

Mladi za napredek Maribora 2015

32. srečanje

ŽABICE

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: VITA MOVRIN, LANA GLAVIČ

Mentor: JOŽEF SENEKOVIČ

Šola: OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2015

Kazalo

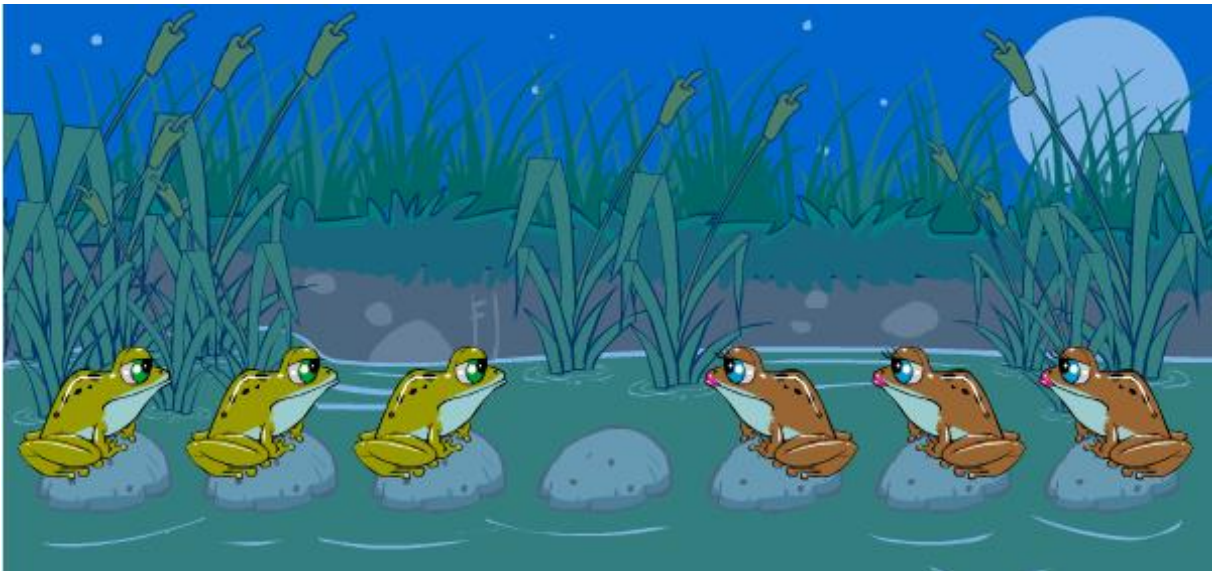
1. Povzetek.....	3
2. Uvod.....	4
3. Igrajmo igro.....	6
3.1 Dve žabici.....	6
3.2 Štiri žabice.....	7
3.3 Šest žabic.....	8
3.4 Osem žabic.....	9
3.5 Deset žabic.....	11
4. Poljubno število žabic.....	13
5. Zaključek.....	15
6. Viri.....	15

