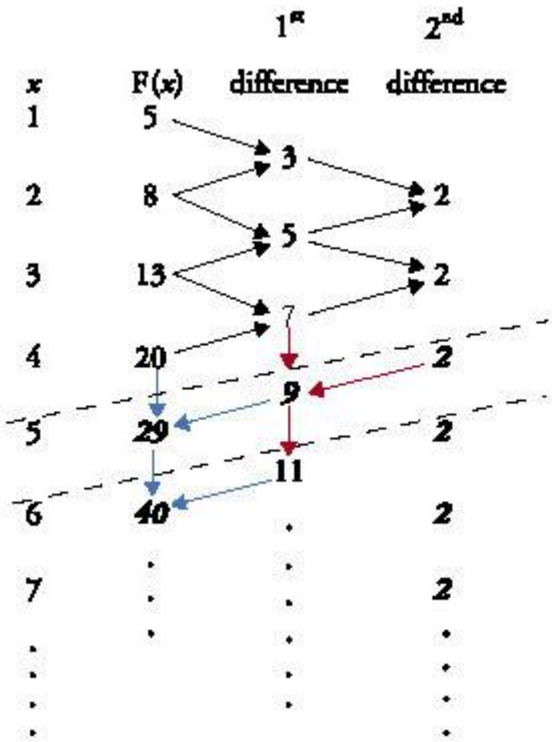
SLIKA 21 PORTRET CHARLESA BABBAGEA

Babbage je bil diplomant Univerze v Cambridgu. Študiral je matematiko, vendar kot študent ni blestel. Izhajal je iz premožne družine in to mu je dajalo možnost, da se je preizkusil na številnih področjih. Bil je velik izumitelj. Toda njegov najpomembnejši izum, čeprav ni bil nikdar realiziran, je bil diferenčni stroj ter kasneje še analitični.

6.4.1 Diferenčni stroj 1

Babbage ga je ustvaril, da bi reševal in tabeliral polinomske funkcije ter posledično tudi dobre približke za logaritmične in trigonometrične tabele. Stroj, če bi bil kdaj izdelan, bi imel sposobnost le dodajanja, seštevanja. Seštevanje pa bi potekalo po korakih, zato ni potrebe po množenju ter deljenju, kar bi bilo težje realizirati. Tudi za to bi bil diferenčni stroj le kalkulator.

Pa si poglejmo na primeru, kako bi potekalo računanje na diferenčnem stroju:



SLIKA 22 PRIMER RAČUNANJA NA DIFERENČNEM STROJU

Tukaj je primer, po kakšnem postopku so diferenčni stroji računali. Na primer: imamo funkcijo $f(x) = x^2 + 4$. Prvih nekaj vrednosti imamo že izračunanih – za x = 1, 2, 3, 4. V prvi koloni imamo vrednosti, ki jih vstavljamo kot x, v drugi imamo vrednosti, ki jih dobimo z uporabo te funkcije, tretja in četrta pa sta razliki. Vidimo, da je med f(1) in f(2) razlika 3. To zapišemo kot prvo razliko. Druga razlika je razlika med prvima razlikama. Druga razlika je konstantna, tako da se ponavlja. Torej je vse ostalo mogoče izračunati brez težav. Vemo, da se prva razlika konstantno veča, druga ostaja enaka, neznanka ostaja le f(x), ki pa se da izračunati upoštevajoč zgornjo funkcijo ter prvo razliko.

Vidimo, da je metoda izjemno enostavna in čeprav je bil stroj zmožen le seštevanja, je bil vseeno dovolj sposoben, da je računal tudi polinome.

TABELA 1 NAČIN RAČUNANJA DIFERENČNEGA STROJA

X	$f(x) = 2x^2 + 2x + 1$	RAZLIKA 1	RAZLIKA 2
1	5	8	4
2	13	12	4
3	25	16	4
4	41	20	4
5	65	24	4

Z uporabljeno metodo sem izračunal še vrednosti za polinom $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$. To, da je razlika 4 vedno enaka, je ključno za to metodo. Če pa bi bil polinom tretje stopnje, pa bi razlika 2 variirala, medtem ko bi bila razlika 3 konstantna.

Babbage si je zamislil, da bi stroj deloval v več zaporednih korakih. Dokončanje stroja mu ni nikoli uspelo, saj je bil njegov izum veliko pred tehnološkimi zmožnostmi časa. Čeprav bi načeloma stroj potrebovali, ga zaradi prevelikih stroškov nikdar niso zgradili. Babbage je dobil sredstva od države ter sponzorjev, vendar so le-ta kmalu zmanjkala in dela ni bilo mogoče nadaljevati. Če bi ga dokončali, bi tehtal približno 15 ton in bil visok okrog 2.5 metra.

Stroj bi bil zmožen tabelirati logaritme ter tudi tiskati tabele, saj je imel tudi izhodno napravo – nekakšen tiskalnik. So pa bili logaritmi tudi verjetno najpomembnejši dejavnik, zaradi česar je Babbage sploh naredil načrt stroja.

6.4.2. Analitični stroj

Babbageu je projekt spodletel, zato se je lotil snovanja drugega stroja, analitičnega. Posebnost tega stroja je bila možnost programiranja. Četudi bi diferenčni stroj zgradili, ne bi bil sposoben računati veliko operacij. Če bi hoteli kakšen drugačen izračun, bi morali izgraditi povsem drug mehanizem. Anallitični stroj bi bil sposoben prehajanja med operacijami. Babbage je vedel, da je možno vsak matematični problem razstaviti na štiri osnovne operacije – seštevanje in odštevanje ter množenje in deljenje.

Spomnimo se, da je Vega izpeljal formulo, s katero lahko dobimo marsikateri logaritem le z množenjem, deljenjem ter seštevanjem. Tudi koreni se dajo izračunat samo z osnovnimi operacijami, toda v več korakih, tako da bi moral »računalnik« oziroma stroj dobivati navodila za vsak korak.

Analitični stroj bi bil tako zgrajen iz večih delov:

- Pomnilnika, kamor bi se shranjevale številke,
- »mlinčka«, kjer bi se opravljali izračuni,
- izhodne enote, torej nekakšnega tiskalnika, kjer bi se tiskali rezultati,
- luknjane kartice, kjer bi bila shranjena navodila.

Ravno te luknjane tablice so bile najzanimivejši del stroja. V začetku 19. stoletja je le-te uporabil za »programiranje« statev Joseph Jacquard. Z različnimi karticami bi lahko uporabnik povedal, katere operacije in katere spremenljivke, naj stroj uporabi. Pristop je bil zelo dober in tako je leta 1953 to na svojem elektronskem računalniku uporabilo podjetje IBM z razliko, da je bil program spravljen kar v pomnilniku.

