»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2015«

32. SREČANJE

PITAGOROV IZREK MALO DRUGAČE?

MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

Avtor: NEJC KOGLER

Mentor: MARJANA OGRINC, ANDREJA FERK

Šola: OŠ TONETA ČUFARJA MARIBOR

MARIBOR, FEBRUAR 2015

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2015«

32. SREČANJE

PITAGOROV IZREK MALO DRUGAČE?

MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

MARIBOR, FEBRUAR 2015

KAZALO VSEBIN

1 POVZETEK

Pitagorov izrek je eden najpomembnejših geometrijskih enačb. Zapisal ga je starogrški matematik Pitagora v 6. stoletju pred našim štetjem. O čem pa govori Pitagorov izrek? Govori o določenosti dolžin stranic v pravokotnem trikotniku: če sta znani dve stranici v pravokotnem trikotniku, tretja ni poljubna, ampak natanko določena. Lahko jo izračunamo z enačbo ${k_1}^2 + {k_2}^2 = h^2$. To zvezo lahko z besedo opišemo: ploščina kvadrata nad hipotenuzo je enaka vsoti ploščin kvadratov nad katetama. Ali velja ta zveza res le za ploščine kvadratov nad stranicami?

V tej nalogi bom poskusil ugotoviti, če velja zveza tudi med ploščinami pravilnih večkotnikov, ki jih narišemo nad stranicami. Za raziskovanje te teme me je pritegnila naloga pri preizkusu znanja iz matematike v 8. razredu. V njej sem moral izračunati ploščino lika, ki ga omejujejo polkrogi nad stranicami pravokotnega trikotnika. Bil sem presenečen nad rešitvijo naloge.

2 UVODNI DEL

2.1 Cilji

Pred začetkom raziskovanja sem si zastavil cilj, da ugotovim, ali Pitagorov izrek res velja le za kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika. Odločil sem se za matematiko, ker me to področje zanima in sem v šoli pri predmetu zelo uspešen.

Cilji moje raziskovalne naloge so tako:

- izvedeti več o grški matematiki,
- s pomočjo merjenja, izračunov, grafičnim prikazom ugotoviti, če je možno kvadrat nad stranico pravokotnega trikotnika nadomestiti z drugimi liki,
- širiti novo odkrito znanje z sovrstniki in drugimi, ki jih to področje zanima,
- ugotoviti kaj se dogaja z ploščino likov nad stranicami pravokotnega trikotnika.

2.2 Hipoteza

Predpostavil sem naslednjo hipotezo:

- trdim, da je možno kvadrat nad stranico zamenjati s vsemi pravilnimi liki ter polkrogom, da ostane vsota ploščin likov nad katetama še vedno enaka ploščini lika nad hipotenuzo.

2.3 Metodologija

2.3.1 Določitev namena raziskovalne naloge

Za raziskovalno nalogo sem se odločil, da razširim svoje znanje na področju, ki me zanima. Čeprav je Pitagora in njegov izrek pri učencih pogosto izbrana tema za raziskavo, sem vseeno želel,da poiščem odgovor na vprašanje, ki se mi poraja v mislih že od 8. razreda.

2.3.2 Določitev ciljev in hipoteze raziskovalne naloge

Moji cilji in hipoteze izhajajo iz mojega osebnega zanimanja in fascinacije za to področje, na novo pridobljeno znanje pa bi delil z mojimi sovrstniki in drugimi, ki jih to prav tako zanima.

2.3.3 Iskanje informacij in študij svoje teme

Moj poglavitni vir informacij je zgodovinska in matematična literatura, ki sem jo navedel na koncu raziskovalne naloge. Pri grafičnih prikazih sem si pomagal z matematično aplikacijo Geogebra.

2.3.4 Uporabljene metode dela

2.3.4.1 Raziskovanje

Pri raziskovanju sem izhajal iz pravokotnega trikotnika s stranicami 3 cm, 4 cm in 5cm. Dokazal ali zavrnil pa sem hipotezo z:

- merjenjem potrebnih podatkov in izračunom ploščin likov nad stranicami pravokotnega trikotnika,
- grafičnim prikazom enakosti ploščin,
- dokazovanje.