1. Povzetek

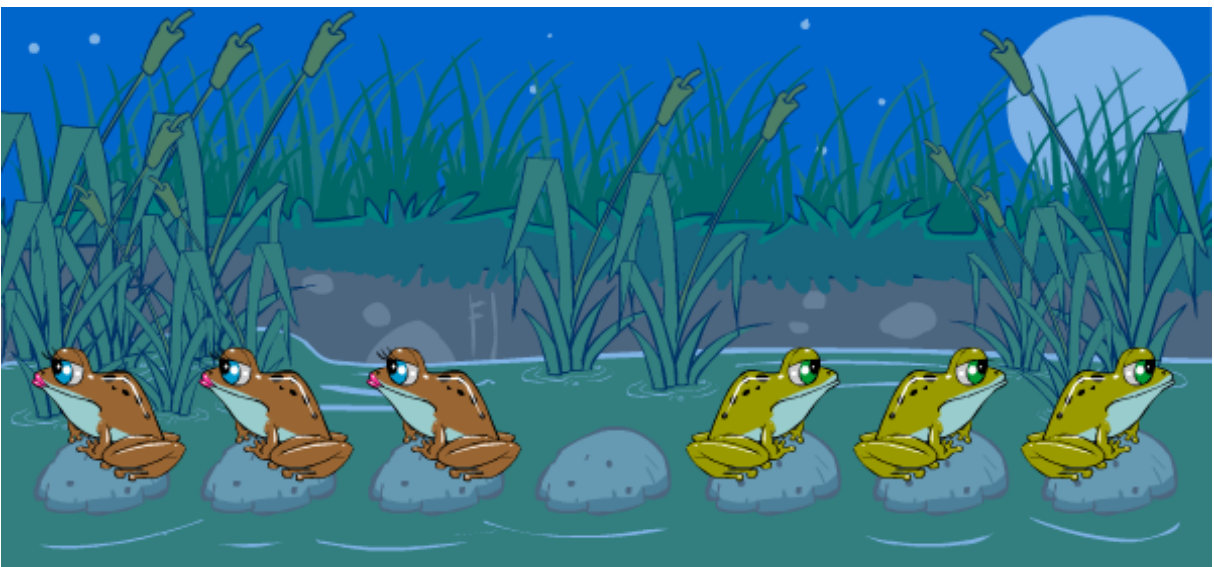
Pri izbirnem predmetu Matematične delavnice sva naleteli na problem, kako zmagati v igri Žabice. Raziskovali sva predvsem s praktičnim delom, igranjem igre. Zastavili sva si cilj, odkriti pravilo igre, po katerem lahko vedno igro uspešno zaključimo, ne glede na število žabic. Najprej sva poskušali ugotoviti pravilo za dve žabici in nadaljevali z vedno večjim številom. Prišli sva do več ugotovitev, s katerimi si lahko pomagamo pri igri žabic, ne glede na število žabic. Ugotovili sva, da lahko za izbrano število žabic določimo točno število in zaporedje skokov in premikov za uspešno dokončanje igre.

2. Uvod

Najbrž poznate igro Žabice. Poglejmo, kako se igra (slika 1). V igri je sodo število žabic, polovico ženskega spola, polovico moškega spola (seveda, lahko so različnih barv). Vsaka žabica sedi na svojem kamnu. Med obema skupinama žabic je prost en kamen. Cilj igre je, da žabice s skoki in premiki zamenjajo strani (slika2).



