»Mladi za napredek Maribora 2015«
32. srečanje

PRAŠTEVILSKA FUNKCIJA π

Raziskovalno področje: **Matematika**

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Avtor: JASNA KOVAČ

Mentor: RENATA HVALA

Šola: PRVA GIMNAZIJA MARIBOR

2015, Maribor

»Mladi za napredek Maribora 2015«
32. srečanje

PRAŠTEVILSKA FUNKCIJA π

Raziskovalno področje: **Matematika**

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

2015, Maribor

KAZALO

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

POVZETEK

Za poljubno naravno število n je $\pi(n)$ število praštevil, ki so manjša ali enaka n. Že petnajstletni Gauss je odkril, da se pri velikih n vrednost $\pi(n)$ ne razlikuje dosti od vrednosti $f(n)$, pri čemer je f funkcija s predpisom $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

V raziskovalni nalogi sem predstavila in ilustrirala rezultate, povezane z omenjenima dvema funkcijama. Predstavila sem ocene oblike $k_1 f(n) < \pi(n) < k_2 f(n)$ in njihov zgodovinski razvoj. Na osnovi navedenih dejstev sem izpeljala nekaj posledic. Med drugim sem ocenila velikost vrzeli med dvema prašteviloma pri številih določenega velikostnega razreda in oceno preverila empiričnimi podatki.

UVOD

Namen raziskovalne naloge

Za raziskovalno nalogo sem se odločila, ker me matematika zanima in sem želela pridobiti še dodatno znanje in spoznati teme, ki niso v učnem načrtu. S praštevili se veliko srečujemo pri matematiki, vendar še nikoli prej nisem slišala za praštevilsko funkcijo. Praštevilska funkcija π nam pove koliko je praštevil do poljubnega naravnega števila n. Ob pomoči mentorice sem se v tematiko praštevil bolj poglobila. Z raziskovalno nalogo sem želela bolj podrobno raziskati praštevilsko funkcijo π in predstaviti različne funkcije, ki bi bile primerne za aproksimacijo. Prav tako me je zanimalo, če obstaja kakšen način kako približno izračunati dolžino vrzeli med dvema prašteviloma.

Način dela

Delo je potekalo tako, da sem se najprej s praštevilsko funkcijo π spoznala in se naučila uporabljati program GeoGebra. Nato sem v literaturi poiskala različne funkcije, ki so primerne za njeno aproksimacijo in to tudi preverila grafično in računsko. Pri tem sem si predvsem pomagala s spletno stranjo [7], kjer sem lahko izračunala $\pi(n)$ za večja naravna števila ali izračunala katero praštevilo ima izbrano vrednost praštevilske funkcije.

1. DEFINICIJA PRAŠTEVILSKE FUNKCIJE

Naravno število n $\neq$ 1 je *praštevilo*, če ima natanko dva delitelja v množici naravnih števil: 1 in samega sebe. Število 2 je edino sodo praštevilo. So osnovni gradniki naravnih števil pri množenju. Od 1 različno naravno število, ki ni praštevilo, je *sestavljeno* število.

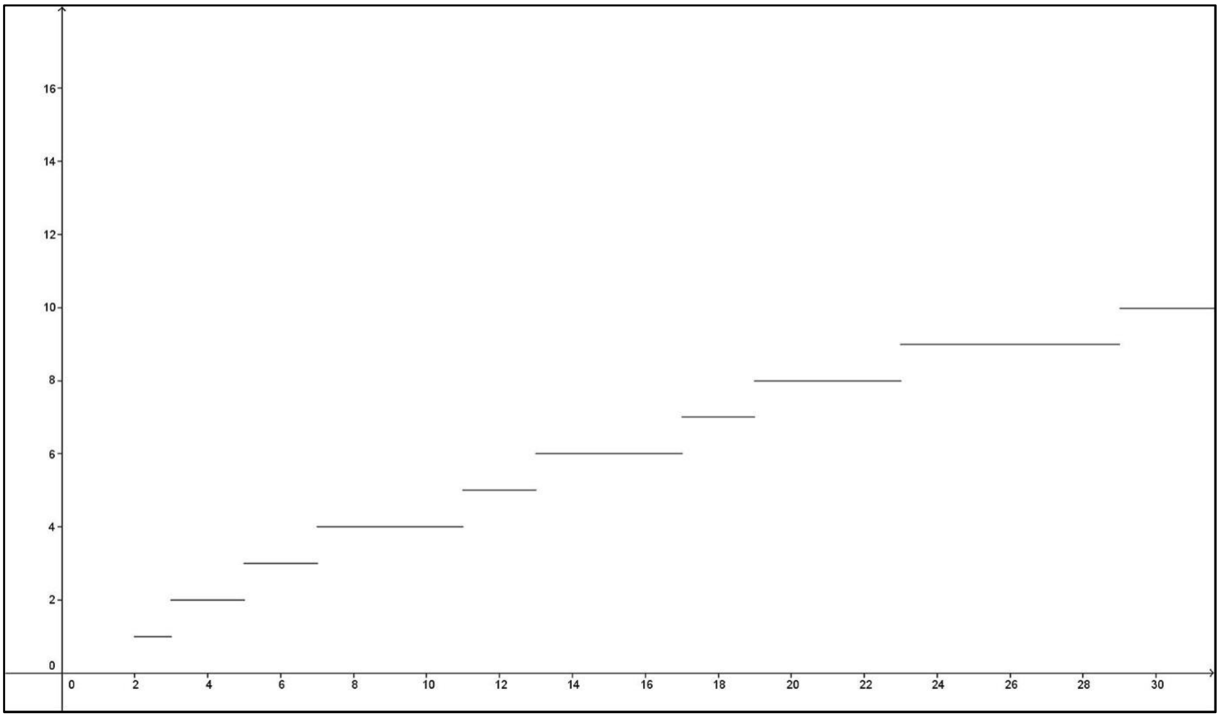
Praštevilska funkcija π nam pove, koliko praštevil najdemo na intervalu od 0 do števila n. To pomeni, da je za poljubno naravno število n, π(n) število praštevil, ki so manjša ali enaka n.

Seveda pa funkcijo lahko definiramo tudi za realna števila x. Če funkcijo definiramo za realna števila, to pomeni, da je tudi pri realnem številu *x* vrednost funkcije enaka najbližjemu manjšemu ali enakemu naravnemu številu. Vrednost se bo spremenila pri naslednjemu praštevilu. Iz slike 1 je tudi razvidno, da je ista vrednost na vseh realnih številih do naslednjega praštevila.