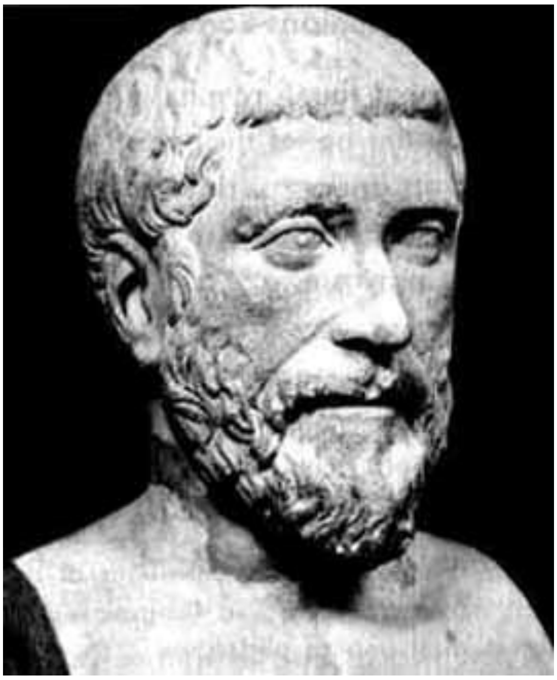
3 VSEBINSKI DEL

3.1 Grška matematika

Mnogo starih kultur je razvilo razne vrste matematike, grški matematiki pa so bili edini, ki so v središče postavili logično sklepanje in dokaz. S to potezo so za vedno spremenili pogled na matematiko. *(Willia P. Berlinghoff, Fernando q. Guevea, Matematika skozi stoletja, 2008, Ljubljana, Založba Modrijan, str. 28)*

Žal ne poznamo natančne letnice kdaj se je grška matematika začela, v zgodovinskih zapisih Grkov pa lahko razberemo, da prvi matematični dokazi izvirajo iz okoli leta 600 pr. n. št. Izročilo teh znamenitih matematikov pa je ostalo živo in se je razvijalo še vse do okoli leta 400 n. št. V teh, skorajda tisočih letih je prišlo seveda tudi do številnih sprememb in rasti, kar je zgodovinarjem, ki so preučevali to obdobje postavilo še eno oviro k razumevanju nenavadne grške nagnjenosti k tej vedi. Ko govorimo o grški matematiki moramo poudariti, da je s tem mišljen jezik, v katerem so bila napisana matematična dela. Grščina je bila eden pogostejših jezikov velikega dela Sredozemlja. Bila je jezik trgovine in kulture, ki so ga govorili izobraženi ljudje. Podobno je bilo grško matematično izročilo, ki je bilo prevladujoča oblika takratne teoretične matematike. Vsi "grški"matematiki namreč niso bili Grki po narodnosti. Arhimed je bil npr. iz Sirakuz na Siciliji, ki je danes del Italije, Evklid pa verjetno iz Aleksandrije, v Egiptu. V večini primerov ne vemo ničesar o dejanski narodnosti, državljanstvu ali veroizpovedi teh matematikov. Kar jih je povezovalo pa so bila tradicija, način razmišljanja, jezik in kultura. Podobno kot pri večini grških filozofov so bili tudi matematiki v začetnem obdobju ljudje, ki jim je premoženje zagotavljalo neodvisnost, tako da so se lahko ukvarjali z učenjaškimi konjički. Pozneje so si matematiki služili kruh kot astrologi, nekaj jih je podpirala država,viri pa kažejo, da so številni tudi poučevali (seveda je to mišljeno kot privatni učitelji ki so poučevali le otroke premožnih prebivalcev). Na splošno so se lahko z matematiko ukvarjali le tisti, ki so imeli dovolj premoženja in časa, seveda pa tudi matematičnega daru. Število dejavnih in ustvarjalnih matematikov je bilo skozi to obdobje po vsej verjetnosti zelo nizko, mogoče jih je bilo vsega le kak ducat. Večinoma so delali sami, med seboj pa so komunicirali preko pisem. Kljub temu jim je uspelo zgraditi intelektualno tradicijo, ki je naredila vtis na vsakogar, ki je prišel v stik z njo. V grški matematiki je bila prevladujoča oblika geometrija, čeprav so Grki preučevali tudi lastnosti celih števil, teorijo razmerij, astronomijo in mehaniko. Tudi astronomijo in mehaniko so poučevali v poudarjenem geometrijskem in teoretičnem slogu. Ločnica med čisto in uporabno matematiko še ni bila jasna (ta ločnica je dejansko nastale šele v 19. stoletju). Stari grški zgodovinarji geometrije trdijo, da sta bila prva grška matematika Tales, ki je živel okoli 600 pr. n. št., in Pitagora, ki je ustvarjal stoletje za njim. Ko so pisali zgodovino matematike, sta bila Tales in Pitagora že mitski figuri iz daljne preteklosti. O njiju so pisali številne zgodbe in težko je določiti katere, če sploh katere, opisujejo tudi zgodovinsko resnične dogodke. Za Talesa pravijo, da je bil prvi, ki je poskušal dokazati nekaj geometrijskih izrekov. Med njimi so bile tudi trditve, da je vsota vseh kotov v vsakem trikotniku enaka vsoti dveh pravih kotov, da je razmerje med enakoležnimi stranicami podobnih trikotnikov enako za vse stranice in da vsak premer razdeli krog na dva enaka dela.