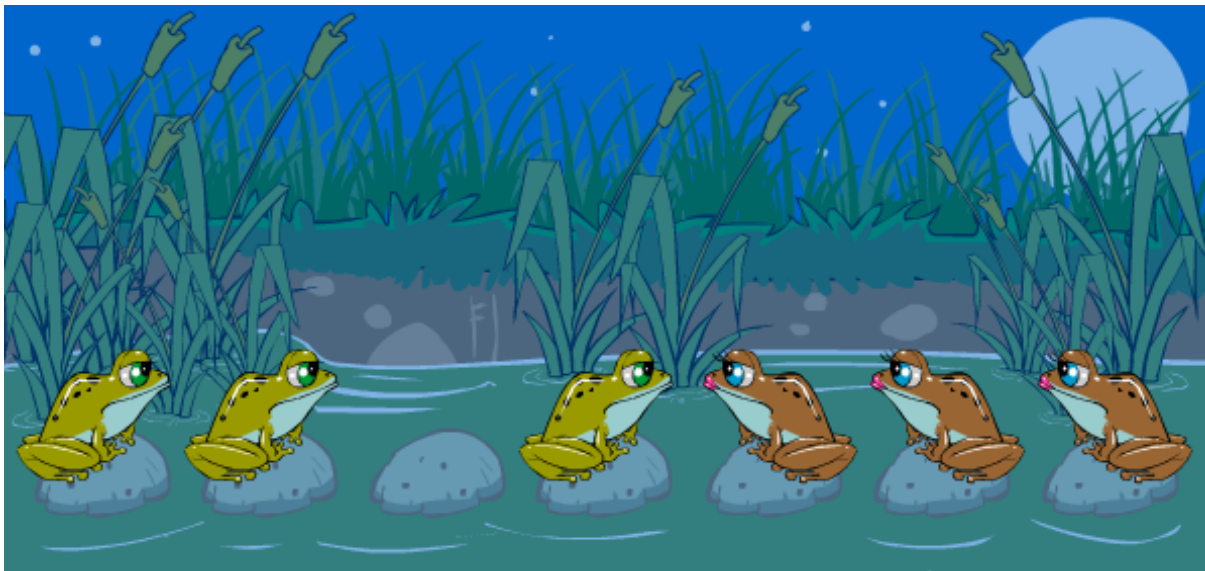
Slika 1



Slika 2

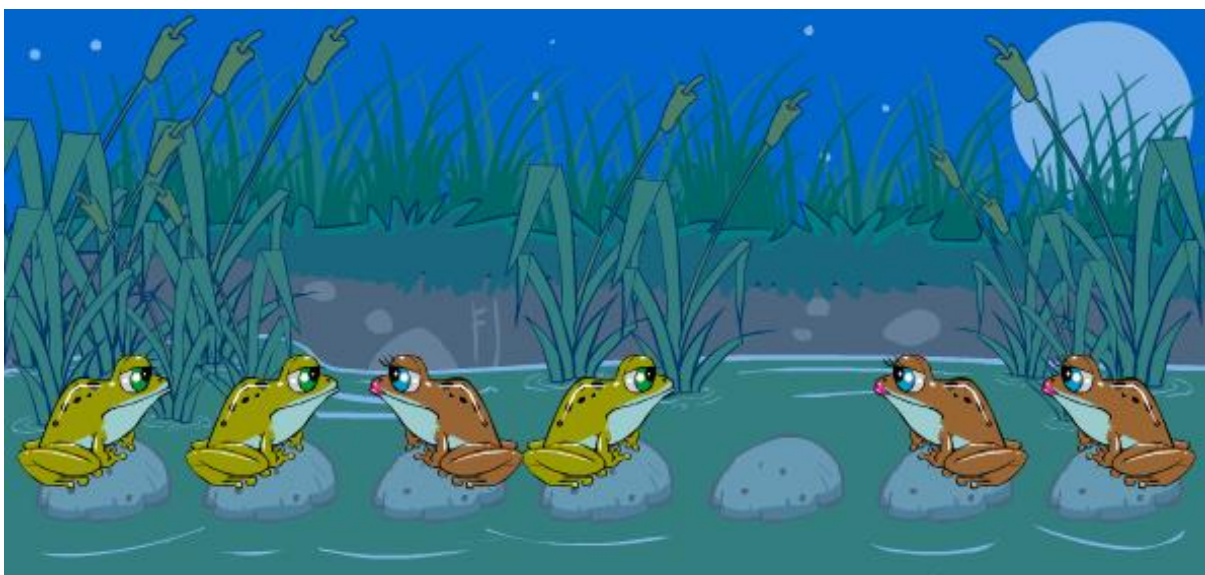
Žabice istega spola (enake barve) se lahko premikajo samo naprej; žabice, ki so na začetku igre na levi strani, v desno smer, žabice, ki so na začetku igre na desni strani, pa v levo smer. Pri tem lahko uporabljajo premike (P) ali skoke (S).

Žabica se lahko premakne na kamen pred seboj (slika 3).



Slika 3

Žabica lahko preskoči le eno žabico, ki je pred njo (slika 4).



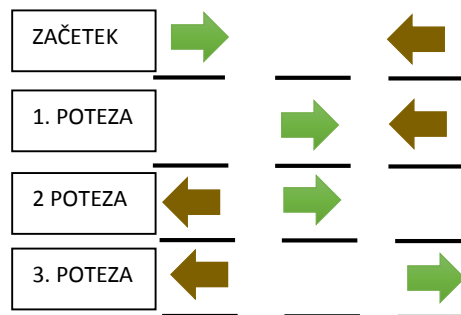
Slika 4

V nadaljevanju raziskovalne naloge bova prikazali, kakšno je pravilo določanja števila in zaporedja premikov (P) ter skokov (S) pri poljubnem številu žabic, ki naj zamenjajo mesta.

