Mladi za napredek Maribora 2015

32. srečanje

ALI JE 2^3 LAHKO LABOD?

Psihologija in pedagogika

Raziskovalna naloga

Avtor: URŠKA LIPOVEC

Mentor: DARJA ANTOLIN

Šola: II. GIMNAZIJA MARIBOR

Maribor, januar 2015

Mladi za napredek Maribora 2015

32. srečanje

ALI JE 2^3 LAHKO LABOD?

Psihologija in pedagogika

Raziskovalna naloga

Maribor, januar 2015

KAZALO

POVZETEK

Namen naše raziskovalne naloge je odgovoriti na vprašanje, kako dijaki, bodoči učitelji razrednega pouka in bodoči učitelji matematike vizualno prikazujejo potenco. Vizualizacija matematičnih konceptov je učinkovita učna in poučevalna strategija. Znotraj pouka matematike je najbolj prisotna v t.i. slikovnem nivoju pouka, kjer je koncept predstavljen z grafično reprezentacijo. V prispevku preverjamo prisotnost shematske vizualne upodobitve potence 2^3 pri gimnazijcih in študentih, bodočih učiteljih matematike in bodočih učiteljih razrednega pouka (N=483). Ugotovimo, da je ta vrsta reprezentacije prisotna le v malo več kot tretjini slik. Dodatno zaznamo, da so udeleženci mnogo bolj orientirani na podajanje rezultata kot na prikazovanje koncepta. Ob koncu predlagamo metodične napotke za vpeljevanje koncepta potence skozi strukturo ugnezdene cepitve, ki vodi k bolj konceptualnemu poznavanju tega sicer elementarnega matematičnega pojma.

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorici, za potrpežljivo, strokovno in izčrpno vodenje. Vedno, ko sem bila v dilemi ali preprosto brez volje, mi je stala ob stran, me spodbujala, pojasnjevala in pomagala. Pokazala mi je kako natančno in dolgotrajno je lahko delo z velikimi količinami podatkov pa tudi kako zanimive rezultate lahko na koncu dobimo.

1. UVOD

V raziskovalni nalogi poskušamo odgovoriti na vprašanje, kako dijaki, bodoči učitelji razrednega pouka in bodoči učitelji matematike s sliko prikazujejo potenco. Potenco smo izbrali, ker gre za relativno neraziskan, a preprost koncept, ki ponuja izziv tako dijakom kot študentom. Zadali smo si štiri hipoteze in sicer: 1) da bodo vrednost potence 2^3 kot 8 v največjem deležu podali slovenski bodoči učitelji matematike; 2) da bodo udeleženci v največjem deležu predstavljali pojem potence; 3) da bo med slovenskimi udeleženci prišlo do razlik glede na prisotnost matematike v predhodnem izobraževanju ter 4) da bo med slovenskimi udeleženci in udeleženci iz tujih držav prišlo do razlik.

V nalogi najprej opišemo dosedanje ugotovitve, ki smo jih zaledili v literaturi. Dosedanje raziskave so se osredotočile na slikovne predstavitve, ki so nastale ob reševanju kompleksnih matematičnih problemov s področja merjenja (Hegarty in Kozhevnikov 1999, Güler in Çiltaş 2011), geometrije (Presmeg, 1992) ali algebre (Rivera, 2010, David et al., 2014). S področja aritmetike je zaslediti raziskave z mlajšimi otroci s področja pojma števila in začetnih računskih operacij (Hodnik Čadež 2003, Rivera, 2014), raziskave s področja potence pa nismo zasledili. V empiričnem delu opišemo vzorec in postopek pridobivanja in obdelovanja podatkov ter rezultat, ki jih v nadaljevanju interpretiramo. Podamo kategorije, v katere smo razvrstili slike, ki so nastale ob navodilu Narišite risbo, ki prikazuje 2^3. Zaznali smo naslednje kategorije: ilustracija (npr. številka 2 je spremenjena v laboda), samo rezultat (slika vrednosti za 2^3), koncept (slika pojma, ki ga udeleženci zaznavajo kot 2^3) in drugo. Ugotovili smo, da je kategorija koncept največkrat zastopana, čeprav je včasih ponazorjen napačen pojem (npr. $3 \cdot 2$). Ugotovitev vidimo kot pozitivno, saj naj bi matematika pomenila bolj razumevanje pojmov kot pa izračunavanje rezultatov. Na koncu podamo nekaj predlogov za poučevanje potence, ki izhajajo iz naših ugotovitev. Menimo, da bi življenske situacije kot je npr. dve strehi s po dvema dimnikoma z dvema cevema, pripomoglo k še boljšem razumevanju pojma potenca.

Naša raziskava ima kar nekaj omejitev. Vzorec ni enakomerno porazdeljen med skupinami udeležencev (dijaki, bodoči učitelji matematike in bodoči učitelji razrednega pouka; slovenski bodoči učitelji razrednega pouka in tuji bodoči učitelji razrednega pouka). Kvalitativna metodologija, ki smo jo uporabili pri kodiranju podatkov, je včasih subjektivno zaznamovana z osebo, ki sliko opazuje in ji pripiše kategorijo. Kljub temu menimo, da so rezultati pomembni in lahko podajo sliko o načinu vizualne predstavitve potence.

2. POTENCA KOT MATEMATIČNI POJEM

Potencíranje je matematična operacija, ki jo zapišemo v obliki a^n. To obliko zapisa imenujemo potenca. Število *a* se imenuje osnova potence, število *n* pa je eksponent ali stopnja potence. Vrednost potence s celim eksponentom izračunamo po naslednjih pravilih

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a - n \text{ faktorjev.}$$

Potenca je pomemben matematični koncept, ki je koristen pri razumevanju različnih življenjskih pojavov in ga lahko že mlajšim učencem prikažemo na zanimiv način. Potenco v petem razredu lahko uvedemo z anekdoto o šahu (Tahan, 1998). Obstaja več različnih zgodb o nastanku igre šah. Ena izmed njih vključuje tudi potenco. Prvič je zapisana v Shahnameh, epski zgodbi, ki jo je napisal perzijski pesnik Ferdowsi okrog leta 1000. Zgodba govori o tem, da je izumitelj igre šah svojo igro pokazal vladarju dežele. Vladar je bil tako zadovoljen, da je izumitelju dovolil, da si izbere nagrado po želji. Izumitelj, ki je bil zelo moder človek, je prosil, da mu na prvo šahovsko polje položijo eno zrno pšenice (riža) in na vsako naslednje polje dva krat več zrn. Vladar, ki mu matematika ni bila blizu, je sprejel izumiteljevo željo in se počutil celo užaljenega zaradi tega, ker je njegova želja tako majhna. Ko pa je izumitelju poskušal izplačati nagrado, je ugotovil, da v celotni deželi ni dovolj pšenice. Zgodba ima dva možna konca. V prvi izumitelj postane novi kralj, v drugi pa ga obglavijo.

Število zrn na danem polju lahko izračunamo s potenco 2^n. Število vseh zrn torej izračunamo kot :

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 18446744073709551615$$

Če bi to pšenico pospravili v silos s tlorisom v obliki kvadrata s stranico *100* m, bi bil silos visok *1845* km (Lipovec, 2006). Ta silos bi bil višji ob Mt. Everesta, ki je visok malo manj kot *9* km. Če bi plezali na ta silos, bi nam po *100* km dodelili status astronavta, saj bi zapustili zemeljsko ozračje.

2.1. Kako poučevati potenco?

Potenco učencem običajno prikažemo kot produkt enakih faktorjev, kar pa ni najbolj smiselno. Potence z eksponentom, ki ni naravno število, kot npr. $2^{-1}, 2^{\frac{1}{2}}$ ne morejo slediti tej vpeljavi, kajti število faktorjev ne more biti npr. -1. Zato sta Conferey in Smith (1995) kot alternativo predlagala prikaz skozi različne stopnje originala. Ta pristop sta Conferey in Smith poimenovala cepitev. Bistvo tega pristopa je v prikazovanju situacij, kjer prikažemo več stopenj originala. Pojasnimo na primeru množenja kot seštevalne strukture in potenciranja kot cepitvene strukture. Pri množenju $4 \cdot 3$ je dejavnost povezana z določanjem skupin s po tremi objekti, ki se ponovijo štirikrat, npr. štiri košare s po tremi jabolki. Original je skupina štirih (jabolk v košari), ki se na istem nivoju ponovi trikrat. Pri potenciranju 3^4 je pripadajoča dejavnost vezana na prikazovanje več kopij treh objektov, ki se štirikrat cepijo v različnih nivojih, npr. v mestu so tri ulice, v vsaki ulici so tri hiše, v vsaki hiši tri tričlanske družine. Original je skupina treh, ki se hierarhično spušča po nivojih ulica-hiša-družina. Gre torej za tvorjenje več kopij originala Kot primer navajata npr. zaporedno razpolavljanje (razpolavljanje celote na dva dela, ki nato postaneta celota in jo spet razpolovimo). Za razliko od seštevalnih struktur, kjer je bistvo v določanju enote in preštevanju ponavljajočih se verzij le-te, je pri cepitvi poudarek na odnosu ena proti mnogo verzij.