Slika 1 prikazuje graf praštevilske funkcije π za majhne vrednosti. Jasno je, da je funkcija odsekoma konstanta. Vrednost funkcije se bo spremenila le pri praštevilski vrednosti x in sicer za 1. Nato bo spet konstantna do naslednjega praštevila.

Primer:

$\pi(10) = 4$, saj so do števila 10 natanko 4 praštevila: 2, 3, 5 in 7.



Slika 1: Graf praštevilske funkcije π

2. APROKSIMACIJE PRAŠTEVILSKE FUNKCIJE

V tem poglavju nas bo zanimalo, katera funkcija je primerna aproksimacija praštevilske funkcije. Že Gauss je pri petnajstih letih ugotovil, da je pri velikih n dobra funkcija za aproksimacijo funkcija $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Za velike n torej velja:

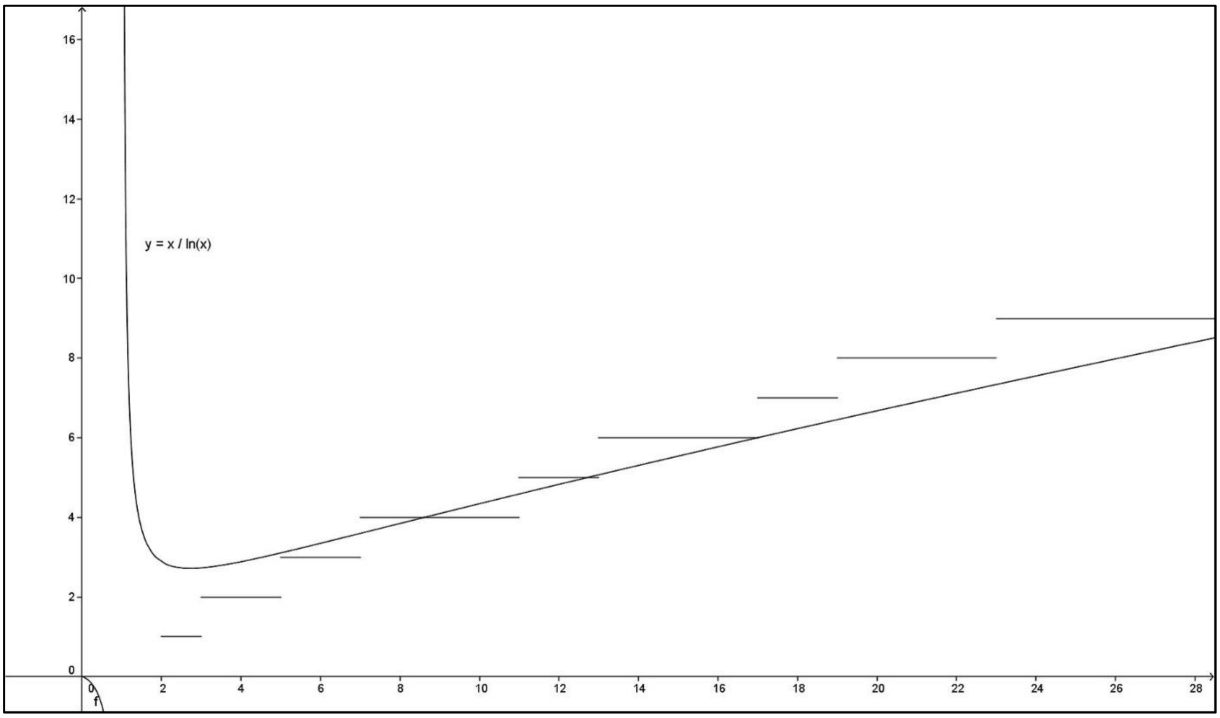
$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln(n)}$$

Kaj točno to pomeni, bomo spoznali v nadaljevanju.

Na sliki 2 sta predstavljena grafa funkcij $\pi(x)$ in $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Pri začetnih *x* je graf prve funkcije sicer pod grafom druge, a je videti, kot bi se kasneje dvignil nad njo in tam tudi ostal. Resnično: v literaturi [1 (str. 69), 2, 3] najdemo naslednji rezultat:

<u>Trditev 2.1:</u> Za vsa realna števila $x \geq 17$ velja

$$\pi(x) > \frac{x}{\ln(x)}$$

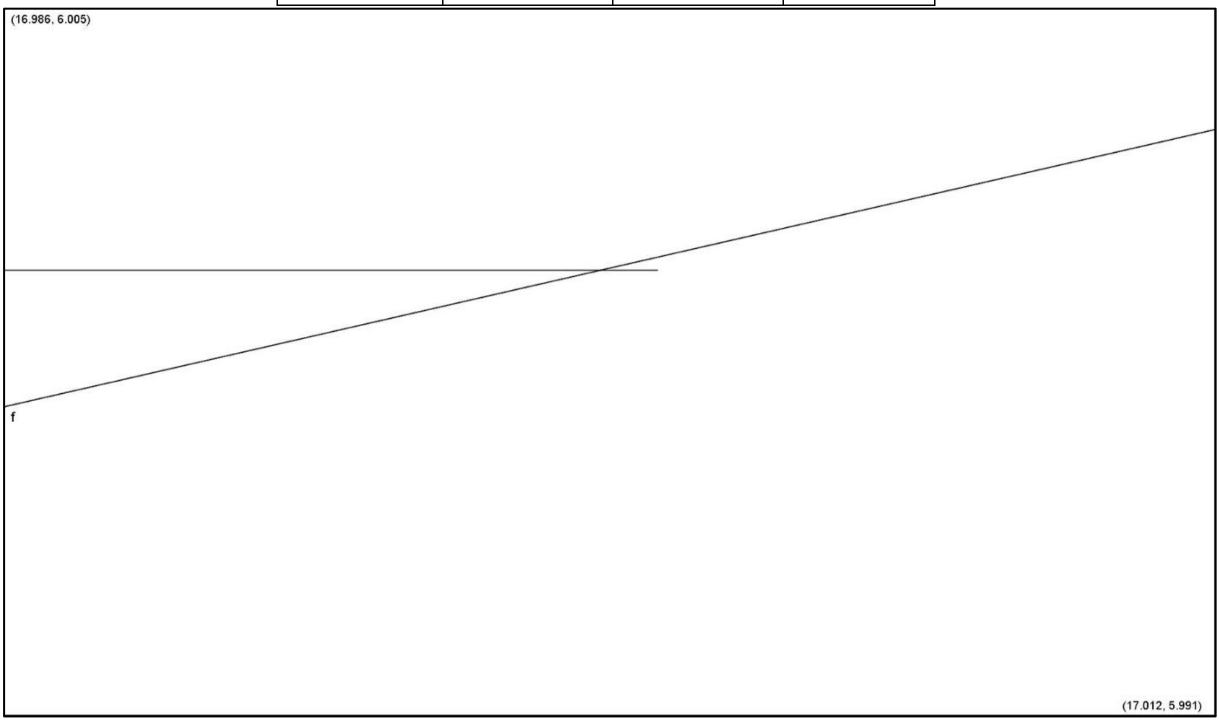


Slika 2: Grafa funkcij f in π

Če pogledamo vrednosti ulomka $\frac{\pi(n)}{f(n)}$, opazimo, da so te večje od 1 že za naravna števila *n*>10. Raziščimo, zakaj v trditvi 1 nastopa število 17.

Tabela 1

n	$\pi(n)$	f(n)	$\frac{\pi(n)}{f(n)}$
6	3	3,35	0,89
7	4	3,50	1,11
8	4	3,85	1,04
9	4	4,00	0,98
10	4	4,34	0,92
11	5	4,59	1,09
12	5	4,83	1,04
13	6	5,07	1,18
14	6	5,30	1,13
15	6	5,54	1,08
16	6	5,77	1,04
17	7	6,00	1,17
18	7	6,23	1,12
19	8	6,45	1,24
20	8	6,68	1,20



Slika 3: Približana grafa funkcij f in π v bližini x = 17

Iz slike 3 vidimo, da se grafa funkcij f(x) in π(x) sekata v bližini x=17. To nam pojasni predpostavko iz Trditve 1.

Oglejmo si vrednosti kvocienta $\frac{\pi(n)}{f(n)}$ za n med 100 in 130.

Tabela 2

n	$\frac{\pi(n)}{f(n)}$
100	1,15129
101	1,18805
102	1,17891
103	1,21493
104	1,20576
105	1,19673
106	1,19786
107	1,2227
108	1,21389
109	1,24816
110	1,23922
111	1,23042
112	1,22175
113	**1,25506**
114	1,24637
115	1,23781
116	1,22938
117	1,22107
118	1,21289
119	1,20482
120	1,19687
121	1,18904
122	1,18132
123	1,17370
124	1,16610
125	1,15870
126	1,15140
127	1,18244
128	1.17510
129	1,16786
130	1,16071

Iz tabele vidimo, da je največja vrednost dosežena pri 113 (Izkaže se, da to ni le največja vrednost na intervalu med 100 in 130, pač pa največja vrednost sploh. Velja namreč naslednja trditev [1, str. 69]:

Trditev 2.2: Naj bo $k_0 = \frac{\pi(113)\log(113)}{113} = \frac{30\log(113)}{113} \approx 1.2550587$. Za vsa realna števila $x > 1$ velja

$$\pi(x) \leq k_0 \frac{x}{\ln(x)}.$$

To trditev včasih najdemo v malo preprostejši obliki

$$\pi(x) < 1.25506 \frac{x}{\ln(x)}.$$

V tem kontekstu je zanimiva tudi naslednja trditev iz istega vira:

Trditev 2.3: Za vsa realna števila $1 < x < 113$ in $x > 113.6$ velja

$$\pi(x) < \frac{5}{4} \frac{x}{\ln(x)}$$

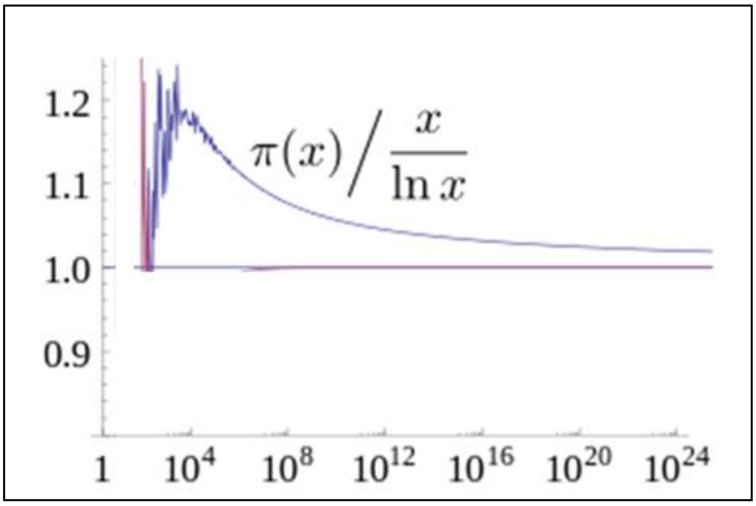
Kvocient iz tabele je nad 1.25 le na kratkem intervalu med 113 in 113.6.

Če bi v zgornji tabeli jemali vedno večja števila, bi se kvocient bližal ena. Že zdaj lahko iz tabele vidimo, da se kvocient približuje številu 1, po tem ko je pri 113 dosegel najvišjo vrednost.

Tabela 3

n	$\frac{\pi(n)}{f(n)}$
10	0,92103
10^2	1,15129
10^3	1,16050
10^4	1,13195
10^5	1,10431
10^6	1,08449
10^7	1,07117
10^8	1,06120
10^9	1,05373
10^{10}	1,04770
10^{11}	1,04304
10^{12}	1,03915
10^{13}	1,03580

Za ilustracijo, da je kvocient pri velikih x blizu ena, nam kaže tudi slika 1. Graf kvocienta je modra krivulja. Kot vidimo, na začetku, pri malih x, krivulja precej oscilira, z naraščanjem x, pa je tega vedno manj. Pri zelo velikih x konvergira k 1.



Slika 4: Kvocient je pri velikih x blizu 1

Izrek 2.4: Kvocient funkcij $\boldsymbol{\pi}$ in f je pri velikih x v bližini števila 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{\pi(x)}}{\frac{x}{\ln(x)}} = \mathbf{1}.$$

Temu rezultatu običajno rečemo **praštevilski izrek**.

S tem smo pojasnili zapis iz začetka drugega poglavja, ko smo zapisali, da je $\boldsymbol{\pi(x) \approx f(x)}$.

Obstajajo tudi aproksimacije praštevilske funkcije $\boldsymbol{\pi}$ s funkcijami, ki so sorodne s funkcijo f, vendar niso oblike $k\,f$ za neko število k. Tako veljajo npr. naslednji rezultati [1, str. 69].