3. Igrajmo igro

3.1 Dve žabici

Igrajmo igro z dvema žabicama (slika 5). Žabice so prikazane z dvema različnima barvama. Puščica kaže v smer dovoljenega premikanja (skokov) žabic. Vsaka vrstica prikazuje opravljeno potezo v igri (premik ali skok).



Slika 5

Opišimo spreminjanje položaja žabic v primeru dveh različnih žab. Na začetku sta žabici vsaka na svojem začetnem kamnu.

S prvo potezo zelena žabica opravi premik (P).

Z drugo potezo rjava žabica opravi skok (S) in preskoči zeleno žabico. Potreben je samo še premik zelene žabe (3. poteza) in žabici sta spremenili lego, cilj igre je dosežen.

Zapišimo potek sprememb s simboli: PSP

Ali se število premikov in skokov spremeni, če se kot prva premakne rjava žabica?

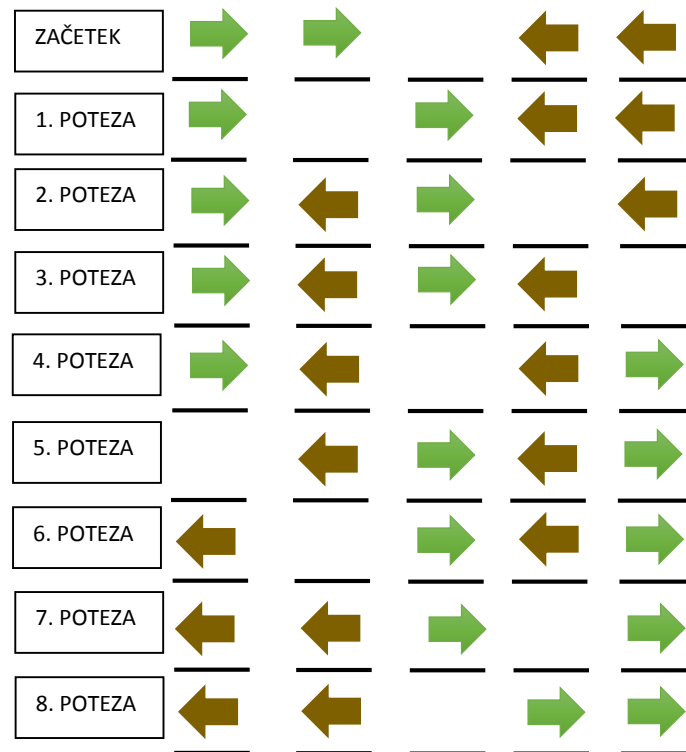
Ugotovili sva, da je vseeno s katero žabico igro začnemo. Vedno poteka igra korakov PSP. V preglednico zapišimo podatke o poteku igre (tabela 1).

ŠTEVILO ŽABIC	PREMIKI	SKOKI	SKUPAJ
2	2	1	3

Tabela 1

3.2 Štiri žabice

V naslednji igri so 4 žabice, po dve enake barve (slika 6).



Slika 6

Na začetku so žabice na izhodiščnih legah.

S prvo potezo zelena žabica opravi premik (P).

Z drugo potezo rjava žabica opravi skok (S) in tako preskoči zeleno žabo.

S tretjo potezo naredi premik (P) rjava žaba.

Nato zelena žaba preskoči rjavo (4. poteza) in tako opravi skok (S), kar naredi tudi druga zelena žaba (5. poteza).

S 6. potezo rjava žabica opravi premik (P) in potezo 7 druga rjava žabica skok (S). S potezo 8 zelena žabica opravi še zadnji premik (P) ter tako žabice spremenijo lego.