2.2. Potenca kot nelinearen pojem

Splošen primer razpolavljanj je povečevanje/zmanjševanje objekta v danem razmerju. To dejavnost je podrobno proučeval de Bock s sodelavci (2007). Ugotovili so, da človeški um trpi za »iluzijo linearnosti« tj. željo po apliciranju pravila *če se a poveča/zmanjša n-krat, se tudi b poveča/zmanjša n-krat.* Tovrstno razmišljanje temelji na matematičnem pojmu premega sorazmerja oz. linearne odvisnosti. V vsakdanjem življenju mnogokrat uporabljamo linearno sklepanje: če kupimo dvakrat več stvari, bo cena dvakrat večja; če gradimo tri enake hiše, potrebujemo trikrat več delavcev kot za eno hišo; če hodim štirikrat hitreje, porabim štirikrat manj časa.

Linearno razmišljanje pa odpove že pri izračunavanju ploščine. Če stranico kvadrata povečamo dvakrat, se ploščina ne poveča dvakrat ampak štirikrat. Ploščino računamo s potenco stopnje 2. Podobna težava se pojavi pri volumnu, ki ga izračunamo s potenco stopnje 3. Če stranico posode v obliki kocke povečam trikrat, se volumen posode poveča 27-krat. Tako razmišljanje imenujemo nelinearno.

Težave z nelinearnim sklepanjem so zabeležene v več legendah. De Bock in sodelavci (2007) navajajo legendo, v kateri prebivalci Aten leta 430 pr.n.št. vprašajo Apolov orakelj v Delosu kako zaustaviti kugo. Prerokinja odgovori, da morajo podvojiti velikost oltarja. Atenci podvojijo vsako stranico oltarja (v obliki kvadra), a kuga se nadaljuje. Prebivalci so namreč oltar povečali 8-krat, kajti prostornina kvadra (predvidena oblika oltarja), se obnaša v skladu s potenco stopnje 3.

Povečevanje v razmerju je v primeru ploščine (potenciranje s stopnjo 2) prvi nelinearni koncept, ki ga predstavimo učencem. V svoji seriji raziskav so se de Bock in ostali (2007) ukvarjali pretežno s kvadriranjem tj. z idejo »2-krat večja stranica, 4-krat večja ploščina« in že ta, najpreprostejši primer potence, se je izkazal kot zelo težek za približno 14 let stare učence. Pri povečevanju prostornine (potenciranje s stopnjo 3) so bili rezultati še slabši. Predlagali so, da bi že mlajši učenci pri konceptu potence posebno pozornost posvetili življenjskim primerom. Navajajo več primerov: kako izračunati količino lesa za pasjo hišo, če se dolžina, višina in širina hiše povečajo dvakrat; kako izračunati količino barve za plakat, če se dolžina in širina plakata povečata dvakrat.

Potenca je torej pomemben matematični koncept s stališča raziskovanja napačnih predstav, ki so vgrajene v učenčeve miselne sheme.

3. PROCEDURALNI IN KONCEPTUALNI TIP MATEMATIČNEGA ZNANJA

Matematični pojmi se vgrajujejo v miselne sheme. To so neke vrste zemljevidi v možganih. Ko se učimo nov pojem, ga povežemo z ostalimi pojmi, ki jih že poznamo. Npr. pojem razmerja povežemo z deljenjem, kasneje pa pojem kotnih funkcij povežemo s pojmom razmerja. Bolj kot je ta naš miselni zemljevid bogat, tj. več kot je povezav med pojmi, bolje razumemo.

Matematično znanje, tj. tudi znanje potence, lahko opišemo skozi dva tipa znanja, proceduralni tip znanja in konceptualni tip znanja. Kot temeljna tipa znanja je konceptualno in proceduralno znanje predlagal Van de Walle (2003). Konceptualno znanje zaznamujejo povezave med pojmi v kognitivni shemi. Kvaliteto in kvantiteto teh povezav opredelimo kot razumevanje danega pojava (Skemp, 1976). Proceduralno znanje pa predstavljajo pravila postopki in simboli, ki so potrebni za rešitev neke matematične naloge. Proceduralni tip znanja za primer izraza 2^3 učencu omogoči izvedbo računskega postopka, ki poda vrednost izraza, to je 8. Konceptualni tip znanja pa učencu omogoči povezovanje tega izraza tako z drugimi matematičnimi pojmi (npr. množenje, potenčna in eksponentna funkcija) kot predstavitev izraza v okviru življenjske situacije (npr. dva otroka, vsak ima dve roki in v vsaki roki vsak drži po dva balona). Pristop, ki ga predlagata Conferey in Smith, daje prednost konceptualnemu tipu znanja pred proceduralnim. Tudi Van de Walle (2003) poudarja, da v šoli pri matematiki preveč poudarjamo postopke, ki vodijo do pridobivanja rezultatov (proceduralno znanje) in manj poudarjamo povezovanje med pojmi.

4. VIZUALNE REPREZENTACIJE MATEMATIČNIH POJMOV

Reprezentacija oz. predstavitev je način kako matematični pojem ponazorimo. Matematični pojmi so abstraktni in jih pravzaprav lahko predstavljamo le miselno. Zaradi lažjega poučevanja pa jih poskušamo predstaviti tudi na bolj otipljive načine. Otroku npr. pokažemo tri jabolka in na tem primeru ponazorimo/reprezentiramo pojem števila 3. Ta reprezentacija je bila konkretna, če bi otroku pokazali sliko treh jabolk, bi šlo za vizualno reprezentacijo. Že v začetku osnovne šole se prvi matematični pojmi ponazarjajo s pomočjo slik.

Vizualne reprezentacije/predstavitve matematičnih pojmov so bogato raziskovalno področje. Kljub širokem naboru raziskav, so rezultati na tem področju še vedno nejasni. Vizualizacija se zdi dobra metodična rešitev pri pouku matematike. Güler in Çiltaş (2011) pozivata učitelje naj v pouk vključujejo več vizualnih reprezentacij. Nazornost in povezava z izkušnjami učencem pomagata vzpostaviti odnos med njihovim realnim svetom in matematičnim abstraktnim svetom. Po drugi strani pa lahko konkretna slikovna predstava reševalce matematičnih problemov odvrne od bistva (Presmeg 1992), če se preveč posvetijo nepomembnim podrobnostim na sliki. Otrok, ki opazuje sliko treh jabolk, bi naj zanemaril barvo in obliko jabolk in se posvetil le podatku, da gre za tri jabolka. Zato Hegarty in Kozhevnikov (1999) vizualne reprezentacije delita na shematske in slikovne. Kot shematske opredelita tiste vizualne reprezentacije, ki prikazujejo bistvene odnose problema. Slikovne reprezentacije pa karakterizira konkretna vizualizacija objektov, ki nastopajo v problemu. V nadaljevanju podrobneje opišemo značilnosti shematskih in vizualnih reprezentacij za zgodnje učenje matematike, kajti potenca se kot pojem pojavi že v petem razredu.

4.1. Shematske in slikovne vizualne reprezentacije

Pouk matematike v nižjih razredih osnovne šole poteka od konkretnega preko slikovnega k simbolnemu nivoju. Na sliki 1 sta situaciji, ki sta na razredni stopnji prepoznani kot slikovni nivo. Gre za primer slikovne vizualne reprezentacije. Iz slike namreč niso razvidni odnosi med matematičnimi pojmi vezanimi na prostornino (liter in hektoliter) .Slika nam ne pomaga pri prepoznavanju odnosa $1\,hl = 100\,l$, čeprav ta podatek nujno potrebujemo za reševanje naloge. Učenčeva pozornost se usmeri v nepomembne lastnosti kot npr. material, iz katerega je izdelan sod. Slika besedilni nalogi sicer vizualno doda kontekst pridelave vina, morda tudi uzavesti količinsko vrednost merske enote. Pri drugi nalogi slike vedra, klobuka itd. le nadomeščajo v matematiki sicer bolj običajne oznake (npr. x, y,..*)* in služijo predvsem motivacijskim namenom.

Slika 1: dva tipa slikovne vizualne reprezentacije (kontekstualizacijska in motivacijska)

Vir: http://eucbeniki.sio.si/test/iucbeniki/index.html, Asikainen, Haapaniemi, Mörsky, Tikkanen, & Voima (2008)

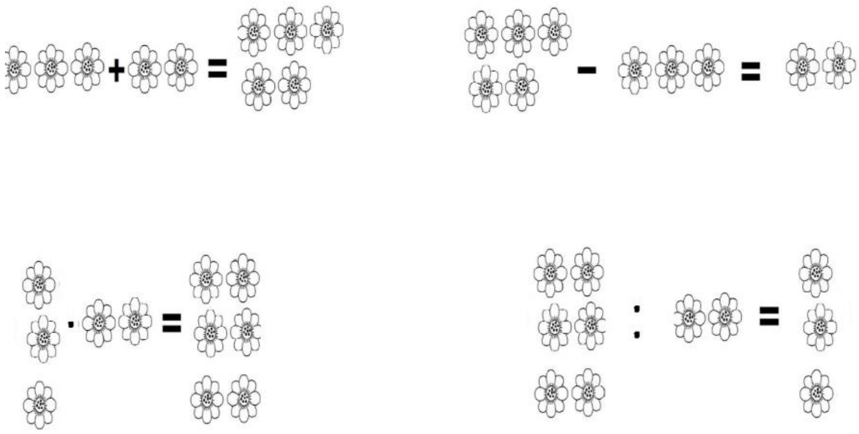
Vizualne reprezentacije so shematske, če prikazujejo bistvene (prostorske) odnose koncepta, slikovne vizualne reprezentacije pa karakterizira le konkretna vizualizacija objektov, ki nastopajo v problemu.