Analitični stroj, čeprav tudi ni bil nikoli zgrajen, je bil zelo pomemben za razvoj računalništva. Prvič se je pojavilo programiranje v računskih strojih. Če bi bil kdaj zgrajen, bi bil zmožen tudi računanja logaritmov z ustreznim programom.

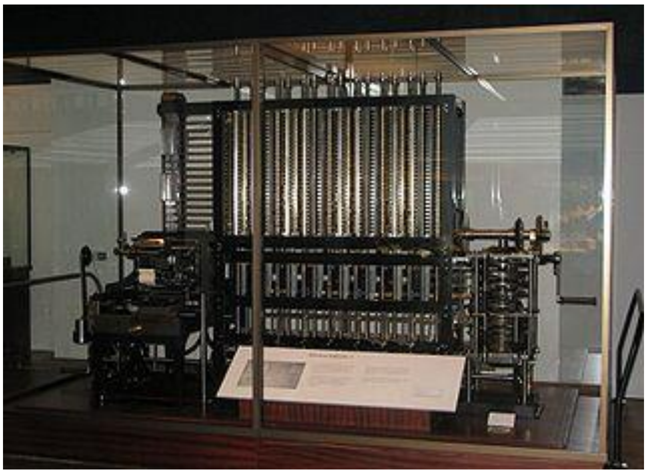
Zanimivo je, da je bilo narejenih že tudi nekaj programov za ta stroj. Vse pa je ustvarila **Ada Lovelace** (1815-1852) , torej ženska, ki je bila hčerka slavnega lorda Byrona, lepotica, mati treh otrok, glasbenica in matematični genij. Babbageu pa je pomagala še finančno. Svoja dela je podpisovala le z ALL, ker se v tistih časih ni spodobilo, da bi ženska mislila. Tako so šele mnogo po njeni smrti odkrili, kdo je avtor teh programov. Tako velja za prvo programerko v zgodovini.

SLIKA 23 PORTRET ADE LOVELACE

6.4.3. Diferenčni stroj 2

Sredstva za analitični stroj Babbage ni dobil nikdar, saj so se vsi še predobro spominjali spodletelega poskusa z izgradnjo diferenčnega stroja. Tako se je lotil dela, ki ga je znal najbolje – načrtovanja tehnično dovršenih strojev. Diferenčni stroj 2 bi bil sposoben operirati s številkami dolgimi tudi do 31 števk ter s polinomi do največ 7 stopnje. Za razliko od prvega stroja, bi bil narejen iz tretjine delov, bil bi cenejši in lažje bi ga bilo realizirati. Podobno kot prvi stroj pa ne bi bil sposoben računanja logaritmov.

To je trenutno edini Babbagov stroj, ki je bil dokončan. 153 let po tem pa je bil tudi realiziran. Zgrajen je bil v Londonu v znak spoštovanja do velikega inovatorja Charlesa Babbagea. Projekt izgradnje je trajal kar 17 let. Čeprav so bili načrti tehnično dovršeni, pa so vseeno imeli določene pomanjkljivosti, za katere menijo, da jih je Babbage namerno vstavil, da bi se zaščitil pred kradljivci. V njegovih načrtih na primer ni bilo navedenih materialov, ki bi jih uporabili pri gradnji stroja. Stroj lahko danes občudujemo v Znanstvenem muzeju v Londonu. Zgrajen je iz 8000 delčkov, tehta pet ton ter je dolg 3.35 metra. Identičnega temu stroju pa so zgradili tudi v ZDA ter je na ogled v Muzeju računalniške zgodovine v Kaliforniji.



SLIKA 24 DIFERENČNI STROJ 2, NAVPOGLED V LONDONU

6.5 Per Georg Scheutz

SLIKA 25 PORTRET GEORGA SCHERUTZA

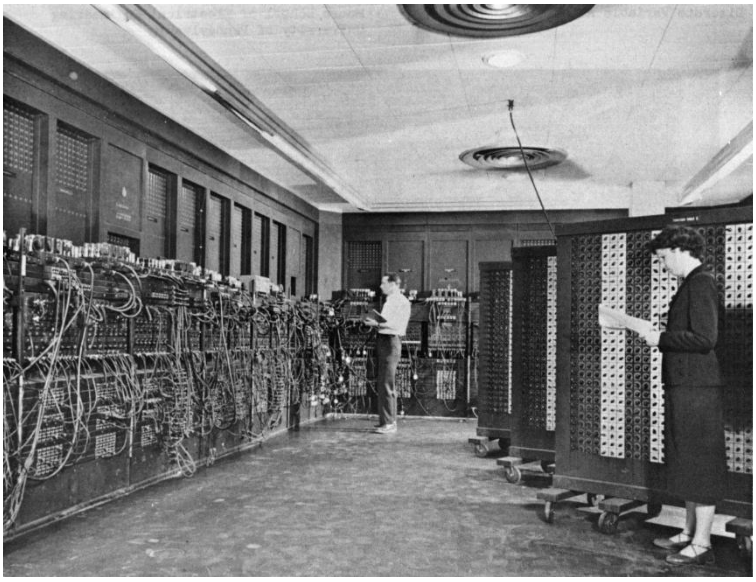
Diferenčni stroj je bil podlaga za številne kasnejše stroje. Še v času Babbagea so številni inovatorji snovali diferenčne stroje, mnogi po Babbageovem zgledu. Vendar pa je bil le redkokateri tudi realiziran.

Eden izmed teh inovatorjev je bil tudi Pehr Georg Scheutz, ki je osnoval svoj diferenčni stroj na osnovi Babbagevega. Izdelal je tri diferenčne stroje. Zanimivo je, da je njemu uspelo, Babbageu pa ne. To lahko pripišemo Babbageovemu perfekcionizmu, saj je bil njegov model stroja tehnično izjemno dovršen, medtem ko je Scheutz v zameno za delovanje stroja, marsikaj poenostavil ter tako prišel do stroja, ki pa ni bil tako zmogljiv. Stroj je bil namenjen tiskanju logaritemskih tabel, ki jih je računal s seštevanjem oziroma diferencami. Mnogi so videli potencial tega stroja bolj v preverjanju že obstoječih tabel, ne toliko v tiskanju novih. Vendar tudi ta stroj ni bil nikoli prodajna uspešnica. Bil je nepraktičen ter nezanesljiv. Vzrok je bil tudi, da takrat izračunov niso potrebovali tako hitro kot danes in tako ni bilo velike razlike med 15-minutnim računanjem stroja in med človekovim računanjem, ki bi bilo daljše za pol ali eno uro.

Tako so na enak način in iz zaradi enakih razlogov, propadle ideje še mnogih kasnejših mehanskih strojev.