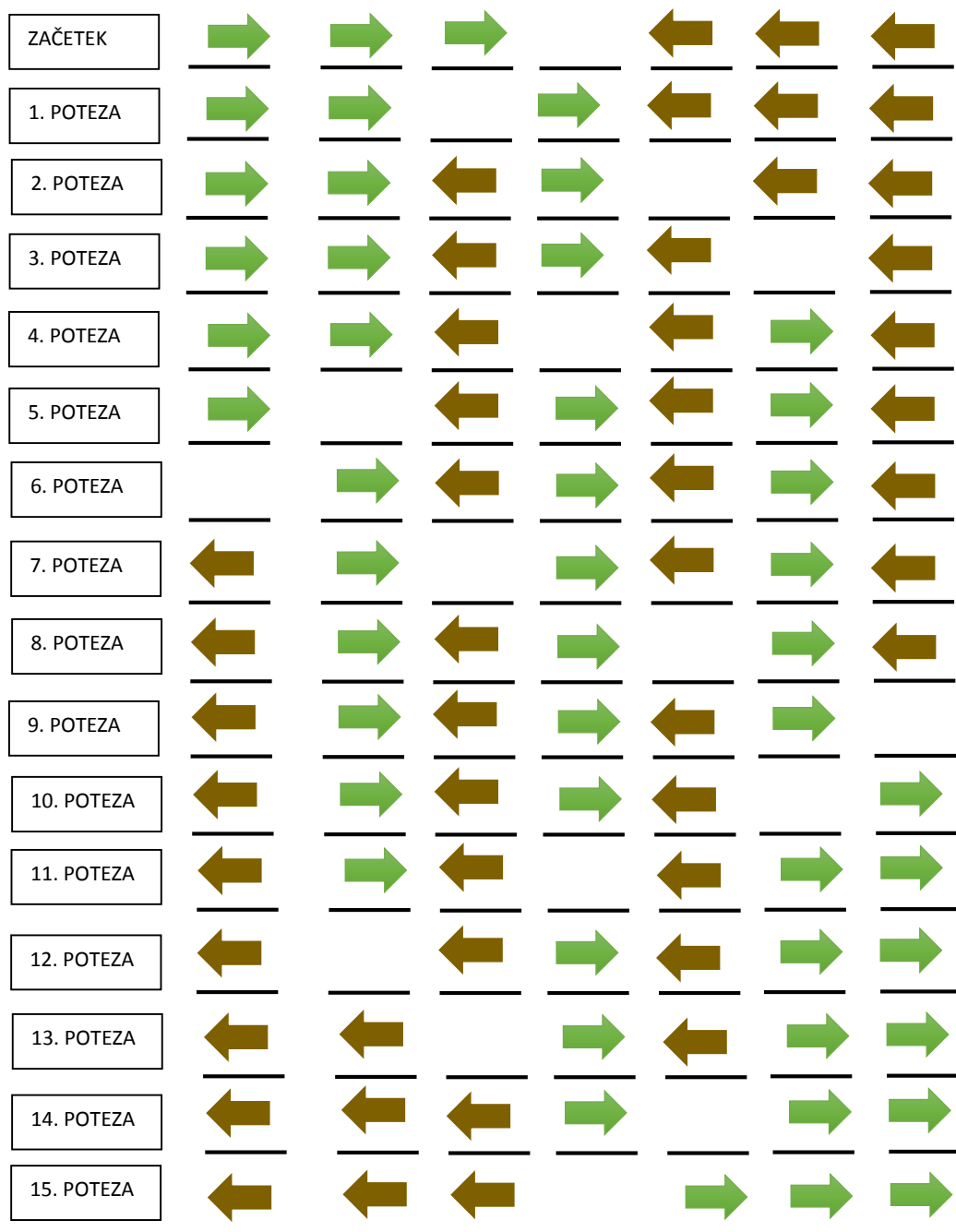
Zapišimo spremembo lege s simboli: PSPSSPSP in v preglednici (tabela 2).