Shematska vizualna reprezentacija števila 15 vidimo na levi strani slike 2. S postavitvijo 10+5 nakažemo mestnovrednostni kocept. Slikovna reprezentacija števila 15 pa je na desni strani slike 2.

Slika 2 Shematska vizualna in slikovna vizualna reprezentacija števila 15

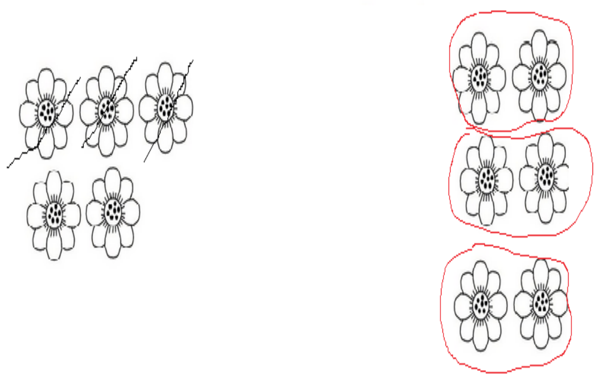
Leva slika pokalov na sliki 2 spodbuja sposobnost reševanja matematičnih problemov, desna pa to sposobnost lahko celo zavira. Pri levi sliki nas oblike usmerijo k preštevanju predmetov medtem ko nam desna slika koncentracijo usmeri v opazovanje različnih barv, materialov in oblik.

Shematska vizualna reprezentacija koncepta se za učence večkrat izkaže težja kot sam proceduralni tj. računski del. Učitelji zaradi primanjkljaja shematskih vizualnih reprezentacij v njihovih virih izpostavljajo težave, ki nastanejo, ko iz konkretnega manipuliranja s predmeti preidejo na slikovni nivo(Hodnik Čadež 2014). Učenci na primer iz slike, ki prikazuje 5 objektov od katerih sta 2 prečrtana, zapišejo $3 - 2$. Če želimo učencem »olajšati« zapis računa ob sliki, je včasih uporabljeno prepletanje slike in simbolov (npr. Children's Addition b.d.). Primer takega prepletanja za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje prikazuje slika 3.



Slika 3:Prepletanje slike in simbolov (seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje)

Za odraslo osebo so tovrstni prikazi jasni, otroci pa se z matematičnimi simboli šele seznanjajo in jih šele povezujejo s koncepti, ki jim ustrezajo (Antolin & Lipovec, 2015). Risba deljenja je še posebej nejasna. Dokaj dobro (če poznamo simbol za deljenje) prikaže šest rož, ki jih delimo v skupine po dve roži. Dobimo tri skupine s po dvema rožama, česar pa risba ne prikazuje. Morda bi bilo bolje na osnovni risbi šestih rož le obkrožiti skupine po dve. S tem bi prikazali tako množenje kot deljenje ($3 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $6 \div 2$, $6 \div 3$) kot je prikazano na sliki 4.



Slika 4:Shematske vizualne predstavitve (seštevanje in odštevanje, množenje in deljenje)

5. PROBLEM IN NAMEN

Dosedanje raziskave so se osredotočile na reprezentacije, ki so nastale ob reševanju nalog s področja merjenja, geometrije, algebre in aritmetike. Raziskave s področja potence nismo zasledili. Potenco smo izbrali, ker gre za relativno neraziskan, a preprost koncept, ki ponuja izziv tako dijakom kot študentom. Kljub temu nismo našli podatkov o tem kako učenci s sliko predstavijo potenco. Zato smo kot problem naše raziskave zastavili vprašanje: Kakšne so lahko slikovne ponazoritve potence?

Namen raziskave je torej ugotoviti na kakšne načine lahko vizualno prikažemo potenco. Podatke smo zbrali na vzorcu dijakov in študentov. Za tako strukturo vzorca smo se odločili, ker imajo dijaki in študenti že izgrajen pojem potence in ga lahko ob preprostem navodilu *Nariši risbo potence* tudi podajo.

6. RAZČLENITEV, PODROBNA OPREDELITEV

Ker je problem slikovne ponazoritve potence zelo širok, smo se omejili na konkreten preprost primer. Izbrali smo potenco 2^3. Ker sta osnova 2 in stopnja 3 različni števili, ju bomo iz slike lahko razbrali. Odločili smo se tudi, da bomo med udeležence uvrstili dijake in študente bodoče učitelje. Menili smo, da bodo bodoči učitelji podali najbolj bogate slike, ker se med študijem poglabljajo v načine kako matematične pojme pojasniti učencem. Te slike nam bodo ponudile osnovo za določanje različnih tipov slik potence. V vzorec smo vključili tudi dijake, da bi zaznali morebitne pomanjkljivosti v slikovnih ponazoritvah. Beležili smo tudi ali je iz slike bilo možno razbrati pravilno vrednost potence. Iz lastnih izkušenj namreč vemo, da se včasih zgodi, da tudi dijaki napak izračunajo 2^3 kot $2 \cdot 3$.

V nadaljevanju podajamo raziskovalna vprašanja in hipoteze. Uporabljena metodologija temelji na kvalitativnem pristopu v podatkih utemeljene teorije. Šele takrat, ko podatke že obdelamo, lahko oblikujemo ugotovitve. Predviden metodološki pristop zato ne vključuje postavljanja hipotez. Ker pa pedagoška metodologija raziskovanja vzpodbuja zastavljanje eksplicitnih hipotez, jih v nadaljevanju navajamo. Zaradi uskladitve obeh metodologij so hipoteze oblikovane nekoliko bolj ohlapno.

6.1. Raziskovalna vprašanja

Na osnovi pregleda literature zastavljenega problema in namena raziskovalne naloge, so se nam porodila naslednja raziskovalna vprašanja.

V1: Kateri udeleženci bodo v največjem deležu podali pravilno vrednost potence?

V2: Katera kategorija slik se bo pojavila v največjem deležu?

V3: Kakšne bodo razlike med različnimi skupinami udeležencev?

V4: Ali bo razlika med slovenskimi udeleženci in udeleženci iz tujih držav?

6.2. Raziskovalne hipoteze

Na raziskovalna vprašanja smo odgovorili z naslednjimi trditvami.

V največjem deležu bodo vrednost potence 2^3 kot 8 podali slovenski bodoči učitelji matematike. - H1. Napake pri izračunavanju vrednosti potence kot nelinearnega pojma so bile v literaturi že zaznane (de Bock idr., 2007). Zaradi tega sklepamo, da bodo najuspešnejši bodoči učitelji matematike.

Udeleženci bodo v največjem prikazovali pojem/ koncept. – H2. Težavnost pojma je povezana z zmožnostjo učenca, da poda shematsko vizualno reprezentacijo (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Ker je potenca elementaren pojem, pričakujemo, da se do srednje šole razvije sposobnost podajanja shematske reprezentacije.

Med udeleženci bo prišlo do razlik glede na prisotnost matematike v predhodnem izobraževanju. - H3. Višja kot je stopnja prisotnosti matematike v predhodnem izobraževanju močnejše bo razumevanje pojma (Van de Walle , 2003), zato menimo, da bo zaradi stukture vzorca (dijaki in študenti) prišlo do razlik.

Večina dijakov bo vrednost izraza potence podala pravilno, za prikaz bodo uporabili koncept in sicer prepletanje slik in simbolov. - H3.1. Predvidevamo, da večina dijakov poglobljeno razume pojem potence, ker pa dijaki niso v stiku z didaktiko oz. nimajo predhodnega znanja o tem, kako potenco predstaviti otrokom (jo učiti) pa bodo za predstavitev uporabljali preplet slik in simbolov reprezentacije.

Bodoči učitelji matematike bodo vsi podali pravilni odgovor, za prikaz bodo uporabili vrednost potence.- H3.2. Sklepamo da bodo vsi bodoči učitelji matematike podali pravilno vrednost potence. Predvidevam tudi, da bodo za odgovor podali rezultat, saj je njihovo razumevanje potence tako globoko, da ga najlažje predstavijo na simbolni način.

Bodoči učitelji razrednega pouka bodo pravilno vrednost potence podali v manjšem deležu kot dijaki ali bodoči učitelji matematike, za prikaz bodo uporabili koncept in sicer prepletanje slikovno vizualne in simbolne reprezentacije. - H3.3. Bodoči učitelji razrednega pouka izkazujejo slabše razumevanje matematike (Bezgovšek Vodušek, 2015). Dodajanje simbolov v slikovno shematske ponazoritve kaže na proceduralni tip znanja, oziroma željo po računskem postopku, ki izhaja iz manj pogljobljenega razumevanja pojma.

Med slovenskimi udeleženci in udeleženci iz tujih držav bo prišlo do razlik. Razlike v odgovorih lahko povežemo z razlikami med šolskimi sistemi – H4. Različne mednarodne raziskave kot na primer PISA in TIMSS kažejo, da razlike v šolskih sistemih povzročajo razlike v matematičnih dosežkih učencev. Če šolski sistem omogoča izbiranje nivoja matematike na neki stopnji, se to odraža tudi na matematičnem znanju.

7. METODOLOGIJA

Uporabljena je neeksperimentalna metoda pedagoškega raziskovanja in sicer smo izbrali preplet kvalitativne in kvantitativne metodologije s principi v podatkih utemeljene teorije.