6.6 Elektronski računalniki

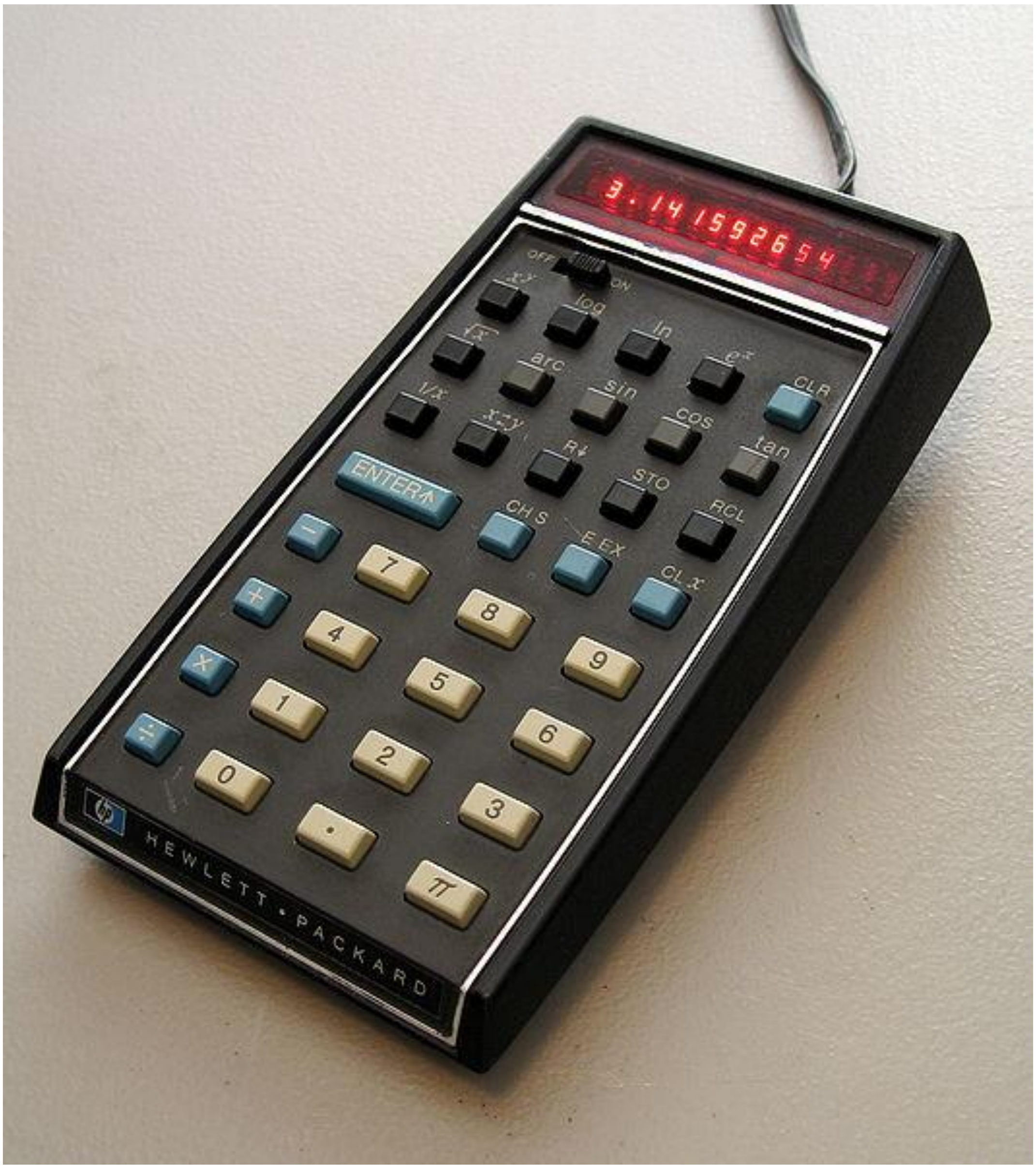
Čeprav Babbageu in njegovim sodobnikom ni nikoli uspelo izpeljati projekta računskega stroja, so pa postavili temelje za prihodnost. Babbageov analitični stroj je bil dolgo časa najbolj dovršen računski stroj, vse do leta 1943, ko so na Univerzi v Pensilvaniji zasnovali ENIAC. To je bil prvi računalnik, ki je bil realiziran in programljiv. Zanimivo je, da ga je ameriška vojska uporabljala za izračune v balistiki. To pomeni, da je bil uporabljen za računanja dometov topovskih krogel ter njihovih poti. To je predvsem zanimivo zato, ker je to tudi področje Vegovega delovanja v avstrijski vojski. Vega je svoje matematično znanje uporabil za izboljšanje topov in poti njihovih izstrelkov.



SLIKA 26 FOTOGRAFIJA ENIACA

Elektronski računalniki so pomenili velik preskok naprej. Končno je prišlo do uresničitve Babbageovih idej z nadgradnjo. Ti stroji so bili sposobni reševati zapletene matematične probleme. Vendar pa so imeli veliko pomanjkljivost - še vedno niso bili dostopni navadnim smrtnikom. Le-ti so še vedno uporabljali logaritemska računala ter tabele. ENIAC in podobni računalniki so bili ogromni, vredni tudi več sto tisoč dolarjev.

Seveda pa so tudi računalniki hitro napredovali in tako smo leta 1972 dobili prvi računski pripomoček, ki je bil izjemno zmogljiv ter praktičen in sposoben računanja logaritmov. Govorim seveda o prvem žepnem kalkulatorju, ki ga je izdalo podjetje HP ter je zakoličil uporabo analognih računalnikov. Imel je sposobnost izračunavanja vseh računskih operacij, ki jih je sodobni inženir potreboval, torej tudi logaritmov.