3.2 Pitagora in njegovi privrženci



(Slika1: Grški matematik Pitagora vir:

http://www2.arnes.si/~mtanko/pitagora.htm)

Pitagora je bil eden izmed treh znamenitih grških matematikov, zraven matematike pa se je ukvarjal tudi z filozofijo in specifično filozofijo mistike. O njegovem zgodnjem življenju ni znanega veliko, zgodovinarji pa se strinjajo, da se je najverjetneje rodil okoli leta 570 pr. n. št. na otoku Samos v Grčiji in da je bil njegov oče najverjetneje trgovec. Znana je anekdota, ki pravi, da je njegovi materi vedeževalka napovedala, da bo rodila slavnega sina. Pitagora je bil že v mlajših leti razgledan, rad je potoval in se posvečal astronomiji, matematiki, poeziji… Upošteval je nasvet, ki mu ga je dal velik grški filozof Tales in odpotoval v Egipt, kjer se je učil matematike in filozofije. Osredotočil se je predvsem na geometrijo. Ko pa so Egipt zavzeli Perzijci, so za jetnika vzeli tudi Pitagoro in ga odpeljali v Babilon. Ob vrnitvi na prostost je odšel nazaj na Samos, od tam pa na Kreto, kjer je študiral pravo. Kmalu za tem se je znova vrnil na Samos, kjer je osnoval šolo imenovano Polkrog. Okoli leta 518 pr. n. št. se je preselil v Kroton v južni Italiji, kjer je ustanovil filozofsko in versko ločino, ki je kmalu privabila veliko moških in ženskih privržencev. Člani iz notranjega kroga ločine so se imenovali mathematikoi in Pitagora je od njih zahteval, da se držijo strogih pravil. Morali so se odpovedati premoženju, postati vegetarijanci in privzeti njegova verovanja:

1. Na najgloblji ravni je resničnost po naravi matematična.

2. Filozofijo je mogoče uporabiti za duhovno očiščenje.

3. Duša se lahko dvigne do edinosti z božjim.

4. Nekateri simboli imajo mistično veljavo.

5. Vsi bratje morajo strogo spoštovati zvestobo in tajnost.

Pri Pitagori so se prepletale zamisli o matematiki, filozofiji in veri. Pitagori pogosto pripisujemo trditev: "Vse je število!", ki pa jo je morda napisal šele Aristotel sto let pozneje. Vse delo, ki ga pripisujemo Pitagori, je nastalo v pitagorejski ločini, tako da ni nujno, da je imel zanj zasluge samo Pitagora. Morda je po ironiji usode Pitagorov izrek dokazal kakšen od njegovih učencev in ne sam Pitagora. (Prvi del izreka- vsota kvadratov dveh krajših stranic oz. katet pravokotnega trikotnika je enaka kvadratu tretje, daljše stranice oz. hipotenuze so našli na babilonski glineni tablici, ki izvira iz obdobja 1900-1600 pr. n. št., torej celo tisočletje prej, preden je živel Pitagora. Vseeno pa je sam Pitagora, ali eden njegovih privržencev dokazal, da to res zmeraj velja. Vemo, da je ta skupina matematikov in filozofov preučevala geometrijo in je vsaj v začetku verjela, da so vsa števila racionalna. To pomeni, da je bilo po njihovem mnenju mogoče vsako število zapisati kot celo število, ali pa kot količnik dveh celih števil. Tukaj obstaja tudi zanimiva anekdota, ki pravi da je Pitagorove učence odkritje iracionalnih števil tako razburilo, da so odkritelja, Hipasa, vrgli v morje.