Najprej bomo predstavili potek in rezultate empirične raziskave. Pri rezultatih se bomo osredotočili na dva vidika - na pravilnost podane vrednosti potence in na koncept, ki so ga udeleženci upodobili. Statistično bomo analizirali ali je prišlo do razlik med skupinami udeležencev. Preverili bomo ali kategorizacija na shematske vizualne in slikovne vizualne reprezentacije, ki sta jo predlagala Hegarty in Kozhevnikov (1999), ustrezno opiše naše podatke. Na osnovi teh podatkov bomo predlagali shematsko vizualno reprezentacijo, ki bi učencem lahko pomagala pri reševanju problemov, ki vključujejo potence.

7.1. Vzorec

Vzorec naše raziskave sestavlja 483 udeležencev. Podrobnejšo strukturo vidimo na diagramu 1. Dijakov splošne gimnazije je 147 (30,4 %), 48 (9,9 %) je bodočih predmetnih učiteljev matematike Fakultete za naravoslovje in matematiko (FNM UM) v Mariboru in 164 (34,0 %) je bodočih učiteljev razrednega pouka Pedagoške fakultete v Mariboru (PEF UM). Izven Slovenije pa je v vzorcu zajetih 79 bodočih učiteljev razrednega pouka iz Španije ter 45 bodočih učiteljev razrednega pouka iz Slovaške, skupaj 124 (25,7 %). Tuji študenti so bili anketirani na Pedagoški fakulteti Univerze Cordoba (PEF UC) in Pedagoški fakulteti Katoliške univerze Ružomberok (PEF UR). Ker je bilo študentov izven Slovenije malo, smo jih združili v eno skupino.

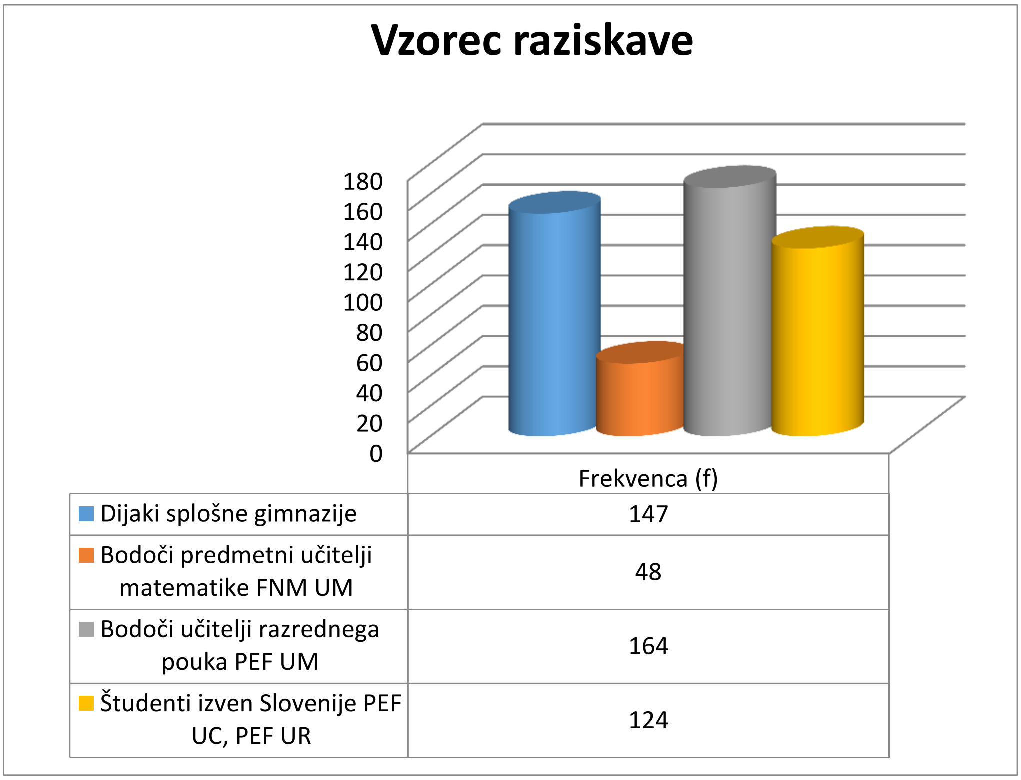


Diagram: 1: Vzorec raziskave

7.2. Postopek pridobivanja in obdelave podatkov

Raziskava je potekala od jeseni 2012 do poletja 2013. Sodelujoči so prejeli zelo kratko navodilo in sicer: »Narišite risbo, ki prikazuje 2^3«. Zaradi objektivnosti dodatna pojasnila niso bila podana. Prejete odgovore smo najprej ovrednotili glede na pravilnost vrednosti potence, nato pa smo s kombiniranimi metodami kvantitativne in kvalitativne analize podatke obdelali. Uporabili smo kvalitativno vsebinsko analizo, pri kateri smo skozi sistematični proces kodiranja večjih količin enot gradiva v zbranem gradivu iskali značilne teme oz. kode. Te teme smo nato povezali v kategorije. Pri kodiranju smo sledili šestim korakom kvalitativne vsebinske analize (Mesec, 1998): urejanje gradiva, določitev enot kodiranja, kodiranje, izbor in definiranje relevantnih pojmov in oblikovanje kategorij, definiranje kategorij in oblikovanje teoretične razlage ali pojasnitve. V osrednjem delu kodiranja podatkov smo objektivnost zagotavljali s triangulacijo. Kode so bile najprej določene od avtorice, kode je nato na naključnih primerih preverila mentorica raziskovalne naloge, morebitna razhajanja so bila rešena skozi diskusijo. Pri procesu kodiranja smo uporabili induktivni pristop, kar pomeni, da si pred samim kodiranjem nismo pripravili seznama kod, temveč smo jih izpeljali neposredno iz podatkov med analizo besedila. Skozi proces kodiranja so se oblikovali natančni kriteriji za pripadnost slike dani kategoriji. Po zaključenem kodiranju smo podatke obdelali z metodami kvantitativne metodologije in jih predstavili skozi deskriptivno in inferenčno statistiko. Uporabili smo χ^2 oz., kjer je bilo potrebno likelihood ratio oz. Kullbackov test $\chi^2_{(\mathrm{lr})}$. Za lažje izračunavanje smo uporabili programski paket SPSS.

8. REZULTATI

V nadaljevanju bomo najprej opisali kategorije, ki so se izoblikovale na osnovi podatkov. Opis bomo podkrepili s konkretnimi primeri risb, ki so jih podali anketiranci. Slike smo klasificirali v naslednje kategorije:

- ilustracija (Kategorija 1),
- samo rezultat (Kategorija 2),
- koncept (Kategorija 3),
- ostalo (Kategorija 4).

V nadaljevanju kategorije podrobneje predstavimo z ilustrativnimi primeri.

8.1. Opis kategorij

8.1.1. Kategorija 1: Ilustracija

V kategoriji 1 so odgovori, ki ne prikazujejo niti rezultata (vrednosti potence) niti koncepta potence kot matematične operacije. Ta kategorija nas je najbolj presenetila, saj tovrstnih odgovorov nismo pričakovali.

Zaznali smo dve kodi. V prvem, najbolj presenetljivem primeru, so udeleženci zapis 2^3 le »okrasili«, dorisali so ji dodatne elemente in jo s tem spremenili v sliko. Številko 2 so preoblikovali v neko figuro (npr. račka), podobno so storili s številko 3 (npr. jabolko ali srček). Slika 5 prikazuje dva primera ilustracije. Levo je številka dve spremenjena v laboda, številka tri pa v metuljčka zaradi podobnosti med simbolom in objektom.

Druga koda, ki smo jo zaznali, je nekoliko bližje matematičnem pomenu števil dve in tri, ki nastopata v izrazu potence. Ker slika še vedno ne prikazuje pojma/koncepta računske operacije, smo to kodo uvrstili v isto kategorijo. Primer slike lahko opazujemo na sliki 5 desno. Število 2 je prikazano z dvema medvedkoma, stopnja potence, tj. število 3 pa je prikazano s tremi baloni, ki so prostorsko postavljeni desno nad medvedka, kot je tudi stopnja zapisana desno zgoraj nad osnovo.

Obe risbi na sliki 5 ne nosita nobene značilnosti koncepta potence, gre le za preoblikovanje simbolnega zapisa v risbo. V delitvi med shematskimi in slikovnimi ponazoritvami zato ilustracijo razvrstimo pod slikovne reprezentacije.

Slika 5: Tip odgovora – ilustracija (avtor: bodoča učitelja razrednega pouka - Ružomberok)

8.1.2. Kategorija 2: Samo rezultat

Udeleženci so z risbami včasih prikazovali samo rezultat izraza 2^3, tj. število *8.* Rezultat je bil podan na dva načina - kot simbol tj. števka 8 ali kot grafična ponazoritev števila 8, zato smo znotraj te kategoriji izoblikovali dve podkategoriji in sicer:

2.1 simbolna ponazoritev rezultata,
2.2 slikovna ponazoritev rezultata.

Slika 6 levo prikazuje številko 8, ki je verjetno zaradi navodil preoblikovana v snežaka (kategorija 2.1), desno pa je narisanih 8 pik (kategorija 2.2). Leva risba nosi značilnosti ilustracije števila 8, a smo jo razvrstili v kategorijo Samo rezultat, ker je pretežna sporočilna vrednost slike količinska vrednost rezultata potence.