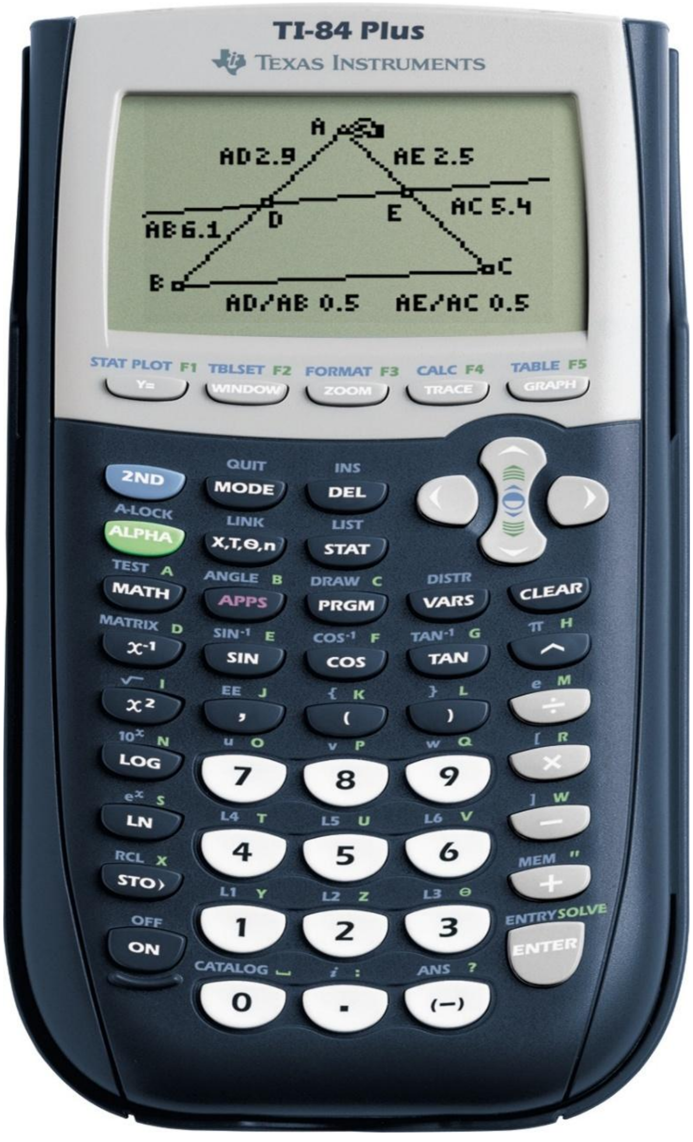


SLIKA 27 PRVI ŽEPNI KALKULATOR - HP 35

Tudi ti kalkulatorji tako kot ljudje, logaritme računajo po določenem postopku. Algoritmi za računanje logaritmov pa se razlikujejo glede na podjetje, ki stroje izdeluje. Vsako podjetje išče svojo metodo, ki bi bila za kalkulator najlažja ter hkrati natančna. Najpogosteje naj bi kalkulatorji uporabljali Taylorjevo vrsto s katero smo se že srečali pri Vegi.

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots)$$

Obstajajo številne izpeljave te vrste. Eno izmed njih je uporabil tudi Vega. Drugi so uporabljali podobne ali pa popolnoma drugačne formule, ki so dandanes bolj ali manj uporabne. Res pa je, da za izračune kalkulator porabi nekaj mikrosekund, medtem ko so matematiki v Vegovem času temu posvetili velik del svojega življenja.



SLIKA 28 MODERNI GRAFIČNI KALKULATOR TI 84 PLUS

6.7 Razvoj računalništva v moderni dobi

Računalnik je bil osnovan predvsem za potrebe računanja na različnih področjih. Dandanes ga samo v ta namen uporablja zelo majhen delež ljudi. Postal je pripomoček, brez katerega si življenje ne znamo predstavljati. Največja prednost modernih računalnikov je, da se jih da programirati, da jim lahko ukažemo, kaj naj naredijo in da lahko ukaze spreminjamo. To je želel že slavni Babbage.

Kaj bi bilo, če Babbage ne bi nikdar strmel v logaritemske tabele ter če ne bi iznašel analitičnega stroja? Bi potem danes lahko pisal raziskovalno nalogo na tem področju? Bi bil Bill Gates genij računalništva ali bi se ukvarjal s sestavljanjem logaritemskih tablic? Lahko rečemo, da je Vega pripomogel kaj k temu? So bili logaritmi ključni dejavnik?

Na vsa ta vprašanja lahko sedaj delno odgovorim. Menim, da bi bil ta razvoj neodložljiv, četudi Babbage ne bi zasnoval analitičnega stroja. Industrijska revolucija je povzročila, da so se morali opravljati zahtevni izračuni vsakodnevno, zato so številni iskali poenostavitve in mehansko pomoč. Druga svetovna vojna pa je dokončno pomenila drastičen razvoj na tem področju. Morda bi brez Babbageovega dela bilo marsikaj zamaknjeno za nekaj let, vendar računalniki so bili logična stopnja v tehnični evoluciji. Vega je veliko dal področju logaritmov. Sestavil je izjemne tablice, ki jim še vrsto let ni bilo para. Toda, ali je to vplivalo na Babbagea, bi težko rekli. Trditev, da pa so njegove napake vplivale na to pa Vegi verjetno ne bi bilo preveč v ponos. Za logaritme lahko trdimo, da so bili ključni dejavnik pri snovanju računalnika. Veliko mladih pravi, da je matematika brezzvezna, da nima smisla, ampak po drugi strani pa vsakodnevno uporabljajo svoje iPade, iPode, računalnike, ki jih poganja operacijski sistem Windows ter igrajo igre na teh napravah, a se ne zavedajo, da je to vse plod matematike.

7. UPORABA LOGARITMOV V RAČUNALNIŠTVU IN DRUGOD DANES

Logaritmi pa niso bili od nekdaj le način, kako bi pospešili računanje oziroma jih niso uporabljali le v matematične namene v preteklosti. Zelo pomembni so postali tudi v moderni dobi. Računalnik je bil zasnovan za namene reševanja logaritmov. Čeprav sedaj to zmore že praktično vsak računalnik, pa so odkrili še več načinov za uporabo le-teh.

V računalništvu so uporabljeni na štirih področjih:

- pri računalniški simulaciji,
- pri urejanju slik,
- pri kriptografiji,
- pri razvoju aplikacij.

7.1 Računalniška simulacija

V širšem smislu to pomeni primerjanje statističnih podatkov na osnovi katerih lahko potem napovemo posledice, rezultate. Kot primer bi navedel stopnja potresa. Najbolj uporabljena lestvica je dolgo bila in ponekod še vedno je **Richterjeva lestvica**. Ta deluje po naslednji formuli:

$$R = \log\left(\frac{a}{t}\right) + B$$

Vidimo, da imamo štiri neznanke:

- a pomeni amplituda nihanja na sprejemni postaji – v mikrometrih
- t pomeni čas, kako dolgo je trajal potres
- B – dejavnik, ki pokaže naraščajočo slabitev potresa stran od epicentra.

Poskusimo to sedaj uporabiti v praktični rabi. Potres leta 1998 v Zgornjem Posočju je imel magnitudo 5.6 po Richterjevi lestvici. 2. februarja 2012 smo čutili potres v severni Sloveniji, ki je imel epicenter v Železni Kapli v Avstriji. Magnituda tega potresa po Richterjevi lestvici pa je bila 4.2.

Zmotno bi lahko mislili, da je potres letos bil le 1.33333-krat močnejši, vendar ker vemo, da je uporabljen logaritem moramo računati drugače.