ŠTEVILO ŽABIC	PREMIKI	SKOKI	SKUPAJ
4	4	4	8

Tabela 2

3.3 Šest žabic

V nadaljevanju prikažimo postopek igre s šestimi žabicami, po tri vsake barve (slika 7).



Slika 7

Na začetku so žabice na izhodiščnih legah. S premikom (1. poteza) začne zelena žabica (P), nadaljuje rjava žabica s skokom (S), kar prikažemo z drugo potezo.

Nato se število skokov med dvema premikoma povečuje za en skok vse do osme poteze. Od osme poteze dalje se število skokov med dvema premikoma zmanjšuje vsakokrat za en skok. Igra se konča s premikom, skokom in premikom.

Zapišemo spremembo lege s simboli: PSPSSPSSPSSPSP.

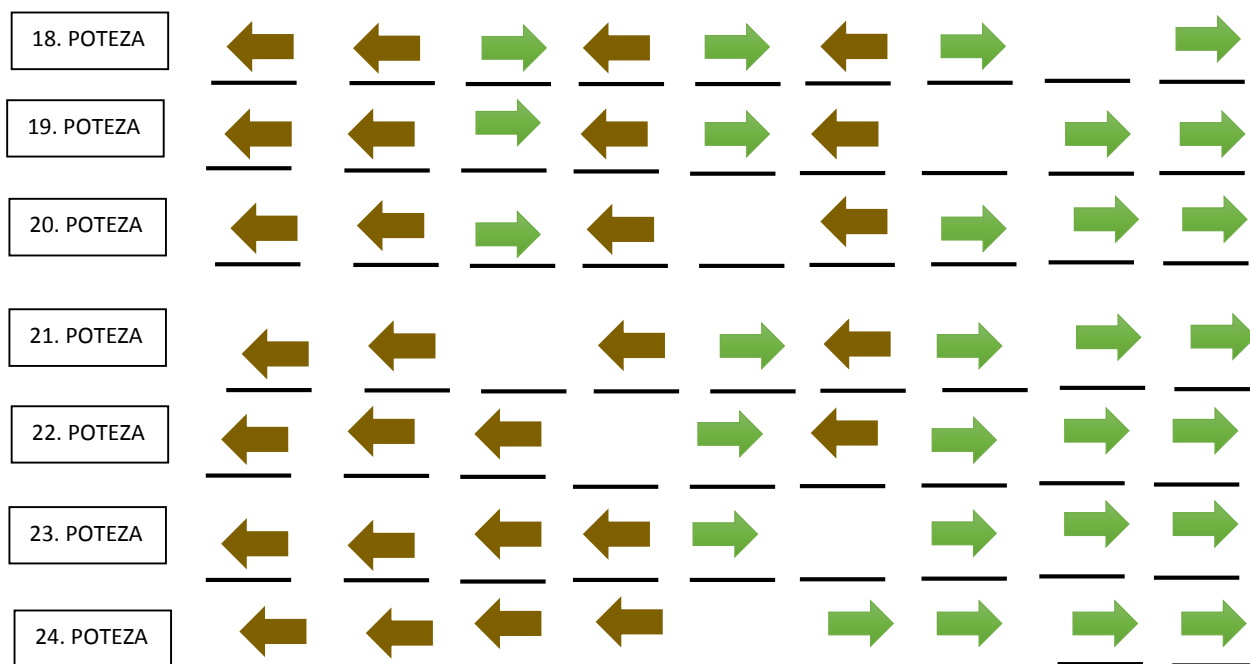
Zapišimo potek igre še v preglednici (tabela 3).