Slika 6: Samo rezultat na simbolni in slikovni način (avtor: bodoči učitelj matematike, dijak)

8.1.3. *Kategorija 3: Koncept*

Kategorija 3 vključuje odgovore znotraj katerih je bilo zaznati prikazovanje koncepta neke računske operacije. Udeleženci so se s tem odgovorom odmaknili od golega podajanja rezultata in so poskušali prikazati operacijo. Znotraj te kategorije smo izoblikovali dve podkategoriji: prikaz potence in prikaz drugega koncepta. Pri potenci smo dodatno ločevali med shematsko vizualno reprezentacijo potence in prepletanjem slike in simbola.

Kategorija Koncept se torej deli na:

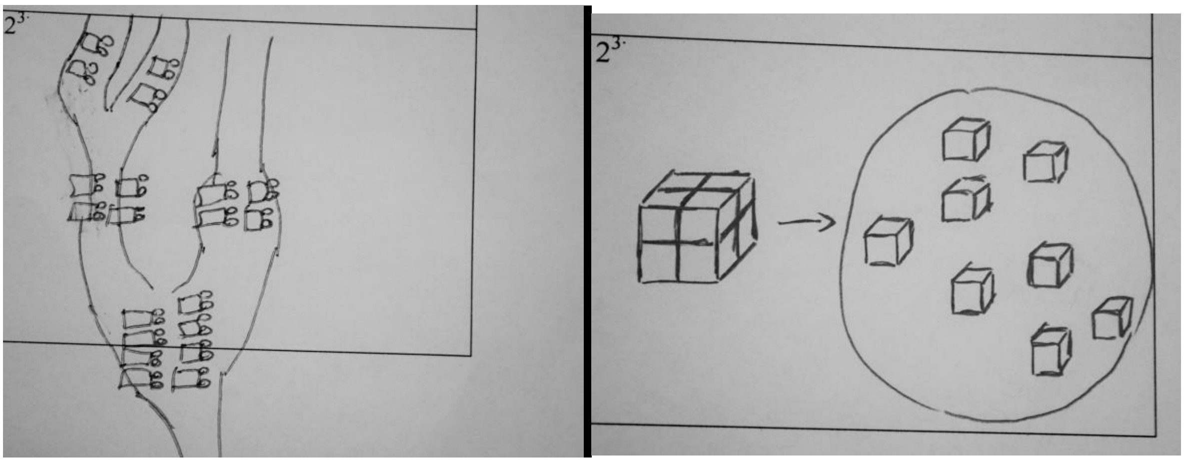
3.1 potenca

3.1.1 shematska vizualna reprezentacija

3.1.2 prepletanje slikovno vizualne in simbolne reprezentacije

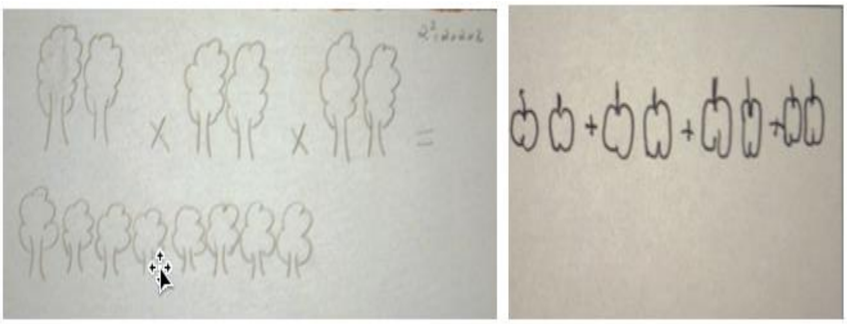
3.2 drug koncept

Na sliki 7 vidimo primera, kjer je shematsko vizualno prikazan koncept potence (kategorija 3.1.1). Levo je predstavljen kot število avtomobilov, ki se razvrščajo v ceste, desno pa kot število kock, ki so potrebne za izgradnjo večje kocke z robom 2.



Slika 7: Koncept potence – shematska vizualna reprezentacija (avtor: dijak, bodoči učitelj razrednega pouka)

Koncept je bil včasih prikazan s prepletanjem slikovne vizualne reprezentacije in simbolov, kar prikazuje slika 8 (kategorija 3.1.2). Vidimo slikovne značilnosti predmetov (dreves, jabolk), med temi predmeti pa so vstavljeni matematični simboli (plus, krat).

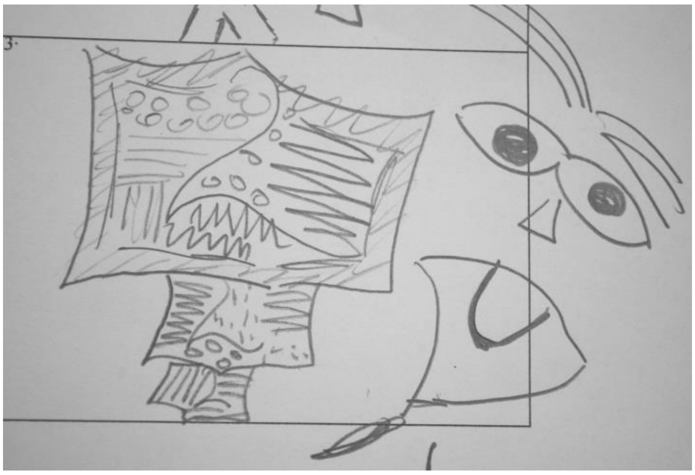


Slika 8 Prepletanje slikovne in simbolne reprezentacije za koncept potence 2^3 in prepletanje slikovne in simbolne reprezentacije za koncept 2+2+2+2 (avtor: dijak, dijak).

Na sliki 8 lahko opazujemo tudi razliko med prikazovanjem koncepta potence (kar smo pričakovali) in nekega drugega koncepta. Na levi risbi je prikazan koncept potence (kategorija 3.1), desno pa je prikazan drug koncept 2+2+2+2 (kategorija 3.2). Rezultat je sicer v obeh primerih enak osem, vendar gre za drug koncept, tj. seštevanje enakih seštevancev. Primer ponazarjanja drugega koncepta je še bolj jasno izražen na sliki 10, kjer udeleženci namesto potence ponazarjajo množenje $3 \cdot 2$.

8.1.4. Kategorija 4:Ostalo.

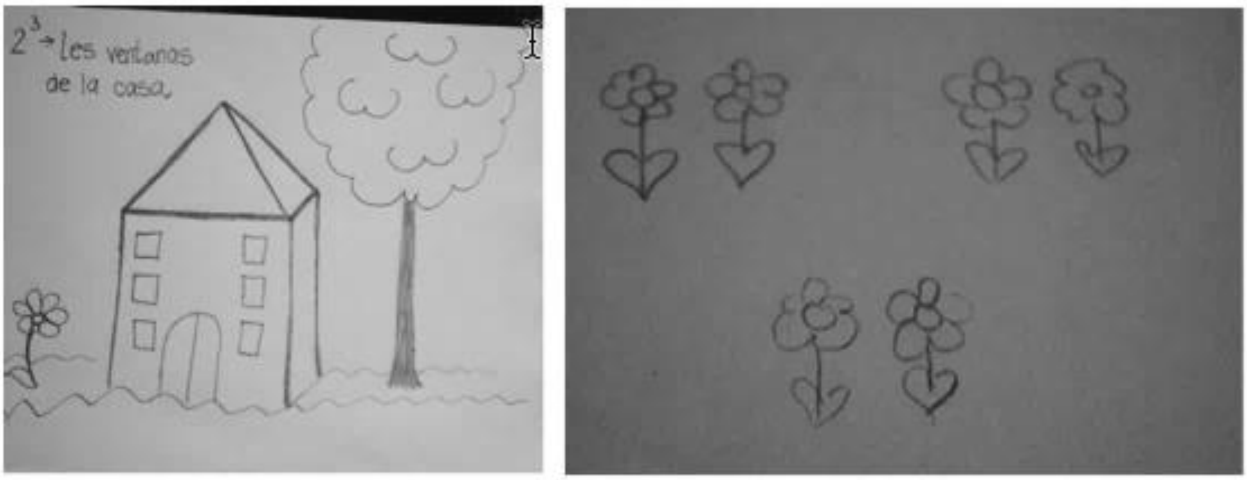
V kategorijo ostalo smo uvrstili anketirance, ki odgovora niso podali in odgovore, ki jih je bilo nemogoče razvrstiti v druge kategorije. V kategoriji Ostalo so zajeti tako tisti anketiranci, ki odgovora niso podali, kot tisti, katerih odgovora ni bilo možno razvrstiti.



Slika 9: Ostalo (avtor: dijak)

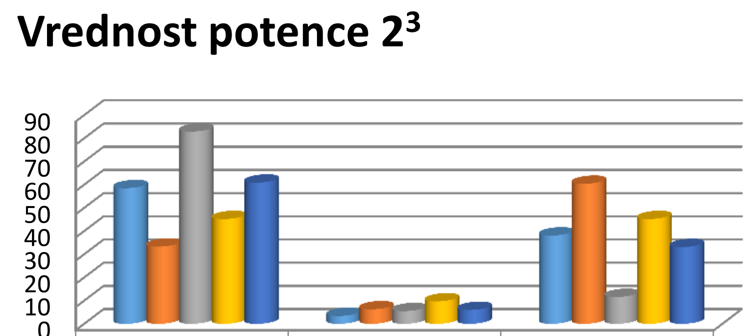
8.2. Rezultati glede na pravilnost vrednosti potence

Najprej poglejmo rezultate glede na pravilnosti vrednosti potence. Če je bilo na risbi zaznati 8 objektov, se je rezultat vrednotil kot prepoznano pravilen, če je bilo zaznati drugačno število objektov pa kot prepoznano nepravilen. Če vrednosti ni bilo mogoče prepoznati, ne moremo trditi, da anketiranci pravilne vrednosti niso poznali. Prazna polja (anketiranec ni odgovoril) so se vrednotila posebej. Na spodnji sliki so predstavljeni odgovori, ki smo jih prepoznali kot nepravilne.