Izračunajmo moč vsakega potresa:

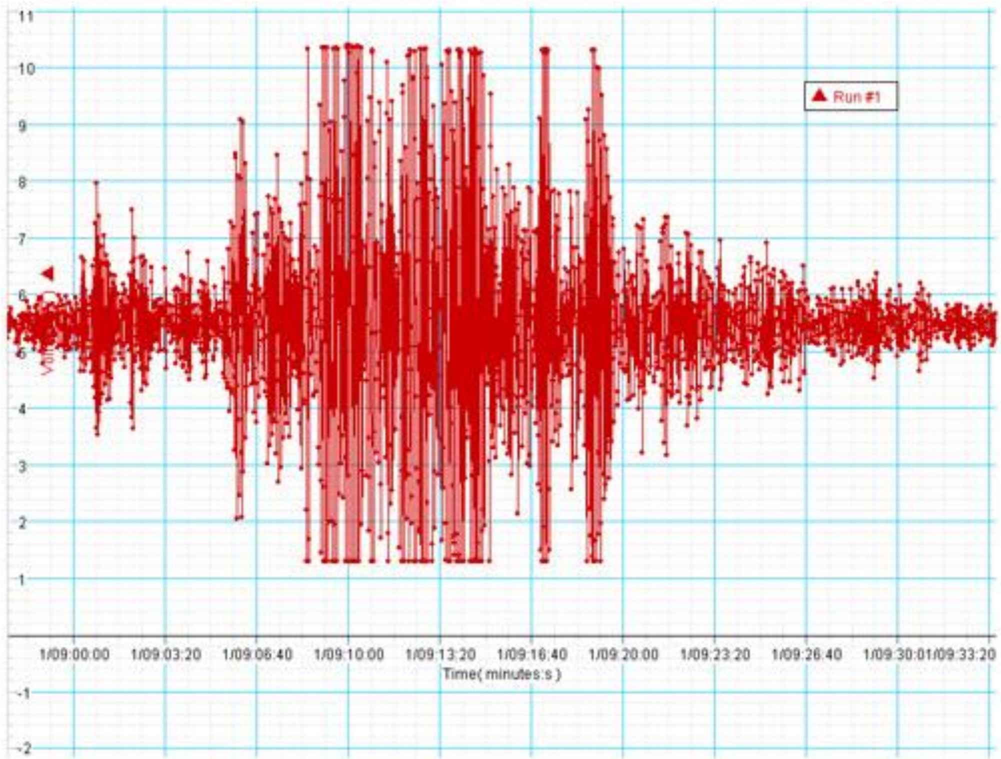
$4.2 = \log x$ ter $5.6 = \log y$

Uporabimo pravilo za logaritme:

$10^{4.2} = x$ ter $10^{5.6} = y$

Ugotovimo, da je $x = 15848.93192$ ter $y = 398107.1706$.

Če sedaj delimo ti dve števili, bomo ugotovili, da je bil potres leta 1998 kar **25-krat** močnejši.



SLIKA 29 PRIMER IZPISA IZ SEIZMOGRAFA

Računalnik lahko vse te podatke zajame ter predvidi posledice. Računalniška simulacija se dandanes pojavlja v vseh kotičkih sveta. V avtomobilski industriji s simulacijami predvidevajo posledice nesreč, v motošportu hitrost dirkalnikov ter kako določeni dejavniki vplivajo na le-to. Predvidevajo tudi posledice različnih vremenskih pojavov, posledice epidemij. Seveda se povsod ne pojavljajo logaritmi. Po drugi strani pa je žalostno, da so vsi takšni produkti najprej snujejo za uporabo v vojaške namene in šele na to pridejo v množično uporabo.

7.2 Obdelovanje slik

Ljudje vedno bolj skrbimo za našo zunanjo podobo. Vendar so v zadnjem desetletju socialna omrežja popolnoma spremenila to izkušnjo. Danes marsikoga poznamo le preko interneta in slike so tiste, preko katerih si izdelamo neko predstavo o človeku. Toda o pristnosti slike ne moremo biti prepričani, dokler ne spoznamo človeka v živo. Programsko opremo za manipularnje slik pa v našem času ni problem dobiti.

Ja, in tudi tukaj so prisotni logaritmi. Uporabljajo se za izboljšavo ter primerjavo slik. Vemo, da so slike sestavljene iz slikovnih pik. Poznamo tri vrste slikovnih pik in sicer za rdečo, zeleno ter modro barvo. Ostale barve pa nastanejo z mešanje le-teh. Vsaka slikovna pika pa nato dobi, glede na to v kakšnem razmerju so te tri barve posebno vrednost logaritma. Tako je možna izjemno lahka primerjava ter manipulacija z barvami.

7.3 Razvoj aplikacij

Vsak program je narejen iz nekega programskega jezika. Računalnik razume le binarni zapis, v katerega se mora program nato prepisati. Vsi programski jeziki so imeli možnost računanja logaritmov. Torej, vsak programski jezik ima neko svojo metodo po kateri rešuje logaritme. S Taylorjevo vrsto ali čem podobnim. Tako so lahko tudi danes logaritmi uporabljeni kot sestavni del programov predvsem ko želijo izraziti neke nelinearne povezave.

7.4 Kriptografija

Korenine kriptografije segajo vse v dobo antike. Šifriranje sporočil je bilo od nekdaj pomembno predvsem za vojaške namene. Julij Cezar je na primer šifriral svoja sporočila tako, da je zamaknil črke za nekaj mest po abecedi. Na primer, če bi hotel šifrirati besedo logaritem, bi uporabil besedo MPHBSJUFN. Nato bi moral povedati naslovniku ključ, po katerem naj dešifrira sporočilo. Toda ta način je izjemno enostaven in ga že osebni računalnik zmore dešifrirati v trenutku. Za sodobne namene so tako morali iznajti način, ki bo kodiral sporočila bolje.

7.4.1. Diskretni logaritmi

V uporabo so vzeli diskretne logaritme.

Diskretni logaritem se uporablja kot rešitev enačbe:

$$a^x = y \ll=\gg x = \log_a y$$

Računamo ga v množici grup. Grupa je par (G, *), kjer G predstavlja množico, * pa operacijo, ki se izvaja.

Za operacijo * mora veljati:

- Asociativnost – $(a * b) * c = a * (b * c), a, b, c \in G$
- Za vsak element iz G obstaja nevtralni element iz G, tako da je $a * e = a$
- Za vsak element iz G obstaja inverzni element iz G, tako da je $a * i = i * a = e$

Diskretne logaritme računamo v grupah oblike $\mathbb{Z}_P$, torej v množici ostankov pri deljenju s p: {0, 1, 2, 3,… p-1}.

Poglejmo si to na primeru:

Vzemimo $\mathbb{Z}_{23} = \{0, 1, 2, 3, \dots 22\}$.

Zanima nas, kdaj je $3^x = 12\ v\ \mathbb{Z}_{23}$ oziroma $3^x = 12\ (mod\ 23)$.

Računamo torej, pri kateri vrednosti x, bo ostanek deljenja dobljene vrednosti s 23, enak 12.

Torej: $x = \log_3 12\ (mod\ 23)$

Postopek reševanja:

- Potenciramo 3

$$3^1 = 3\ (mod\ 23)$$
$$3^2 = 9\ (mod\ 23)$$
$$3^3 = 4\ (mod\ 23)$$

$3^4 = 12\ (mod\ 23)$ –rešitev!