Trditev 2.5: Za vsa realna števila x ≥ 5393 velja

$$\frac{x}{\ln(x) - 1} < \pi(x).$$

Trditev 2.6: Za vsa realna števila x ≥ 60184 velja

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln(x) - 1.1} .$$

Trditev 2.7: Za vsa realna števila x ≥ 59 velja

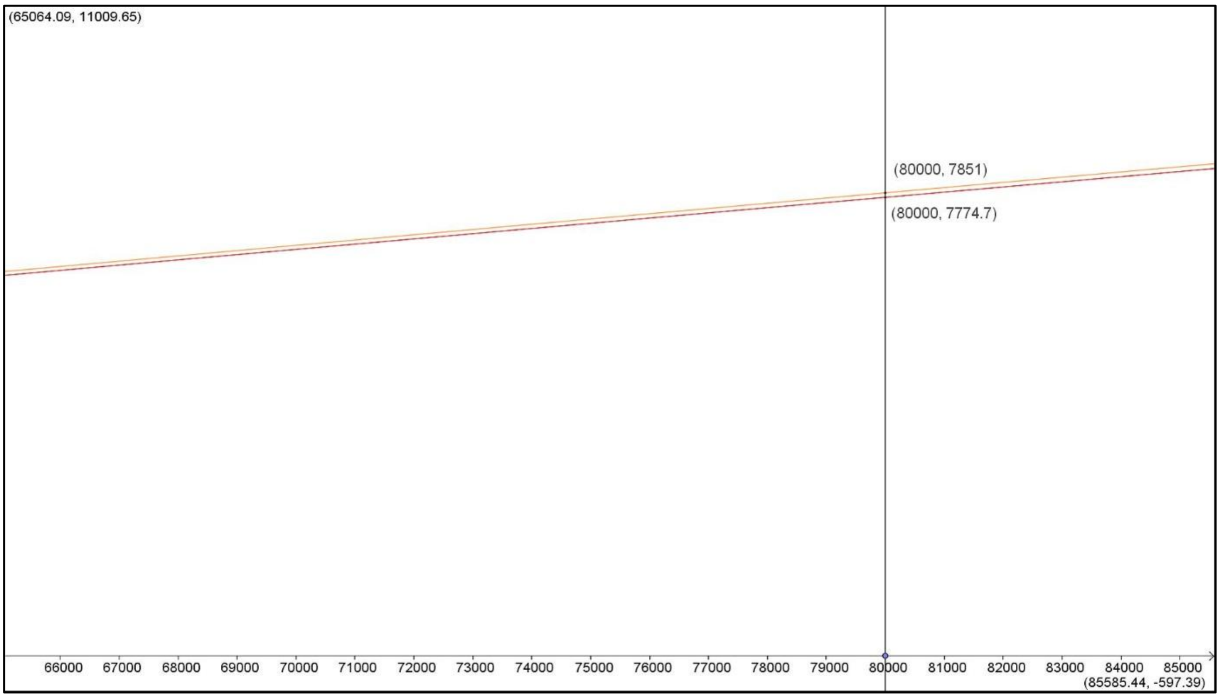
$$\frac{x}{\ln(x)}\left(1 + \frac{1}{2\ln(x)}\right) < \pi(x).$$

<u>Trditev 2.8:</u> Za vsa realna števila x >1 velja

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln(x)}\left(1 + \frac{3}{2\ln(x)}\right).$$

Ilustrirajmo vrednost teh rezultatov na primeru. Primerjali bomo ocene v trditvah 2.1, 2.3, 2.5 , 2.6, 2.7 in 2.8. Vse te trditve veljajo za *x*>60.184.

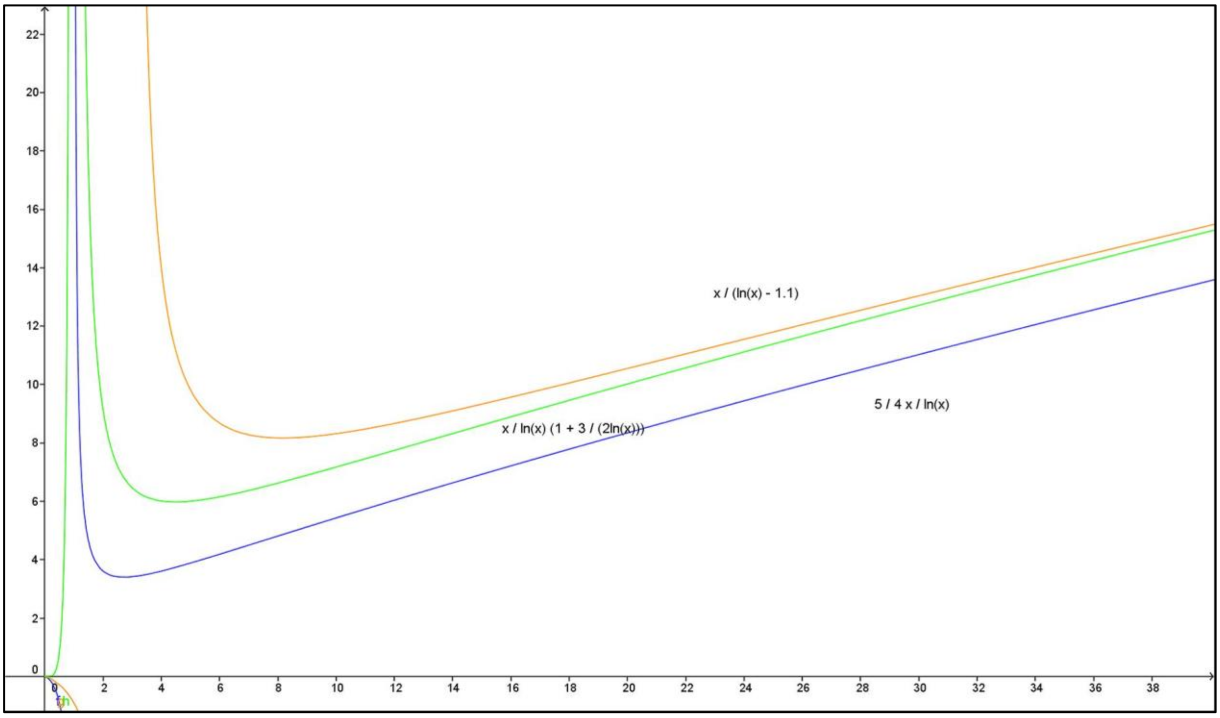
Vzemimo *x* = 80.000. Velja: $\pi(80.000) = 7837.$ Na podlagi trditev 2.1 in 2.3 dobimo, da je to število na intervalu med 7086 in 8857, na podlagi trditev 2.5 in 2.6, da je med 7775 in 7851, na podlagi 2.7 in 2.8 pa, da je med 7400 in 8027. Najbolj natančen interval smo dobili na podlagi trditev 2.5 in 2.6, najmanj pa na podlagi trditev 2.1 in 2.3. Trditvi 2.5 in 2.6 sta tudi ilustrirani s sliko 5.