Slika 10: Vrednost 2^3 je prikazana kot $3 \cdot 2$ *oz. 6 oken na hiši/ rož (avtor: bodoči učitelj razrednega pouka Cordoba, dijak).*

Vrednost potence 2³ je kot 8 na tak ali drugačen način podalo 60,9 % vseh sodelujočih, 33,1 % sodelujočih je podalo odgovor, iz katerega ni bilo možno razbrati vrednosti izraza (prim. slika 1) oz. odgovora niso podali, 6,0 % pa je podalo vrednost, ki je bila prepoznana kot nepravilna tj. različna od 8 (prim. slika 10). Med 29 udeleženci, ki so podali prepoznano nepravilen odgovor, je 12 tujih bodočih učiteljev razrednega pouka, 9 slovenskih bodočih učiteljev razrednega pouka, 5 dijakov in 3 bodoči učitelji matematike.



	Število udeležencev (f %), ki so podali rezultat 8	Število udeležencev (f %), ki so podali rezultat različen od 8	Število udeležencev (f %), pri katerih rezultata ni bilo možno določiti
Dijaki gimnazijskega programa	58,5	3,4	38,1
Študenti FNM UM (bodoči učitelji matematike)	33,3	6,3	60,4
Študenti PEF (bodoči učitelji razrednega pouka)	82,9	5,5	11,6
Tuji študenti PEF UC in PEF UR (bodoči učitelji razrednega pouka)	45,2	9,7	45,2
Skupaj	60,9	6	33,1

Diagram: 2: Vrednost potence 2^3

Ugotovimo, da je bil delež prepoznano nepravilnih odgovorov majhen. Diagram 2**Napaka! Neveljavno samosklicevanje zaznamka.** podrobneje prikazuje podatke. Vidimo, da so vrednost izraza kot 8 v največjem deležu podajali slovenski bodoči učitelji razrednega pouka (82,9 %). Ugotovimo lahko, da so prepoznano nepravilno vrednost (skoraj vedno 6) v največjem deležu podali bodoči učitelji razrednega pouka s Slovaške in Španije. Ugotovimo, da so dijaki podali približno17 - krat več prepoznanih pravilnih odgovorov kot nepravilnih, bodoči učitelji razrednega pouka iz Slovenije približno15-krat več prepoznanih pravilnih odgovorov kot nepravilnih, bodoči učitelji razrednega pouka iz tujine in bodoči učitelji matematike pa približno 5-krat več prepoznanih pravilnih kot prepoznanih nepravilnih odgovorov za vrednost potence 2^3.

Dodatno ugotovimo, da so dijaki najmanjkrat odgovorili prepoznano nepravilno in da so se bodoči učitelji razrednega pouka na Slovaškem in v Španiji odrezali slabše kot njihovi slovenski kolegi. Razlike med skupinami pri pravilnosti odgovora so tudi statistično značilne ($\chi^2_{(lr)}$ = 74,280 P=0,000).

8.3. Rezultati glede na delež zastopanosti kategorij

V nadaljevanju predstavljamo rezultate glede na kategorijo odgovorov.

	Kategorija 1 - ilustracija (%)	Kategorija 2 - Samo rezultat (%)	Kategorija 3 - Koncept (%)	Kategorija 4 -Ostalo (%)
Dijaki gimnazijskega programa	14,3	12,9	63,9	8,8
Študenti FNM UM (bodoči učitelji matematike)	8,3	20,8	47,9	22,9
Študenti PEF UM (bodoči učitelji razrednega pouka)	2,4	20,1	72,6	4,9
Tuji študenti PEF UC in PEF UR (bodoči učitelji razrednega pouka)	31,5	24,2	34,7	9,7
Skupaj	14,1	19	57,8	9,1

Diagram 3: Kategorije odgovorov glede na skupine vzorca

Iz diagrama 3 je razvidno, da je več kot polovica vseh udeležencev (57,8 %) poskušala prikazati koncept, 14,1 % pa je zapis 2^3 predstavilo le s slikovno »ilustracijo«. Nekoliko manj kot petina (19,0 %) udeležencev je pojem razumela na čisto računskem nivoju tj. kot podajanje rezultata. Slovenski študenti programa Razredni pouk izstopajo, ker so v največji meri poskušali prikazati koncept, zapis pa so ilustrirali v najmanjšem deležu. Izstopajo tudi tuji študenti, kjer so kategorije porazdeljene bolj enakomerno kot pri ostalih. Pri njih je zaznati tudi največji delež slikovnih vizualnih reprezentacij in podajanja rezultata. Obstajajo statistično značilne razlike v kategoriji odgovora med skupinami udeležencev ($\chi^2_{(lr)}$ = 82,009 P=0,000).

V nadaljevanju si poglejmo podkategorije pri kategoriji odgovora »samo rezultat« in »koncept« nekoliko natančneje. Najprej si oglejmo kategorijo »samo rezultat«. Diagram 4 prikazuje deleže simbolne in slikovne reprezentacije pri podajanju rezultata.

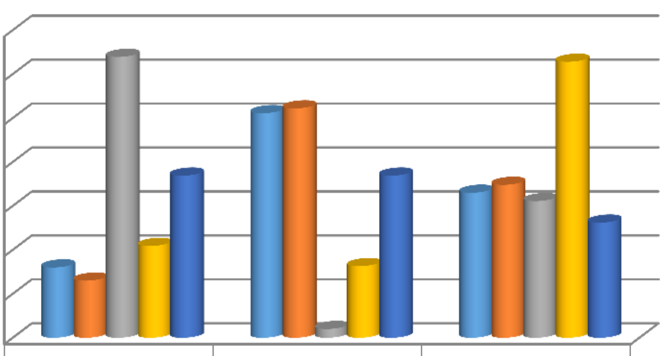
	Kategorija 2.1 - Simbolna reprezentacija (%)	Kategorija 2.2- Vizualna reprezentacija (%)
Dijaki gimnazijskega programa	5,6	94,4
Študenti FNM (bodoči učitelji matematike)	60	40
Študenti PEF UM (bodoči učitelji razrednega pouka)	21,2	78,8
Tuji študenti PEF UC in PEF UR (bodoči učitelji razrednega pouka)	17,7	83,3
Skupaj	20,9	79,1

Diagram 4: Reprezentacija pri podajanju rezultata

Udeleženci so podali samo rezultat oz. vrednost potence 2^3. Prikazali so torej število 8. Ta odgovor kaže bolj na proceduralno kot na konceptualno znanje, kajti število 8 je lahko vrednost različnih izrazov npr. $3+5, 4 \cdot 2, 10-2, \ldots$ Udeleženci, ki so odgovarjali na ta način, verjetno dojemajo nalogo izrazito proceduralno, pomemben jim je le rezultat ne pa sam koncept. Iz diagrama 3 je razvidno, da je na ta način je podalo odgovor 19 % udeležencev, diagram 4 pa prikaže, da je od teh 19 % približno petina (20, 9 %) zapisala simbol za število, ki jim je predstavljajo vrednost potence, ostali (79, 1 %) pa so narisali toliko objektov (npr. črtic, jabolk,..).

V največjem deležu so rezultat s sliko prikazovali dijaki. Sledijo slovenski in tuji bodoči učitelji razrednega pouka, kjer je rezultat približno štirikrat pogosteje vizualen kot simbolen. Simbolni prikaz s številko so najpogosteje izbirali bodoči učitelji matematike pri katerih verjetno prevladuje razmišljanje na simbolni ravni nad razmišljanjem na vizualnem nivoju. Razlike med skupinami so tudi statistično značilne ($\chi^2_{(lr)}$ = 10,924 P=0,012). Statistično značilnih razlik med skupino, ki je podala odgovor 8 in skupino, ki je podala odgovor različen od 8, glede na reprezentacijo ne najdemo ($\chi^2_{(lr)}$= 1,136, P=0,286).

Oglejmo si sedaj podkategorije še pri odgovorih, ki so poskušali prikazati »koncept«. Na tak način je odgovorilo največ, in sicer 279 (57,8 %) udeležencev. Tukaj najprej opazujemo, ali so prikazali koncept potence. To je storilo 73,8 % (36,9 % + 36,9 %) udeležencev. Ostali udeleženci (26,2 %) so prikazovali kak drug koncept. Najpogosteje prikazana druga koncepta sta bila 2·3 oz. 3·2, ter 4·2 oz. 2+2+2+2. Diagram 5 predstavlja natančnejše podatke glede na skupine udeležencev.