Skupaj z svojimi privrženci pa je veliko in naporno razmišljal o deliteljih števil in količnikih. Pitagora je opravil tudi prvo matematično raziskavo glasbe, v kateri je ugotovil, da več strun, ki nihajo in katerih dolžine tvorijo druga z drugo količnike celih števil, s tem ustvarjajo harmonične tone. Morda je to izboljšalo njegovo igranje, saj je Pitagora izvrstno igral na liro. Umrl je okoli leta 495 pr. n. št. v Metaponumu v Italiji.

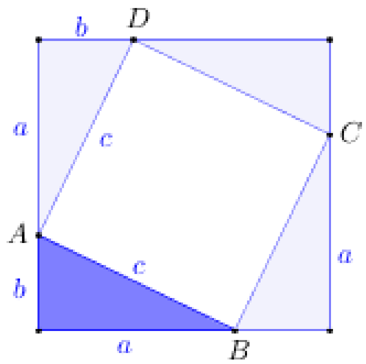
3.2.1 Pitagorov izrek

Pitagorov izrek je verjetno najbolj znan pojem v geometriji. Dokazal ga je grški matematik Pitagora, govori o razmerju stranic v pravokotnem trikotniku. Pitagorov izrek je sledeč: $a^2 + b^2 = c^2$, torej z besedami vsota ploščin kvadratov nad katetama je enaka ploščini kvadrata nad hipotenuzo.

Dokazov Pitagorovega izreka je veliko, seveda pa so pravi dokazi tisti, pri katerih so stranice trikotnika poljubne.

Dokaz 1:

Vsak pravokotni trikotnik lahko s tremi njegovimi kopijami sestavimo v kvadrat s stranico$(a + b)$. Lik ABCD ima skladne stranice, zato je lahko romb ali kvadrat. Kot DAB je enak $180° - \alpha - \beta = 90°$, zato je ABCD kvadrat. Izračunamo lahko ploščino večjega kvadrata na dva načina: $(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$. Od tod s krajšim računom potrdimo Pitagorov izrek. (*http://eucbeniki.sio.si/vega2/244/index3.html* (15.1.2015, 18:20))



(Slika 2: Dokaz Pitagorovega izreka 1, vir:http://eucbeniki.sio.si/vega2/244/dokaz_1.png)

Dokaz 2:

V tem dokazu uporabimo Evklidova izreka in dejstvo da je vsota pravokotnih projekcij katet na hipotenuzo enaka hipotenuzi $(a_1 + b_1 = c)$.

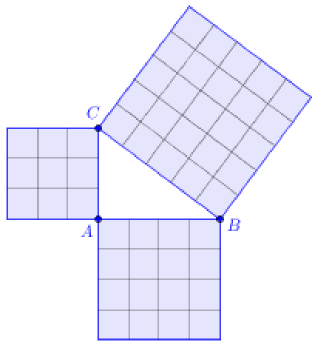
$a^2 = c \cdot a_1$ oz. $b^2 = c \cdot b_1$

$a^2 + b^2 = c \cdot a_1 + c \cdot b_1 = c \cdot (a_1 + b_1) = c^2$

(*http://eucbeniki.sio.si/vega2/244/index3.html* (15.1.2015, 18:20))

Dokaz 3:

V osnovni šoli Pitagorov izrek potrdijo s pomočjo spodnje slike s preštevanjem kvadratkov. To seveda ni splošen dokaz, le potrditev izreka za izbrani trikotnik , ki ima kateti z dolžinama 3 in 4, hipotenuza pa meri 5 cm. (http://eucbeniki.sio.si/vega2/244/index3.html(15.1.2015, 18:20))



(Slika 3 : Dokaz Pitagorovega izreka 3 ,vir:http://eucbeniki.sio.si)