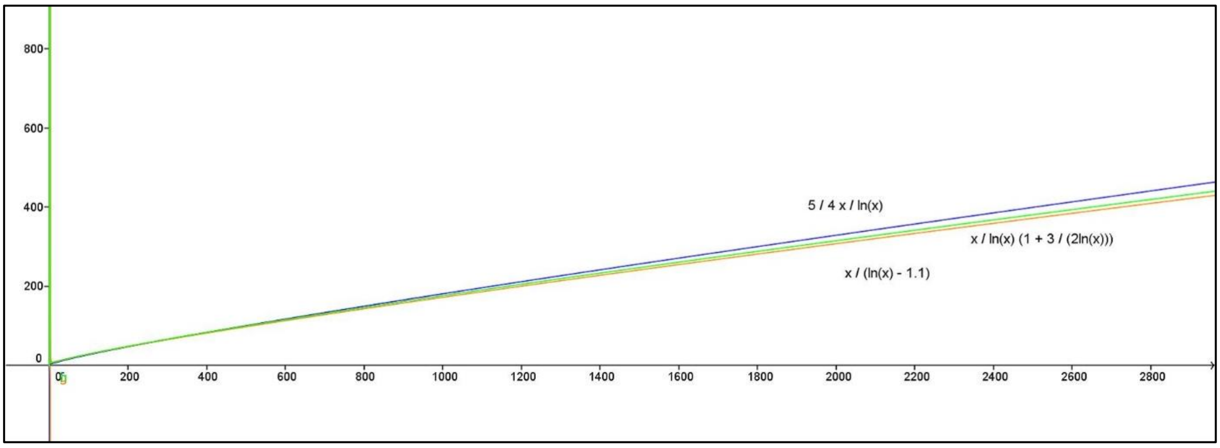
Slika 5: Ilustracija trditev 2.5 in 2.6 pri x=80.000

Vzemimo še x = 50.000.000. Velja: π(50.000.000) = 3.001.134. Na podlagi trditev 2.1 in 2.3 dobimo, da je to število na intervalu med 2 820 471 in 3 525 589, na podlagi trditev 2.5 in 2.6, da je med 2 989 084 in 3 007 061, na podlagi 2.7 in 2.8 pa, da je med 2 927 939 in 3 142 875. Najbolj natančen rezultat smo spet dobili na podlagi trditev 2.5 in 2.6, najmanj pa na podlagi 2.1 in 2.3.

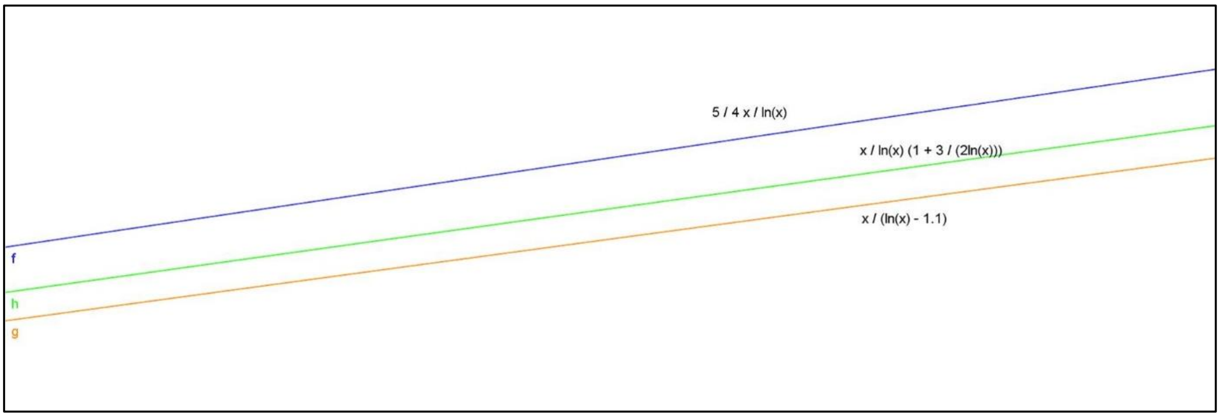
Iz slike 7 lahko vidimo, da ima pri večjih x največjo vrednost funkcija $\frac{5}{4}\ \frac{x}{\ln(x)}$, najmanjšo pa $\frac{x}{\ln(x)-1.1}$. Ker je praštevilska funkcija manjša od vseh treh, je najboljša seveda tista, ki ima najmanjše vrednosti, saj je tako najbližje praštevilski funkciji π. Iz slike 7 vidimo, da je pri velikih x to funkcija $\frac{x}{\ln(x)-1.1}$. Vendar iz slike 6 vidimo, da je pri manjših x drugače. Presečišče grafov $\frac{5}{4}\ \frac{x}{\ln(x)}$ in $\frac{x}{\ln(x)-1.1}$ je približno pri $x \sim 244{,}69$, kar lahko vidimo na sliki 9. Presečišče grafov $\frac{5}{4}\ \frac{x}{\ln(x)}$ in $\frac{x}{\ln(x)}\left(1+\frac{3}{2\ln(x)}\right)$ je pri $x \sim 403{,}43$, tudi to lahko vidimo na sliki 9. Presečišče med $\frac{x}{\ln(x)-1.1}$ in $\frac{x}{\ln(x)}\left(1+\frac{3}{2\ln(x)}\right)$ je pri $x \sim 61{,}87$.