Ampak, če nadaljujemo…

$3^{11} = 1(mod\ 23)$, kar lahko tudi uporabimo

$$3^4 * 3^{11n} = 3^{3+11n} = 12 * 1(mod\ 23) = 12\ (mod\ 23) => x = 3 + 11n, če\ je\ n \in \mathbb{N}$$

Tako, da je lahko rešitev neskončno mnogo.

7.4.2. Uporaba diskretnih logaritmov v kriptografiji

Na primeru si še poglejmo, kako bi to lahko uporabili danes v kriptografiji.

Janko in Metka se dogovorita, da bosta računala v $\mathbb{Z}_{23}$ in da je $g = 3$.

1. Metka si izbere element iz $\mathbb{Z}_{23}$: a = 7

1.1 Opravi izračun: $g^a = 3^7 = 2\ (mod\ 23)$

1.2 Ter pošlje Janku $A = 2$.

2. Janko si izbere element iz $\mathbb{Z}_{23}$: b = 14

2.1 Opravi izračun: $g^b = 3^{14} = 4\ (mod\ 23)$

2.2 Ter pošlje Metki B = 4

3. Metka dobi B = 4 in izračuna: $4^a = 4^7 = 8\ (mod\ 23)$
4. Janko pa dobi A = 2 in izračuna: $2^b = 2^{14} = 8\ (\ mod\ 23)$
5. Oba torej dobita rezultat 8. To označimo kot s=8. To število lahko v nadaljevanju uporabita za kodo.

Poskušajmo sedaj ugotoviti, ali je možno izračunati s, z zbranimi podatki: Javni podatki: $\mathbb{Z}_{23}$, g = 3, A = 2, B = 4

Skrivni podatki: a = 7, b = 12, s = 8

Vemo, da je $s = 3^{a*b}(mod\ 23)$, vemo tudi, da je $3^a = 2\ (mod\ 23)$ ter $3^b = 4\ (mod\ 23)$.

Potencirajmo 3 in dobimo:

$$3^7 = 2\ (mod\ 23)$$

$$3^{14} = 4\ (mod\ 23)$$

Ter:

$3^{11} = 1(mod\ 23)$,

Iz tega nato vstavimo v enačbo, ki jo že poznamo:

$$3^7 * 3^{11n} = 3^{7+11n} => a = 7 + 11n$$

$$3^{14} * 3^{11n} = 3^{14+11n} => b = 14 + 11n$$

Torej bo rezultat vsake enačbe:

$$3^{(7+11n)(14+11n)} = 8\ (mod\ 23)$$

Čeprav smo prišli do rešitve pa je dejstvo, da smo izbrali izjemno nizka naravna števila ter praštevila. Pri veliko večjih številih pa je možnost razbitja te kode v kratkem času majhna.

Obstajajo številni zelo dobri algoritmi za razbitje, ampak je pri diskretnih logaritmih problem tudi ta, da je lahko srednje težak primer enako težak kot najzahtevnejši za dešifriranje.

7.5. Uporaba logaritmov drugod

Ob uporabi v računalništvu pa so logaritmi uporabni še drugod:

- pH lestvica v kemiji nam pove ali je spojina kisla ali bazična. To lahko določimo z vrednostjo oksonijevih ionov.

  Vrednost izračunamo po enačbi

$$pH = -\log[H_3O^+]$$

- V ekonomiji se uporablja za računanje obrestnih mer ter tudi širše za računanje BDPja oziroma kako močno bi moral neki državi rasti BDP, da bi prišla do želenega ter po kolikšnem času bi to dosegla.
- Pri računanju jakosti zvoka. Razlika med zvokom dirkalnika ter kapljanjem vode je tudi milijonkrat ali miljardokrat večje. Logaritemska lestvica to pretvori v številke, ki so nam bližje.

8. DRUŽBENA ODGOVORNOST

Informacijsko komunikacijska tehnologija in ne le računalniki doživlja v zadnjih desetletjih izjemen napredek. Če so bili zgodnji računalniki le v vlogi kalkulatorjev, danes temu ni tako. A obstaja dejstvo, ki ga ne smemo spregledati. Velik del informacijsko komunikacijske tehnologije, ki jo uporabljamo, je bilo prvotno razvite za vojaške potrebe. Tudi korenine svetovnega spleta so v ameriški vojski. In glede na to, kar danes vsakodnevno uporabljamo, si zlahka predstavljamo kakšno tehnologijo ima vojska. Le upamo lahko, da te tehnologije ne uporablja za kršenje temeljnih človekovih pravic.

Prav tako informacijsko komunikacijska tehnologija omogoča, da smo nadzorovani takorekoč povsod. Velik problem predstavlja svetovni splet s svojimi družabnimi omrežji, oblaki, ... Vse, kar objavimo v svetovnem spletu, objavimo »za vedno«. Zato je treba biti izjemno pazljiv. Podatki, ki jih delimo s svetom v trenutku nepazljivosti, lahko vplivajo na našo prihodnost, velikokrat ne v dobrem smislu.

Na razvoj računalnika so vplivali tudi logaritmi. Bi nam bilo bolje, če Babbage ne bi nikoli ustvaril analitičnega stroja in ne bi poznali računalnika? Odgovor je preprost. Ne. Pravijo, da so različne tabele, tudi logaritemske prihranile številnim astronomom pol življenja, kaj jim je torej prihranil šele računalnik?

A pomisleki vendarle ostajajo. Če se toliko govori o spoštovanju človekovih pravic v realnem življenju, kaj daje potem vladam sveta pravico do nadzora s pomočjo informacijsko komunikacijske tehnologije? Nič, toda še vedno si jo vzamejo, ker mislijo, da so nedotakljivi.

9. RAZPRAVA

Pred raziskovanjem sem si zadal sedem hipotez, ki jih po raziskovanju lahko sedaj bodisi zavržem ali potrdim.

- **Hipoteza 1.** Logaritemske tabele so bile uporabljene tudi med nematematiki. **Potrjena.**

Logaritemske tabele so bile uporabljene praktično med bančniki, astronomi do mehanikov ter fizikov. Kasneje so pa so bile uporabne tudi v šolstvu.

- **Hipoteza 2.** Vegov način računanja logaritmov je primeren za računanje logaritmov na vsaj 10 mest natančno.**Potrjena.**

Ne le to, Vegov način je zmožen računanja na več 10 mest natančno. Potrebna je le vztrajnost, čeprav vrsta konvergira izjemno hitro.

- **Hipoteza 3.**Vegov način računanja logaritmov je najbolj izpopolnjen način ter lažji od predhodnjih. **Potrjena**
- **Hipoteza 4**. Prvi računalnik je bil ustvarjen pod vplivom logaritmov. **Potrjena.**
- **Hipoteza 5**. Prvi računalnik je bil ustvarjen pod vplivom Jurija Vega. **Zavrnjena.**

Četudi bi se Babbagu porodila ideja ravno med gledanjem Vegovih logaritmov mislim, da Vega na to ne bil ponosen. Glede na natančnost njegovih logaritmovnikov je tudi to malo verjetno.