ŠTEVILO ŽABIC	PREMIKI	SKOKI	SKUPAJ
6	6	9	15

Tabela 3

3.4 Osem žabic

ZAČETEK	→	→	→	→		←	←	←	←
1. POTEZA	→	→	→		→	←	←	←	←
2. POTEZA	→	→	→	←	→		←	←	←
3. POTEZA	→	→	→	←	→	←		←	←
4. POTEZA	→	→	→	←		←	→	←	←
5. POTEZA	→	→		←	→	←	→	←	←
6. POTEZA	→		→	←	→	←	→	←	←
7. POTEZA	→	←	→		→	←	→	←	←
8. POTEZA	→	←	→	←	→		→	←	←
9. POTEZA	→	←	→	←	→	←	→		←
10. POTEZA	→	←	→	←	→	←	→	←	
11. POTEZA	→	←	→	←	→	←		←	→
12. POTEZA	→	←	→	←		←	→	←	→
13. POTEZA	→	←		←	→	←	→	←	→
14. POTEZA		←	→	←	→	←	→	←	→
15. POTEZA	←		→	←	→	←	→	←	→
16. POTEZA	←	←	→		→	←	→	←	→
17. POTEZA	←	←	→	←	→		→	←	→



Slika 8

Opišimo spreminjanje položaja žabic v primeru osmih žab, ko so štiri po štiri enake (slika 8). Začetek igre poteka enako kot pri predhodnih igrach z manjšim številom žabic. S prvo potezo premik zelene žabice in z drugo potezo skok rjave žabice.

Pri osmih žabicah število skokov najprej narašča do 9. poteze in se nato zmanjšuje.

Zapišimo spremembo lege s simboli: PSPSSPSSSPSSSPSSSPSSPSP.

Zapišimo potek igre še v preglednici (tabela 4)

ŠTEVILO ŽABIC	PREMIKI	SKOKI	SKUPAJ
8	8	16	24

Tabela 4

3.5. Deset žabic

ZAČETEK	→	→	→	→	→		←	←	←	←	←
1. POTEZA	→	→	→	→		→	←	←	←	←	←
2. POTEZA	→	→	→	→	←	→		←	←	←	←
3. POTEZA	→	→	→	→	←	→	←		←	←	←
4. POTEZA	→	→	→	→	←		←	→	←	←	←
5. POTEZA	→	→	→		←	→	←	→	←	←	←
6. POTEZA	→	→		→	←	→	←	→	←	←	←
7. POTEZA	→	→	←	→		→	←	→	←	←	←
8. POTEZA	→	→	←	→	←	→		→	←	←	←
9. POTEZA	→	→	←	→	←	→	←	→		←	←
10. POTEZA	→	→	←	→	←	→	←	→	←		←
11. POTEZA	→	→	←	→	←	→	←		←	→	←
12. POTEZA	→	→	←	→	←		←	→	←	→	←
13. POTEZA	→	→	←		←	→	←	→	←	→	←
14. POTEZA	→		←	→	←	→	←	→	←	→	←
15. POTEZA		→	←	→	←	→	←	→	←	→	←
16. POTEZA	←	→		→	←	→	←	→	←	→	←
17. POTEZA	←	→	←	→		→	←	→	←	→	←
18. POTEZA	←	→	←	→	←	→		→	←	→	←



Slika 9

Opišimo spreminjanje položaja žabic v primeru desetih žab, kjer je pet po pet enakih (slika 9).

Pri tej igri prav tako držijo ugotovitve iz prejšnjih iger, npr. število skokov narašča in pada,

zaporedje skokov in premikov je vedno enako, ne glede na to, s katero žabico začnemo.

Zapišimo spremembo lege s simboli: PSPSSPSSSPSSSSPSSSSPSSSSPSSSPSSPSP.

Zapišimo potek igre še v preglednici (tabela 5).

ŠTEVILO ŽABIC	PREMIKI	SKOKI	SKUPAJ
10	10	25	35

Tabela 5

4. Poljubno število žabic

Za vsako izbrano število žabic (2, 4, 6 ...) sva število skokov in premikov zapisali v preglednice. Združimo vse ugotovitve v eni preglednici (tabela 6) in opravimo premislek, kako ugotovimo število skokov in premikov za poljubno število žabic (je sodo število). Z n označimo število žabic ene barve, torej imamo za $n = 1$ (npr. ena zelena žabica, zato še ena rjava) dve žabici in tako dalje.

n	Žabice	Skoki (S)	Premiki (P)	Skupaj (S+P)
1	2	1	2	3
2	4	4	4	8
3	6	9	6	15
4	8	16	8	24
5	10	25	10	35
n	$2n$	n^2	$2n$	$n^2 + 2n$

Tabela 6

Kaj pa zaporedje teh skokov in premikov?