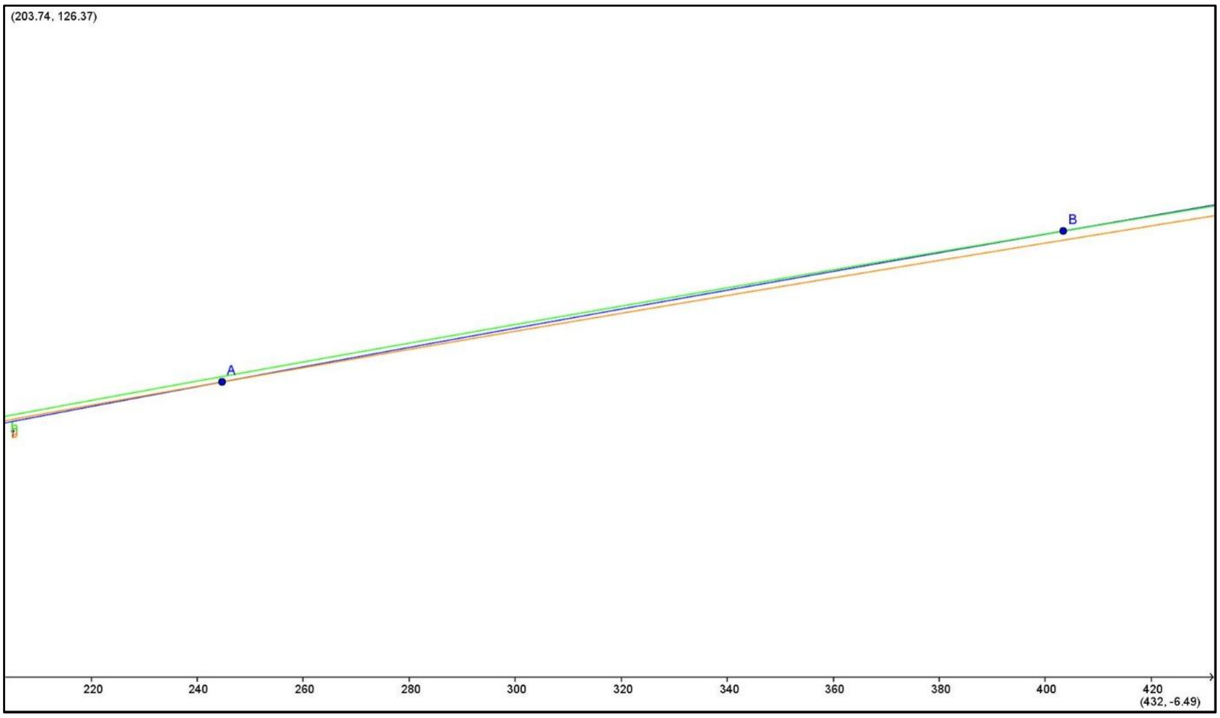
Slika 6: Grafi funkcij na desni strani neenakosti iz trditev 2.3 (modra barva), 2.6 (oranžna barva) in 2.8 (zelena barva)



Slika 7: Grafi funkcij iz trditev 2.3, 2.6 in 2.8 pri večjih x



Slika 8: Približani grafi pri večjih x



Slika 9: Presečišča grafov A(244.69, 55.61) in B(403.43, 84.05)

Če bi opazovali funkcije, ki pomenijo spodnjo mejo, bi dobili podobne rezultate. Tokrat grafi nimajo presečišč, saj velja naslednji rezultat.

Trditev 2.9: Za poljubno realno število $x > e$ velja ocena:

$$\frac{x}{\ln(x)} \leq \frac{x}{\ln(x)}\left(1 + \frac{1}{2\ln(x)}\right) \leq \frac{x}{\ln(x) - 1}.$$

Dokaz: Leva neenakost je očitna, saj je srednje število za $\frac{x}{2\ln^2(x)} > 0$ večje od levega. Izračunajmo razliko med desnim in srednjim številom:

$$\frac{x}{\ln(x)-1}-\frac{x}{\ln(x)}\left(1+\frac{1}{2\ln(x)}\right)=\frac{x}{(\ln(x)-1)\ln(x)}\left[\ln(x)-(\ln(x)-1)\left(1+\frac{1}{2\ln(x)}\right)\right]=$$

$$=\frac{x}{(\ln(x)-1)\ln(x)}\left[\ln(x)-(\ln(x)-1)-\frac{(\ln(x)-1)}{2\ln(x)}\right]=$$

$$\frac{x}{(\ln(x)-1)\ln(x)}\left[1-\frac{(\ln(x)-1)}{2\ln(x)}\right]=$$

$$\frac{x}{(\ln(x)-1)\ln(x)}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\ln(x)}\right]=$$

$$\frac{x}{(\ln(x)-1)\ln(x)}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\ln(x)}\right]\geq 0.$$

Zadnja neenakost je res, saj za x>1 velja $\ln(x)>0$ in za *x>e* velja $\ln(x)>1$ in zato $\ln(x)-1>0$. Tako smo dokazali, da je desno število res večje od srednjega. ■

Glede na Trditve 2.1, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7 in 2.8 in na pravkar opisano primerjavo nastopajočih funkcij vidimo, da je pri $x \geq 60.184$ najožji interval, ki vsebuje vrednost $\pi(x)$, tisti interval, ki ima vrednost funkcije $\frac{x}{\ln(x)-1}$ za spodnjo mejo in $\frac{x}{\ln(x)-1.1}$ za zgornjo mejo. Od naštetih možnosti je najmanj primerna tista z vrednostjo funkcije $\frac{x}{\ln(x)}$ za spodnjo mejo in vrednostjo funkcije $\frac{5}{4}\ \frac{x}{\ln(x)}$ za zgornjo mejo.

Vse to se ujema z našimi izkušnjami pri računih na strani 9 zgoraj.

3. DOLŽINA VRZELI MED PRAŠTEVILI

Dejstvo, da je f(x) dobra aproksimacija za praštevilsko funkcijo, nam lahko služi za približno oceno razmaka med določenim praštevilom in naslednjim praštevilom.