	Kategorija 3.1.1 - shematska reprezentacija potence (%)	Kategorija 3.1.2- Prepletanje slike in simbola pri potenci (%)	Kategorija 3.2 - drugi koncept (%)
Dijaki gimnazijskega programa	16	51,1	33
Študenti FNM (bodoči učitelji matematike)	13	52,2	34,8
Študenti PEF UM (bodoči učitelji razrednega pouka)	63,9	2	31,1
Tuji študenti PEF UC in PEF UR (bodoči učitelji razrednega pouka)	20,9	16,3	62,8
Skupaj	36,9	36,9	26,2

Diagram 5:Podajanje koncepta potence oz. drugega koncepta glede na vzorec

Osredotočimo se le na tiste udeležence, ki so podali koncept potence in opazujmo, kolikšen delež jih je potenco podal s shematsko vizualno predstavitvijo. Podobno kot pri podajanju rezultata ugotovimo, da so bodoči učitelji razrednega pouka najbolj nagnjeni k vizualnim predstavitvam, dijaki in bodoči učitelji matematike pa se nagibajo k predstavitvam, ki vključujejo tako vizualizacijo kot simbole. Bodoči učitelji razrednega pouka so verjetno zaradi načina izobraževanja, ki jih spodbuja k razmišljanju o vizualnih reprezentacijah, podajali take odgovore. Tako v gimnaziji kot pri izobraževanju bodočih učiteljev matematike pa se prevladujoče uporabljajo simbolne reprezentacije. Tudi tukaj obstajajo statistično značilne razlike med sodelujočimi v načinu podajanja koncepta ($\chi^2_{(\mathrm{lr})}$= 100,554 P=0,000).

9. INTERPRETACIJA

V nadaljevanju predstavljamo rezultate iz vidika potrditve/ne potrditve hipotez.

V največjem deležu bodo vrednost potence 2^3 kot 8 podali slovenski bodoči učitelji matematike - H1. Z diagrama 2 je sicer razvidno da so največji delež pravilnih odgovorov tj. 8, podali bodoči učitelji razrednega pouka (PEF UM), vendar je delež odgovorov, pri katerih pravilnosti oziroma pravilnosti rezultata ni bilo možno razbrati, velik (npr. za bodoče učitelje matematike (FNM UM) znaša kar 60,4%). Hipoteze zato ne moremo ne ovreči ne potrditi. Nagibamo se k temu, da je bilo navodilo »Nariši risbo«, bodočim učiteljem matematike tuje, naloga se jim je zdela nesmiselno lahka in so se zato odločali, da odgovora ne podajo. Pri bodočih učiteljih matematike je bila to namreč edina možnost za kategorijo »odgovora ni možno razbrati«.

Udeleženci bodo v največjem prikazovali pojem/ koncept. – H2. Hipotezo lahko potrdimo, saj lahko iz diagrama 3 razberemo, da je večina (57,8 %) udeležencev za predstavitev problema uporabila koncept. Ugotovitev je pozitivna, pouk matematike naj bi namreč slonel na razvijanju pojmov (konceptov), ki omogočajo razumevanje matematike in ne le golo reproduciranje postopkov in pravil. Kategorija rezultat je prikazovala ta vidik-izvajanje računskega postopka. Ker je delež odgovorov, ki so podani v tej kategoriji, manjši kot delež odgovorov, podanih v kategoriji koncept, ugotavljamo, da je slovenski šolski sistem na področju matematike učinkovit. Ugotovitev je v skladu z mednarodnimi raziskavami matematičnega znanja kot sta npr. TIMSS in PISA.

Med slovenskimi udeleženci bo prišlo do razlik glede na prisotnost matematike v predhodnem izobraževanju. - H3. Hipoteza je potrjena. Z diagramov od 2-5 so med slovenskimi udeleženci razvidne razlike na vseh področjih.

> **Večina dijakov bo vrednost izraza potence podala pravilno, za prikaz bodo uporabili koncept in sicer prepletanje slik in simbolov. - H3.1.** Po pregledu podatkov lahko iz diagrama 2 razberemo, da je večina dijakov (58,5 %) odgovorila na

problem s pravilnim rezultatom. Za prikaz je 51,1 % dijakov uporabilo koncept, in sicer prepletanje slikovno vizualne in simbolne reprezentacije, kar je razvidno iz diagrama 5. Hipotezo smo na podlagi teh podatkov lahko potrdili.

Bodoči učitelji matematike bodo vsi podali pravilni odgovor, za prikaz bodo uporabili vrednost potence.- H3.2. Z diagrama 2 je razvidno, da je na problem pravilno odgovorilo le 33,3 %, za prikaz pa je večina uporabila koncept (47,9 %), kar je razvidno z diagrama 3. Hipoteza je na podlagi podatkov ovržena.

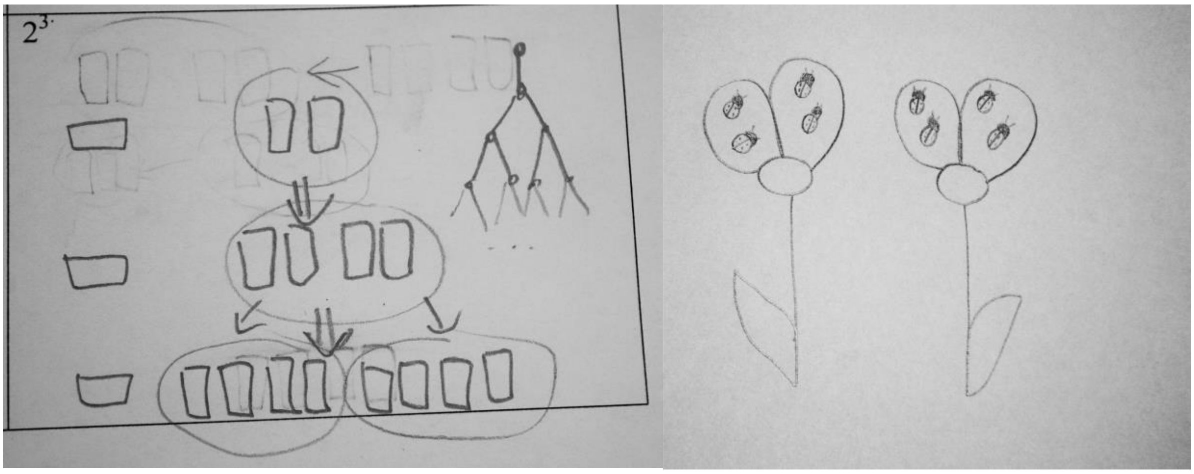
Bodoči učitelji razrednega pouka bodo pravilno vrednost potence podali v manjšem deležu kot dijaki ali bodoči učitelji matematike, za prikaz bodo uporabili koncept in sicer prepletanje slikovno vizualne in simbolne reprezentacije. - H3.3. Z diagrama 2 je razvidno, da je 82,9 % bodočih učiteljev razrednega pouka vrednost potence podala z pravilnim odgovorom. Delež pravilnih odgovorov je v tej skupini bil celo najvišji. Za prikaz so uporabili v večini shematsko vizualno reprezentacijo (63,9 %), kar je razvidno z diagrama 5. Na podlagi podatkov je hipoteza ovržena.

Med slovenskimi udeleženci in udeleženci iz tujih držav bo prišlo do razlik. Razlike v odgovorih lahko povežemo z razlikami med šolskimi sistemi – H4. Na podlagi rezultatov z diagramov od 2-5 je razvidno, da razlike med slovenskimi in tujimi študenti so prisotne. Razlog iščemo v drugačni strukturi izobraževanja. Tako na Slovaškem kot v Španiji je namreč na predhodnem nivoju izobraževanja možno izbrati nivo matematike. Bodoči učitelji razrednega pouka v Sloveniji morajo imeti zaključeno splošno maturo. Nivo ponujene matematike v srednji šoli je torej enak kot za bodoče učitelje matematike. V Španiji in na Slovaškem v programe izobraževanje učiteljev razrednega pouka redkeje vključujejo gimnazijske maturante. Običajno se na te programe vpisujejo študenti, ki imajo predhodno izobrazbo primerljivo z našo poklicno maturo, kar pomeni, da je nivo matematike ponujen na srednješolski stopnji nižji. Hipotezo na podlagi teh podatkov lahko potrdimo.

10. RAZPRAVA

Naši rezultati kažejo, da je nekoliko več kot polovica anketirancev navodilo »Narišite risbo, ki prikazuje 2^3« interpretiralo tako, da so prikazovali koncept (potence ali katere druge operacije). Približno 15 % jih je 2^3 le »okrasila« oz. spremenila v ilustracijo, nekoliko manj kot petina udeležencev pa je navodilo razumelo kot: Izračunaj vrednost in le to prikaži z risbo. Čeprav kognitivni pristopi enakovredno poudarjajo strategije reševanja problemov kot rešitve problemov, je nagnjenost k pridobivanju rezultatov pri pouku matematike še vedno zelo pogosta, kar odražajo tudi naši rezultati.

V naši raziskavi je bila potenca vizualno prikazana na različne načine. Tretjina udeležencev je upodobila strukturo cepitve. Med odgovori je bil prisoten tudi drevesni prikaz, ki ga lahko opazujemo na sliki 11 levo in sliki 7 levo.



Slika 11: Cepitev- drevesna struktura in ugnezdena struktura (avtor: bodoči učitelj matematike, bodoči učitelj razrednega pouka Slovenija)

Drevesni prikaz je na levi strani slike 7. Kot vizualno reprezentacijo strukture cepitve tudi Conferey in Smith (1995) navajata drevesni prikaz. V naših podatkih pa se je pogosto pojavljala še ena vizualna reprezentacija strukture cepitve. Imenovali jo bomo ugnezdeni prikaz in je prikazana na sliki 11 desno. Na dveh rožah s po dvema listoma sta po dve pikapolonici. Vrednost potence tj. 8 je na drevesnem prikazu mnogo težje odčitati kot v ugnezdenem prikazu. Pri drevesnem prikazu namreč prikažemo vse verzije originala, ki nastajajo ob zaporednem množenju in zato vrednosti potence iz slike ne moremo direktno prebrati. Pri ugnezdenem prikazu pa je prikazan tako koncept potence kot tudi njena vrednost.