Ugotovili sva, da se vsaka uspešna igra začne in konča s premikom. Pred vsakim premikom je vedno skok (izjema je prvi premik) in za vsakim premikom je vedno skok (izjema je zadnji premik). Med dvema premikoma je lahko več zaporednih skokov, toda ne več kot n (polovica števila vseh žabic).

Ali lahko ugotovimo zaporedje skokov in premikov za določeno število žabic? Kako?

Ugotovili sva, da za katerokoli izbrano število žabic lahko ugotovimo točno zaporedje skokov in premikov. Zapišimo najprej poteze za že znano število žabic:

2 žabici **PSP**,

4 žabice **PSPSSPSP**,

6 žabic **PSPSSPSSSPSSPSP**,

8 žabic **PSPSSPSSSPSSSPSSPSSPSP**,

10 žabic **PSPSSPSSSPSSSPSSSPSSSPSSPSSPSP**.

Zaporedje potez se začne s premikom (P) in nadaljuje s skokom (S) ter nato s še enim premikom (P), torej PSP ne glede na število žabic. Zaporedje potez je simetrično zapisano. V osrednjem delu je vedno toliko skokov, kot je žabic ene barve (n). Na levo in desno pa se simetrično nadaljuje zaporedje s premikom in za ena manj skokov, kot je v osrednjem delu. Poglejmo primer za 12 žabic. Zaporedje potez se začne in konča s PSP. Ker je skupaj 12 žabic, je $n = 6$, kar pomeni, da je v osrednjem delu 6 skokov. Na levo in desno se nadaljujejo poteze SSSSP, SSSSP, SSSP, SSP:

PSP(2S)P(3S)P(4S)P(5S)P(6S)P(5S)P(4S)P(3S)P(2S)PSP.

V skladu z ugotovitvami v tabeli 6, opravimo 36 skokov ($n^2 = 6^2 = 36$) in 12 premikov ($2n$), kar je skupaj 48 potez.

Za poljubno število, n žabic, lahko zaporedje potez zapišemo tako:

PSP(2S)P(3S)P...(($n - 2$)S)P(($n - 1$)S)P(n S)P(($n - 1$)S)P(($n - 2$)S)...P(3S)P(2S)PSP.

5. Zaključek

V raziskovalni nalogi sva želeli ugotoviti ali lahko vnaprej napovemo število premikov in skokov pri igri žabic. Z igranjem igre, opazovanjem, premišljanjem in posploševanjem nama je to uspelo. Za poljubno izbrano število žabic ene barve (n) je skupno število žabic $2n$. Najmanjše število potez, torej skokov in premikov je $n^2 + 2n$, kjer z n^2 zapišemo število skokov, z $2n$ pa število premikov, ki jih z žabicami naredimo. Glede na najino raziskavo pa lahko napovemo tudi zaporedje premikov in skokov, da igro uspešno končamo z najmanjšim možnim številom potez.

Mnenja sva, da s svojo raziskovalno nalogo tudi prispevava k dojetanju računalniških ali drugih igravic kot viru matematičnega znanja. Tako matematika ni samo nujno zlo v šolskih klopeh, ampak postane tudi orodje za učinkovito reševanje težav, problemov ali za razjasnitev zanimivosti.

Pri pisanju raziskovalne naloge sva se veliko naučili in morda nama bodo spoznana pravila še kdaj koristila.

6. Viri

(1) Igra <http://www.igre5.com/igre-zabe/obrni-zabe.php>, 2009 – 2013

(2) Prispevki k poučevanju matematike, Lidija Fideršek, Nevenka Letonja, Zelene in rjave žabe str. 271 – 274, Maribor: založba Rotis 1996