Trditev 3.1 Naj bo $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Tedaj za velike x velja

$$f(x+\ln(x)) \approx f(x) + 1$$

Dokaz:

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

$$f(x+\ln(x)) = \frac{x+\ln(x)}{\ln(x+\ln(x))}$$

$$= \frac{x+\ln(x)}{ln(x\left(1+\frac{\ln(x)}{x}\right))}$$

$$= \frac{x+\ln(x)}{\ln(x)+\ln(1+\frac{\ln(x)}{x})}$$

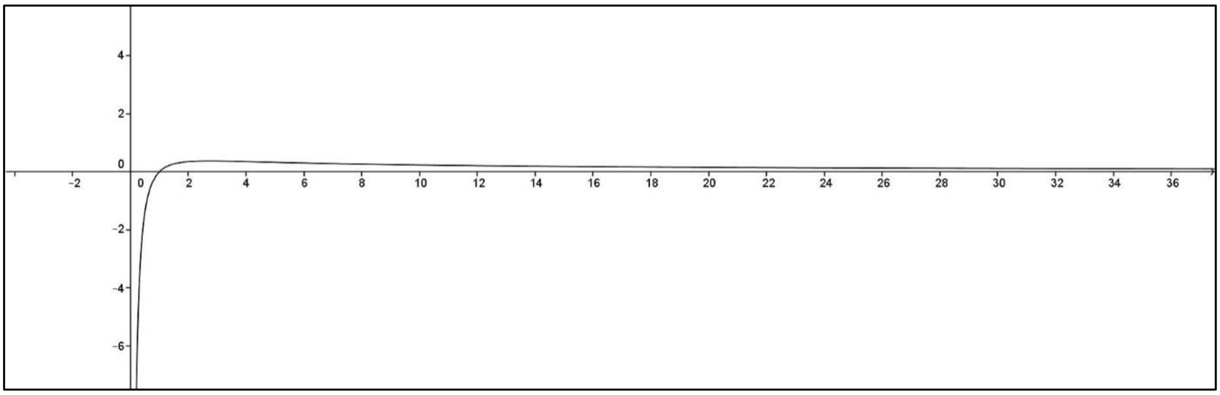
Pri velikih x je $\frac{\ln(x)}{x}$ blizu 0, zato velja

$$f(x+\ln(x)) \approx \frac{x+\ln(x)}{\ln(x)+\ln 1}$$

$$= \frac{x+\ln(x)}{\ln(x)}$$

$$= \frac{x}{\ln(x)} + 1$$

$$f(x+\ln(x)) \approx f(x) + 1$$



Slika 10: Graf funkcije $\frac{ln(x)}{x}$

Če torej veliko realno število x povečamo za ln(x), se vrednost funkcije f poveča za 1. Če je x praštevilo, se bo praštevilska funkcija $\pi(x)$ povečala za 1 ob naslednjem praštevilu. Glede na to, da je $\pi(x) \approx f(x)$, bo torej vrzel od praštevila n do naslednjega praštevila velika približno ln(n).

Nekakšna ocena za dolžino vrzeli med dvema zaporednima prašteviloma bi torej lahko bila vrednost ln(x). Poglejmo, koliko to drži na naslednjem konkretnem primeru.

Primeri:

1. Vzemimo praštevilo 763 458 291 079. Naslednja praštevila so 763 458 291 103, 763 458 291 109, 763 458 291 133, 763 458 291 173, 763 458 291 179, 763 458 291 247, 763 458 291 293 in 763 458 291 307. Za pomoč pri iskanju nadaljnjih praštevil sem uporabila spletno stran [7]. Najprej sem poiskala naključno praštevilo in izračunala katero je po vrsti. Nato sem s pomočjo te spletne strani poiskala še naslednja, tako da sem uporabila spletno možnost za izpis n-tega praštevila. Nato sem izračunala vrzeli med sosednjimi praštevili. Ko sem dobila te razlike sem izračunala še povprečje vrzeli in na koncu primerjala z vrednostjo ln(x).

   Vrzeli med njimi so:

   763 458 291 103 - 763 458 291 079 = 24

   763 458 291 109 - 763 458 291 103 = 6

   763 458 291 133 - 763 458 291 109 = 24

   763 458 291 173 - 763 458 291 133 = 40

   763 458 291 179 - 763 458 291 173 = 6

   763 458 291 247 - 763 458 291 179 = 68

   763 458 291 293 - 763 458 291 247 = 46

763 458 291 307 - 763 458 291 293 = 14

Povprečje prvih dveh vrzeli znaša (24 + 6)/2 =15. Povprečja prvih treh, štirih itd. vrzeli znašajo: 18, 23.5, 20, 28, 30.6, 28.5.

Prej omenjena ocena znaša ln(763.458.291.103)= 27,36112433, kar je na šest decimalk natančno enako tudi ln(763.458.291.307). Vidimo, da ta ocena za povprečno vrzel pri malo daljšem nizu vrzeli niti ni tako slaba.

4. VERJETNOST, DA JE NARAVNO ŠTEVILO Z NEKEGA INTERVALA PRAŠTEVILO

Dejstvo je, da je verjetnost, da se bo pojavilo praštevilo, z naraščanjem števil vedno manjša. Vendar pa še vseeno velja, da jih je neskončno mnogo. To je dokazal že Evklid okoli leta 300 pr. n. št. Njegov dokaz je preprost. Izjavil je, da sta si dve sosednji števili vedno tuji, torej nimata skupnih deliteljev. Sedaj pa je praštevil samo končno in da so to n_1, n_2,… n_p. Če sedaj vsa ta praštevila zmnožimo in dobimo sestavljeno število. Če pa k temu sestavljenemu število prištejemo še 1, zagotovo ni deljivo z nobenim od naših praštevil. Torej je praštevilo. Prišli smo v protislovje z dejstvom, da so bila prej našteta praštevila vsa praštevila. V protislovje smo zašli z napačno predpostavko, da je praštevil končno mnogo.

Verjetnost, da je neko naravno število z intervala med 1 in n praštevilo, lahko izračunamo tako, da celoto delimo z deležem: $\frac{\pi(n)}{n}$. Za približno vrednost lahko uporabimo funkcijo f(n), ki praštevilsko funkcijo pri velikih n dobro aproksimira. Verjetnost je torej enaka

$$\frac{\pi(n)}{n} \approx \frac{n}{\ln(n)\, n} = \frac{1}{\ln(n)}$$

Če želimo izračunati približek za verjetnost, da bomo dobili praštevilo uporabimo $\frac{1}{\ln(n)}$.

Da verjetnost pada, lahko ponazorimo s primerom, da je med prvimi 10 števili približno 40% verjetnost, da bomo naleteli na praštevilo, med prvimi 100 števili je verjetnost že samo 22%. Do 1000 je 168 praštevil in verjetnost da bomo naleteli na enega približno 14% in do 10 000 je 1229 praštevil in verjetnost približno 10%.