- **Hipoteza 6**. Računalnik računa logaritme na isti način kot Vega. **Deloma.**

Računalnik uporablja podoben način, s Taylorjevo vrsto, toda računalnik ne potrebuje tako razvitih formul, kot jih je pripravil Vega.

- **Hipoteza 7.** Čeprav je bil logaritem zamišljen kot računski pripomoček, ki bi poenostavil računanje, se ga lahko danes, ko računanje več ni problem, uporablja na številne načine. **Potrjena.**

Logaritmi so uporabljeni na številnih področjih od računalništva pa do kemije, predvsem zaradi njihove priročnosti.

- **Hipoteza 8.** Že Vega je vedel za praktičnost njegovih logaritmov v kriptografiji. **Zavrnjena**

Način uporabe logaritmov, ki jih danes uporabljajo v kriptografiji, je pretežak, da bi ga bil zmogel reševati človek. Tako, da na tem področju Vega ni imel vpliva.

- **Hipoteza 9.** Brez Jurija Vege Bill Gates ne bi bil to kar je. **Zavrnjena**

Povezave med Vego in Gatesom nisem odkril.

Raziskovanje na tem področju je seveda še možno. Sam sem se osredotočil le na začetnike logaritmov ter Vego. Z računanjem logaritmov so se ukvarjali še številni drugi, ki jih sam nisem raziskal.

Pomen svojega dela vidim predvsem v tem, da sem našel pomen logaritmov, vpliv Vege na to in pokazal, da je lahko tudi majhen Slovenec najboljši v svetu na svojem področju, ter da ljudje ne bodo poznali Vege le kot nekoga, ki je bil na tolarskem bankovcu, vendar kot enega izmed največjih slovenskih matematikov v zgodovini, ki je prispeval k razvoju človeštva in nam pokazal, da je matematika povezana s svetom na mnogo načinov, ki pa niso vidne na prvi pogled. Danes internet uporablja več kot 2 in pol miljarde ljudi. Koliko od teh jih ve, da je bil pod vplivom logaritmov zasnovan prvi računalnik?

10. ZAKLJUČEK

Ko je Napier leta 1614 zasnoval logaritme si verjetno ni predstavljal kakšen pomen bodo imeli v matematiki. Verjetno je videl logaritme le kot računski pripomoček, ki bo olajšal računanje, vendar je kmalu postal več kot le to. Uporabljali so jih množično na vseh področjih. Z njimi se je ukvarjal tudi eden izmed slovenskih matematikov vseh časov, ki je izdal najpopolnejše in najnatančnejše logaritemske tabele do takrat. Metoda je bila dovolj natančna, da s podobno metodo računajo dandanes tudi računalniki. Ravno logaritmom pa se lahko zahvalijo današnji uporabniki računalnikov, saj je bil pod vplivom njih zasnovan prvi računski stroj. Lahko rečemo, da so pospešili razvoj na tem področju. Čeprav danes, ko z računanjem velikih števil nimamo več težav pa so logaritmi še vedno uporabni na veliko področjih. Verjetno bodo v prihodnosti še na marsikaterem področju, o katerem pa se nam danes niti ne sanja. Morda pa so logaritmom šteti dnevi in jih bo že jutri nadomestil kak drug pripomoček. Nikoli se ne ve, čas v matematiki in računalništvu zadnjih nekaj desetletjih teče izjemno hitro. Vega je leta 1797 izdal tablice z vsemi praštevili do števila 400.031. Danes ima največje znano število 17.425.170 mest! Upamo lahko samo, da bo smer prava in bo le izboljšala blaginjo človeštva.

11. VIRI IN LITERATURA

TIEGL, A., SUHADOLC. A. Zgodovina logaritmov, poglavje. V: Matematika v šoli. Ljubljana : Zavod Republike Slovenije za šolstvo in šport. 1997

Jurij Baron Vega in njegov čas: Zbornik ob 250-letnici rojstva. Tomaž Pisanski (ur.). Ljubljana: DMFA. 2006. 543 str.

BOHTE, Zvonimir. Računanje z logaritmi. Presek : list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje, 2004, str. 230-235.

Jurij Vega: od pastirja do barona. Dušica Kunaver (ur.). Moravče : Občina, 2004. 56 str.961-91305-1-0

SODNIK, A. 1923. Logaritmi: Petdecimalne logaritmične in goniometrične [trigonometrične] tabele. Ljubljana: Jug knjigarna. 1923. 170 str.

VEGA, Jurij. Vollständige Sammlung grösserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln, / nach Adrian Vlack's Arithmetica logarithmica und Trigonometria artificialis, verbessert, neu geordnet und vermehrt von Georg Vega,. Leipzig: Weidmannischen Buchhandlung. 1794.

VEČEK, N. Algoritem RSA: diplomsko delo. Maribor: Veček Niki. 2012. [online]. [uporabljeno 21.12.2012]. Dostopna na URL: http://dkum.uni-mb.si/IzpisGradiva.php?id=37701

BRIGGS, H. Arithmetica logarithmica. Adelaide: University of Adelaide. 2004. [online]. [uporabljeno 7.12.2012]. Dostopno na URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Briggs/index.html

RENFRO, J. Logarithms and fast calculations. 2008. [online]. [uporabljeno 10.12.2012]. Dostopno na URL: http://www.scimath.unl.edu/MIM/files/MATExamFiles/Renfro_MAT_FINAL.pdf

Using logarithms in the real world. [online]. [uporabljeno 7.12.2012]. Dostopno na URL: http://betterexplained.com/articles/using-logs-in-the-real-world/

Uses of logarithms in computers. [online]. [uporabljeno 10.12.2012]. Dostopno na URL: http://www.ehow.com/info_8672781_uses-logarithms-computers.html

UMBARGER, D. Explaining Logarithms. 2008. [online]. [uporabljeno 12.12.2012] Dostopno na URL: http://www.mathlogarithms.com/images/ExplainingLogarithms.pdf

The MARK computers of Howard Aiken. [online]. [uporabljeno 10.1.2013]. Dostopno na URL: http://history-computer.com/ModernComputer/Relays/Aiken.html

Analytical engine. [online]. [uporabljeno 5.1.2013]. Dostopno na URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Analytical_Engine

Charles Babbage. [online]. [uporabljeno 16.11.2012]. Dostopno na URL: http://www.charlesbabbage.net/

The Babbage engine. [online]. [uporabljeno 20.1.2013]. Dostopno na URL: http://www.computerhistory.org/babbage/

The age of Machinery. [online]. [uporabljeno 20.1.2013]. Dostopno na URL: http://www.computerhistory.org/babbage/history/

The engines. [online]. [uporabljeno 21.1.2013]. Dostopno na URL: http://www.computerhistory.org/babbage/history/