Primeri situacij, ki se lepo prikažejo z ugnezdenim prikazom so npr. dvoje jopic/hiš/jablan, na vsaki jopici/hiši/jablani sta po dva gumba/okni/jabolki, v vsakem gumbu/oknu/jabolku sta po dve luknji/lončnici/črva (prim. slika 11). Ko se učenci prvič srečajo s potenco so stari približno 10 let. Zdi se nam, da je v tej starosti drevesni prikaz za učence še (pre) težka predstavitev. Največkrat ga namreč srečamo pri predstavitvi kombinatoričnih situacij, kombinatorika kot matematična vsebina pa se obravnava v 4. letniku srednje šole.

Tudi slika 12 ilustrira razliko med drevesnim prikazom (družinsko drevo) in ugnezdenim prikazom (stanovanja). Nekatere situacije so očitno bolj primerne za drevesne prikaze, druge pa za ugnezdene prikaze.

Druga tretjina udeležencev je potenco upodobila s prepletanjem simbolov in slik, kjer so narisali npr. dva kvadratka – simbol krat (·) – dva kvadratka – simbol krat (·) – dva kvadratka (slika 6 levo). Ta prikaz ni zajet v kategorizaciji, ki sta jo predlagala Hegarty in Kozhevnikov (1999), zato predlagamo da se k shematski in slikovni kategoriji v vizualni reprezentaciji doda še slikovno-simbolna kategorija.

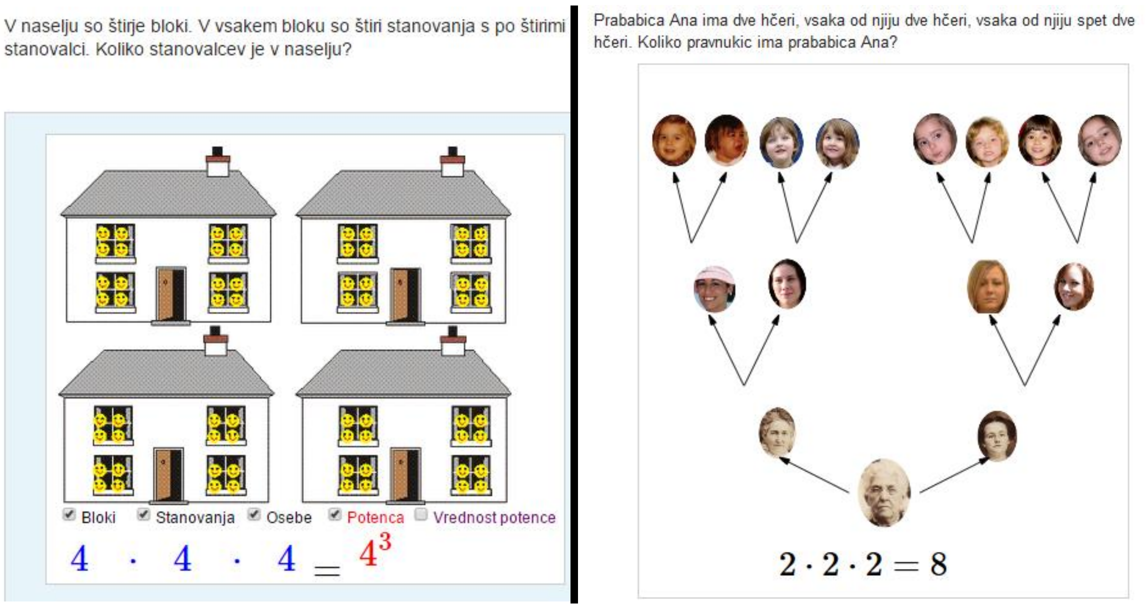
Dodatno ugotavljamo, da je za 2^3 je nekoliko več kot četrtina udeležencev izbrala napačni koncept, zelo pogosto je šlo za linearni koncept $3 \cdot 2$. Na tem delu naši rezultati podpirajo rezultate, ki jih je dobil de Bock s sodelavci (2007). Menimo, da bi nelinearno razmišljanje učencev lahko spodbudili s primernim slikovnim prikazom.

11. ZAKLJUČEK

Slikovno ponazarjanje matematičnih pojmov je zanimiv problem. Odprti problemi, ki se pojavljajo na tem področju so vezani na mnoge vidike npr. na individualne razlike med učenci ali na razliko v težavnosti pojmov, ki jih ponazarjamo. Učencem, ki so vizualni tipi, slikovne ponazoritve verjetno pomagajo bolj kot učencem, ki so slušni ali kinestetični tip. Po našem mnenju je težek pojem (npr. integral) težje slikovno ponazoriti kot lažji pojem (npr. seštevanje).

Na osnovi naših rezultatov pri vpeljevanju pojma potenca priporočamo shematske vizualne prikaze cepitve v ugnezdenem prikazu.

Po razmejitvi, ki jo predlaga Hodnik Čadež (2003), bi ugnezdeni prikaz sodil k semi-konkretni reprezentaciji, drevesni prikaz pa k semi-abstraktni reprezentaciji. To pomeni, da je razvojno lažji in po našem mnenju zato bolj primeren v začetnih stopnjah učenja. Takšne predstavitve že najdemo tudi v nekaterih slovenskih gradivih. Na sliki 12 sta primera cepitev iz e-učbenikov za matematiko za 5. in 6.razred.



Slika 12: Shematska vizualna reprezentacija potence s cepitvijo v ugnezdenem prikazu in shematska vizualna reprezentacija potence s cepitvijo v drevesnem prikazu.

Vir: http://eucbeniki.sio.si/test/iucbeniki/index.html

Menimo, da gre za primer dobre prakse, saj se ugnezdeni prikazi pojavljajo še v 6. in 8. razredu in je tako prehod k potencam z negativnim eksponentom (8.razred) in kasneje racionalnim eksponentom (predvidoma 2. letnik gimnazije) bolje zastavljen. Seveda pa je za potrditev te hipoteze potrebno zastaviti novo raziskavo.

Rezultati naše raziskave so nas na določenih delih zelo presenetili. Čeprav smo na osnovi lastnih izkušenj pričakovali drevesne in ugnezdene prikaze pa nismo pričakovali kategorije ilustracija. Ko smo podajali navodilo za risbo, nismo na to možnost niti pomislili. Priznati je potrebno, da je odgovor udeležencev korekten, napaka je na strani navodil, ki jih lahko interpretiramo na različne načine. Če torej odgovorimo na naslovno vprašanje: 2^3 je lahko tudi labod.

LITERATURA

Antolin, D., & Lipovec, U. (2015). Shematske vizualne reprezentacije potence. *Revija za elementarno izobraževanje*.

Asikainen, K., Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., & Voima, J. (2008). *2b Tuhattaituri.* Keuruu: Otava.

Bezgovšek Vodušek, H. (2015). *Dopolnitev teorije matematičnega znanja za poučevanje s koncepti s podobo. Doktorska disertacija.* Maribor: Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerza v Mariboru.

Children's Addition. (brez datuma). Prevzeto 25. 10 2014 iz http://xoax.net/children/crs/math/lessons/addition/

Conferey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and theire role in development of exponential functions. *Journal of Research in Mathematics Education, 26*, str. 66-86.

Cotič, M. (2009). Matematične dejavnosti spodbujajo otrokov kognitivni razvoj. V B. Vrbovšek (Ured.), *Učenje v območju bližnjega razvoja otrok.* Ljubljana: Supra.

de Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (brez datuma). *The Illusion of Linearity.* Springer.

Güler , G., & Çiltaş, A. (august 2011). The visual representation usage levels of mathematics teachers and students in solving verbal problems. *International Journal of Humanities and Social Science, 1*(11), 145-154.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91(4)*, str. 648-689.

Hodnik Čadež, T. (2003). Pomen modela reprezentacijskih preslikav za učenje računskih algoritmov. *Pedagoška obzorja , 18(1)*, str. 3-22.

Hodnik Čadež, T. (2014). Poučevanje matematike na razredni v luči sodobnih raziskav. *Konferenca o učenju in poučevanju matematike.* Čatež. Pridobljeno iz http://www.zrss.si/kupm2014/files/gradiva/petek/CadezHodnik.pdf

Lipovec, A. (2006). Kaj imajo skupnega Gari Kasparov, Jamie Oliver in ozonske luknje? *Presek, 33(1)*, str. 4-6.

Mesec, B. (1998). *Uvod v kvalitativno raziskovanje v socialnem delu.* Ljubljana: Visoka šola za socialno delo.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, Metaphors, Metonymies, And Imaginative Rationality in High School Mathematics. *Educational Studies in mathematics, 23*, 595-610.

Rivera, F. (2014). From math drawings to algorithms: emergence of whole number operations in children. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*. Pridobljeno iz http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-013-0543-1/fulltext.html

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73(3)*, str. 297–328.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, str. 20-26.

Smith, M. K. (2002). *Jerome S. Bruner and the process of education.* Prevzeto 7.. september 2014 iz http://www.infed.org/thinkers/bruner.htm

Tahan, M. (1998). *Mož, ki je računal.* Ljubljana: Vale- Novak.

Van de Walle , J. (2003). *Teaching Student Centere Mathematics.* Boston: Pearson.