Tabela 4

n	π(n)	$\frac{1}{\ln(n)}$	$\frac{1}{\ln(n)}$ $(natančna)$	Relativna napaka
10	4	≅43%	= 0,4342944819	-8.6%
100	25	≅22%	= 0,217147241	13%
1000	168	≅14%	= 0,1447648273	13.8%
10 000	1229	≅10%	= 0,1085736205	11.7%
100 000	9592	≅ 9%	= 0,08685859638	9%
1 000 000	78498	≅ 7%	= 0,07238241365	7.8%
10 000 000	664579	≅ 6%	= 0,06204206884	6.6%

5. NEKAJ ZANIMIVOSTI IZ ZGODOVINE TE PROBLEMATIKE

Omenili smo že, da je o aproksimaciji praštevilske funkcije π razmišljal že petnajstletni Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). O tem so pisali tudi drugi slavni matematiki.

Leta 1798 je francoski matematik Legendre (1752 – 1833) v svoji knjigi *Essai sur la Théie des Nombres* je izjavil, da π(n) aproksimira $\frac{n}{\ln n - 1{,}08366}$.

Njegova konstanta 1,08366 je temeljila na njegovih vrednostih π(n), vendar je šel samo do n = 400 000. Gledano z današnjimi očmi bi bilo boljše, če bi namesto konstante 1,08366 vzel število 1 (kot smo to storili mi v trditvi 2.5).

Tabela 5

n	π(n)	$\frac{n}{logn - 1{,}08366}$	$\frac{n}{logn - 1}$
1000	168	172	169
10 000	1229	1231	1218
100 000	9592	9588	9512
1 000 000	78498	78534	78030
10 000 000	664579	665138	661459
100 000 000	5761455	5769341	5740304
1 000 000 000	50847534	50917519	50701542
10 000 000 000	455052511	455743004	454011971

Prav tako se je z teorijo praštevil ukvarjal ruski matematik Čebišev (1821 – 1894). Čebišev je prvi dejanski uspeh pri dokazovanju praštevilskega izreka (t.j. rezultata, ki ga imamo formuliranega v trditvi 2.4), dosegel leta 1850, ko je dokazal, da obstajajo pozitivne konstante $a \leq 1 \leq b$, tako da je $a(\frac{n}{\ln n}) < \pi(n) < b(\frac{n}{\ln n})$. Dokazal je tudi, da če ima $\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}}$ limito, mora biti njena vrednost ena.

Angleški matematik Sylvester (1814 – 1894) je leta 1882 izboljšal Čebiševo metodo in dokazal, da je mogoče uporabiti *a* = 0.95695 in *b* = 1.04423, če je *n* dovolj velik. Leta 1962 je bilo dokazano, da je mogoče uporabiti *a* = 1 za vse n > 10.

Praštevilski izrek (izrek 2.4) je bil prvič dokazan leta 1896, avtorja dokaza pa sta francoska matematika Hadamard in Vallee Poussin.

Leta 1948 je Paul Erdos naznanil, da sta z Atlejem Selbergom praštevilski izrek dokazala tako, da sta v dokazu uporabila zgolj najbolj enostavne lastnosti logaritemske funkcije.

6. ZAKLJUČEK

Cilj raziskovalne je bil raziskati praštevilsko funkcijo π. To mi je le deloma uspelo, saj v literaturi nastopajo pojmi in sredstva, za katere bi potrebovala več matematičnega znanja. To se je še posebej kazalo pri izbiri funkcij, ki so primerne za aproksimacijo te funkcije.

Raziskovalna naloga je nastajala postopoma. Najprej sem se s temo morala seznaniti in jo raziskati. Med iskanjem literature sem ugotovila, da tema ni znana, saj jo le redko omenjajo v knjigah. Teorijo sem povzela po literaturi na spletu in v knjigi. Pri povzemanju primernih funkcij za aproksimacijo sem si pomagala z literaturo [1, 2, 3]. Razmisleke in primere sem navedla sama.

Pri risanju grafov funkcij sem si pomagala s programom Geogebra, v katerem sem narisala grafe funkcij.

Pri računanju vrednosti praštevilske funkcije π(x) pri večjih *x* sem si pomagala s spletno stranjo [7]. Spletna stran poleg izračuna vrednosti π(x) omogoča tudi izračun *n*-tega praštevila in možnost izbire naključnega praštevila. Tako sem pri primeru v 3. Poglavju najprej s programom izbrala naključno praštevilo, ki je bilo 763 458 291 079. Nato sem izračunala vrednost praštevilske funkcije π(763 458 291 079) = 29 007 003 017. To pomeni, da je izbrano praštevilo 29 007 003 017. po vrsti. Da bi dobila naslednje praštevilo, sem zato uporabila spletno možnost izpisa *n*-tega praštevila za *n*= 29 007 003 018. To je 763 458 291 103. Podobno sem prišla do naslednjih zaporednih praštevil.

Podatke o zgodovinskih zanimivostih sem črpala iz spletnih strani [2,3,5] in iz člankov [1, 8].

Menim, da je obravnavana tema dijakom neznana. Skoraj nobeden se še z obravnavano temo ni srečal, saj je pri rednem pouku ne omenjamo.

LITERATURA

[1] J. B. Rosser, L. Shoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers,* Ill. Journal of mathematics 6 (1962), str. 64 – 94.

[2] *Prime – counting function*, Wikipedia, spletna enciklopedija. Dostopno na spletni strani: http://en.wikipedia.org/wiki/Prime-counting_function
Povzeto dne 11.1.2015.

[3] *How many primes are there?.* Dostopno na spletni strani: https://primes.utm.edu/howmany.html
Povzeto dne: 27.12.2014.

[4] *The online encyclopedia of integer sequences. Decimal expansion of constant C = maximum value that PrimePi(n)*log(n)/n reaches where PrimePi(n) is the number of primes less than or equal to n.* OEIS, spletna enciklopedija. Dostopno na spletni strani: http://oeis.org/A209883 Povzeto dne: 4.1.2015.

[5] *Praštevilski izrek,* Wikipedija, spletna enciklopedija. Dostopno na spletni strani: http://sl.wikipedia.org/wiki/Pra%C5%A1tevilski_izrek Povzeto dne: 2.11.2014.

[6] *Prime counting function,* OESIS, spletna enciklopedija. Dostopno na spletni strani: http://oeis.org/wiki/Prime_counting_function Povzeto dne: 2.11.2014.

[7] *The nth prime page.* Dostopno na: https://primes.utm.edu/nthprime/index.php#piofx
Povzeto dne: 28.10.2014

[8] D. Goldfeld: *The elementary proof of the prime number theorem: an historical perspective.* Dostopno na spletni strani

http://www.math.columbia.edu/~goldfeld/ErdosSelbergDispute.pdf