Principle of the Difference Engines. [online]. [uporabljeno 22.1.2013]. Dostopno na URL: http://www.computerhistory.org/babbage/howitworks/

Nagging Questions. [online]. [uporabljeno 23.1.2013]. Dostopno na URL: http://www.computerhistory.org/babbage/modernsequel/

Difference Engine. [online]. [uporabljeno 12.1.2013]. Dostopno na URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Difference_engine

Arithmometer. [online]. [uporabljeno 14.1.2013]. Dostopno na URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmometer

Analitični stroj. [online]. [uporabljeno 16.1.2013]. Dostopno na URL: http://www.joker.si/article.php?rubrika=1&articleid=1052&page=3

Med nacisti in jenkiji. [online]. [uporabljeno 16.1.2013]. Dostopno na URL: http://www.joker.si/article.php?rubrika=1&articleid=1052&page=4

Koda Sun Microsystems. [online]. [uporabljeno 5.1.2013]. Dostopno na URL: http://www.netlib.org/fdlibm/e_log.c

John Napier. [online]. [uporabljeno 17.11.2012]. Dostopno na URL: http://sl.wikipedia.org/wiki/John_Napier

Henry Briggs (mathematician). [online]. [uporabljeno 28.11.2012]. Dostopno na URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Briggs_(mathematician)

Jost Bürgi. [online]. [uporabljeno 24.11.2012]. Dostopno na URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Jost_B%C3%BCrgi

Diffe-Hellman key exchange. [online]. [uporabljeno 3.2.2013]. Dostopno na URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Diffie%E2%80%93Hellman_key_exchange

Henry Briggs and HP 35. [online]. [uporabljeno 26.1.2013] Dostopno na URL:

http://www.jacques-laporte.org/Briggs%20and%20the%20HP35.htm

Scientific calculator. [online]. [uporabljeno 26.1.2013]. Dostopno na URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/Scientific_calculator

How to calculate a square root without a calculator. [online]. [uporabljeno 12.1.2013].

Dostopno na URL: http://www.homeschoolmath.net/teaching/square-root-algorithm.php

E (mathematical constant). [online]. [uporabljeno 8.1.2013]. Dostopno na URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)

Logarithms. [online]. [uporabljeno 8.11.2012]. Dostopno na URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm#Applications

Computer. [online]. [uporabljeno 6.1.2013]. Dostopno na URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/computer

Babbage`s expectations for his engines. [online]. [uporabljeno 12.1.2013]. Dostopno na URL:

http://ed-thelen.org/bab/Wilkes-Babbage.html

The Differential engine of Charles Babbage. [online]. [uporabljeno 12.1.2013].Dostopno na URL:
http://history-computer.com/Babbage/DifferentialEngine.html

Mechanical calculator. [online]. [uporabljeno 17.1.2013]. Dostopno na URL:
http://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical_calculator

ENIAC. [online]. [uporabljeno 17.1.2013]. Dostopno na URL: http://en.wikipedia.org/wiki/ENIAC

Bernoulli number. [uporabljeno 14.1.2013]. Dostopno na URL:
http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_numbers

Analog computer. [online]. [uporabljeno 20.1.2013]. Dostopno na URL:
http://en.wikipedia.org/wiki/Analog_computer

HP-35. [online]. [uporabljeno 21.1.2013]. Dostopno na URL: http://sl.wikipedia.org/wiki/HP-35

Naravni logaritem. [online]. [uporabljeno 9.12.2012]. Dostopno na URL:
http://sl.wikipedia.org/wiki/Naravni_logaritem

Slika 1: Dostop na: http://www.s9.com/images/portraits/21795_Napier-John.jpg (dostop 22.12.2012)

Slika 2: Dostop na: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/e/e1/NapLog.png (dostop 10.2.2013)

Slika 3: Dostop na: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Burgi.jpeg (dostop 22.12.2012)

Slika 4:
http://mathdl.maa.org/images/upload_library/46/Clark_Montelle_logarithms/Log_Calc-Figure7.jpg

Slika 5.: Slika knjižice SODNIK, A. 1923. Logaritmi: Petdecimalne logaritmične in goniometrične [trigonometrične] tabele. Ljubljana: Jug knjigarna. (Jan Kren)

Slika 6. Slika iz knjižice SODNIK, A. 1923. Logaritmi: Petdecimalne logaritmične in goniometrične [trigonometrične] tabele. Ljubljana: Jug knjigarna. (Jan Kren)

Slika 7: Jan Kren

Slika 8. Dostop na: http://homepage2.nifty.com/SUBAL/arch/Catenary1.jpg (dostop 15.1.2013)

Slika 9. Jan Kren

Slika 10:
http://i1.squidoocdn.com/resize/squidoo_images/250/draft_lens14285111module125997431photo_12869980151-baron-jurij-vega-portre

Slika 11: http://vlado.fmf.uni-lj.si/sola/1995/vega/denar.gif

Slika 12: Slika iz knjige: VEGA, Jurij. Vollständige Sammlung grösserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln, / nach Adrian Vlack's Arithmetica logarithmica und Trigonometria artificialis, verbessert, neu geordnet und vermehrt von Georg Vega,. Leipzig: Weidmannischen Buchhandlung. 1794. (Jan Kren)

Slika 13: Jan Kren

Slika 14: Jan Kren

Slika 15: Jan Kren

Slika 16: Jan Kren

Slika 17: Jan Kren

Slika 18: Jan Kren

Slika 19: Jan Kren

Slika 20: Jan Kren

Slika 21: Dostopno na:
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/82/CharlesBabbage.jpg/200px-CharlesBabbage.jpg (dostop: 21.1.2013)

Slika 22: Dostopno na: http://www.computerhistory.org/babbage/howitworks/img/4-1.jpg (dostop 21.1.2013

Slika 23: Dostopno na: http://liviathimotheo.files.wordpress.com/2012/10/ada-lovelace-009.jpeg (dostop 21.1.2013)

Slika 24: Dostopno na: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/8b/Babbage_Difference_Engine.jpg/320px-Babbage_Difference_Engine.jpg (dostop 23.1.2013)

Slika 25: Dostopno na: http://history-computer.com/Babbage/NextDifferentialEngines/Images/ScheutzPortrait.jpg (dostop 27.1.2013)

Slika 26: Dostopno na: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4e/Eniac.jpg (dostop 27.1.2013)

Slika 27: Dostopno na: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0e/HP_35_Calculator.jpg/220px-HP_35_Calculator.jpg (dostop: 29.1.2013)

Slika 28: Dostopno na: http://2020science.org/wp-content/uploads/2009/09/TI84plus.jpg (dostop: 10.2.2013)

Slika 29: Dostopno na:http://sydney.edu.au/science/uniserve_science/school/Seismograph/seismogramtn.jpg (dostop 1.2..2013)