4 RAZISKOVALNI DEL

Pri raziskovanju sem izhajal iz pravokotnega trikotnika s stranicami 3 cm, 4 cm in 5cm. Določil sem si naslednji vrstni red raziskovanja:

- grafični prikaz,

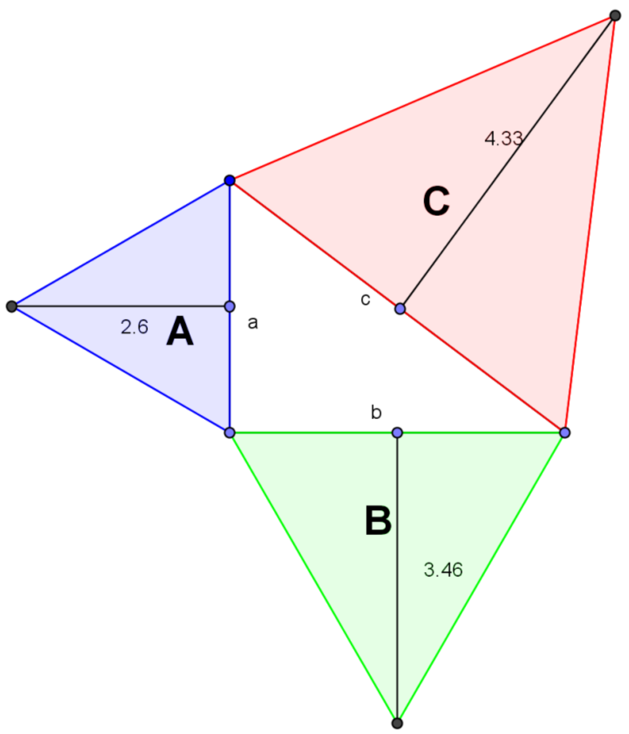
- merjenje potrebnih podatkov,

- izračun ploščin likov nad stranicami pravokotnega trikotnika,

- grafični prikaz enakosti ploščin,

- dokaz (kjer je mogoče).

4.1 Enakostranični trikotnik



(Slika 4: Enakostranični trikotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor)

Izračun:

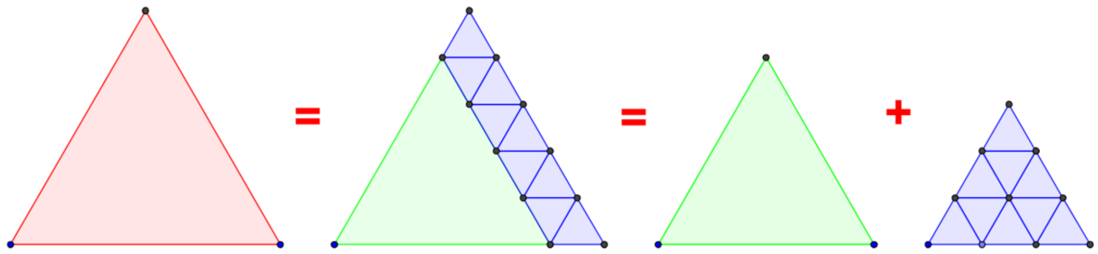
$$p_A + p_B = \frac{a \cdot v_a}{2} + \frac{b + v_b}{2} = \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} + \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 3{,}9 + 6{,}92 = 10{,}82 cm^2$$

$$p_C = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}825\ cm \ \rightarrow\ p_C \doteq p_A + p_B$$

Dokaz:

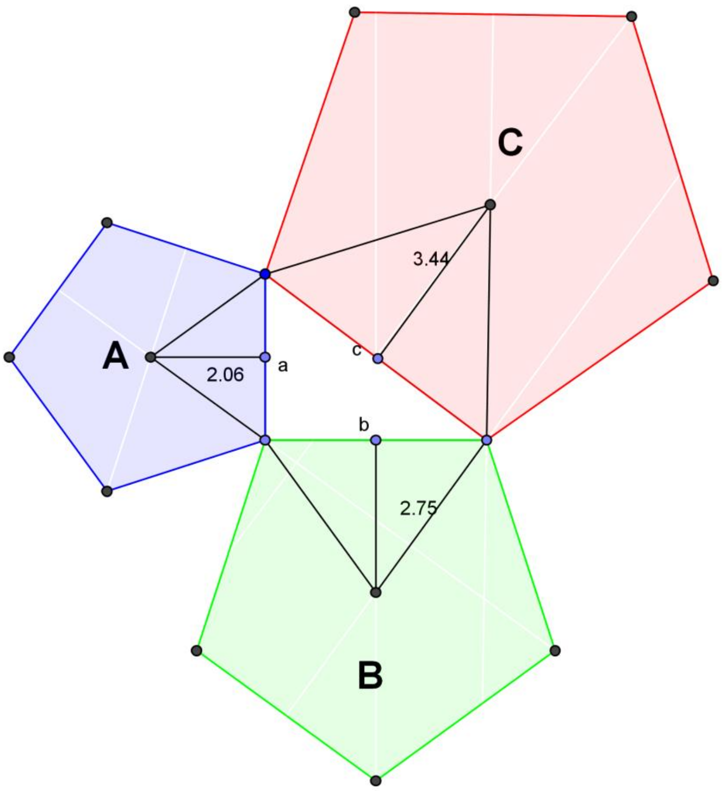
$$p_A + p_B = \frac{a \cdot v_a}{2} + \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 = p_C$$

Grafični prikaz enakosti ploščin:



(Slika 5: Ploščine enakostraničnih trikotnikov, vir: avtor)

4.2 Pravilni petkotnik



(Slika 6: Pravilni petkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor)

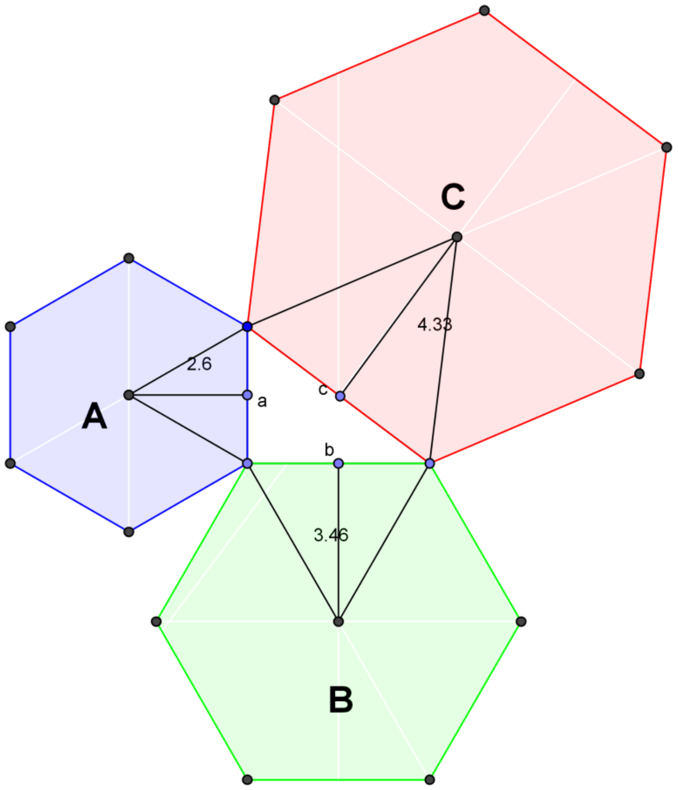
Ploščino pravilnih petkotnikov sem izračunal tako, da sem v njih poiskal središče in petkotnik razdelil na pet skladnih enakokrakih trikotnikov.

Izračun:

$$p_A + p_B = 5 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} + 5 \cdot \frac{b \cdot v_b}{2} = 5 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}06}{2} + 5 \cdot \frac{4 \cdot 2{,}75}{2} = 15{,}45 + 27{,}5 = 42{,}95 cm^2$$

$$p_C = 5 \cdot \frac{c v_c}{2} = 5 \cdot \frac{5 \cdot 3{,}44}{2} = 43 cm^2 \rightarrow \; p_C = p_A + p_B$$

4.3 Pravilni šestkotnik



(Slika 7: Pravilni šestkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor)

Izračun:

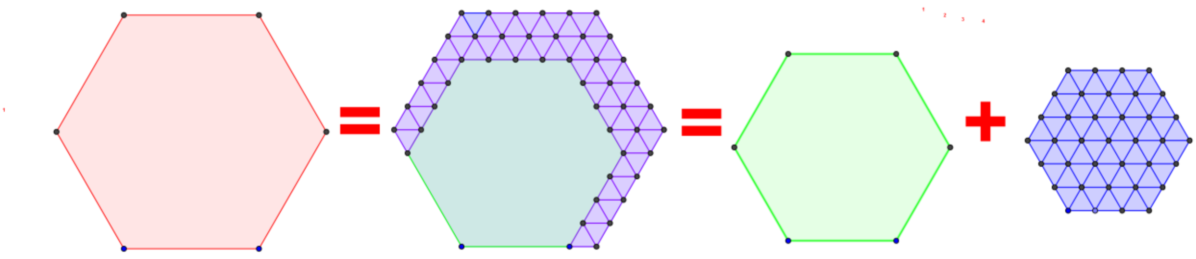
$$p_A + p_B = 6 \cdot \frac{a\, v_a}{2} + 6 \cdot \frac{b v_b}{2} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} + 6 \cdot \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 23{,}4 + 41{,}52 = 64{,}92\ cm^2$$

$$p_C = 6 \cdot \frac{c v_c}{2} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 cm^2 \quad \rightarrow \quad p_C = p_A + p_B$$

Dokaz:

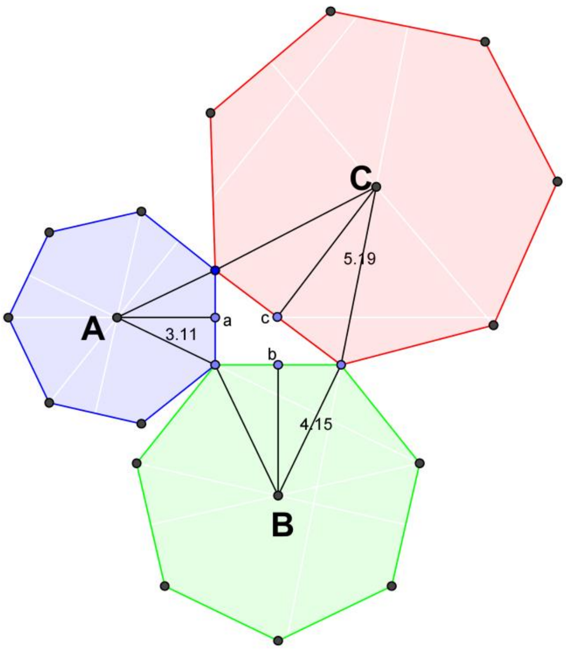
$$p_A + p_B = 6 \cdot \frac{a\, v_a}{2} + 6 \cdot \frac{b v_b}{2} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 = p_C$$

Grafični prikaz enakosti ploščin:



(Slika 8: Ploščine pravilnih šestkotnikov, vir avtor)

4.4 Pravilni sedemkotnik



(Slika 9: Pravilni sedemkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor)

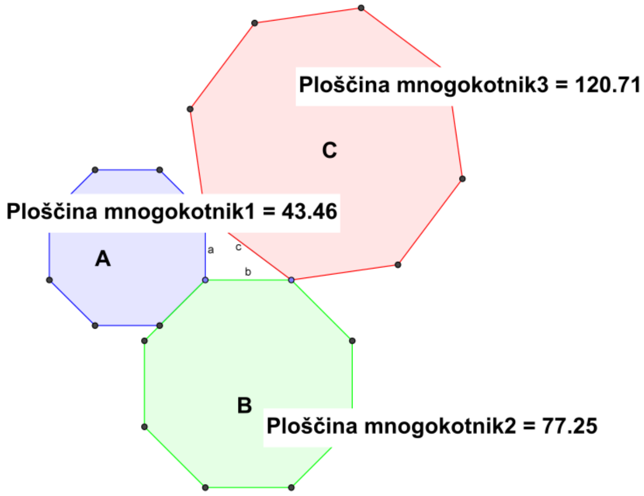
Kot v vseh prejšnjih primerih sem sedemkotnike razdelil na trikotnike, ki so enakokraki in tako izračunal njihovo ploščino.

$$p_A + p_B = 7 \cdot \frac{av_a}{2} + 7 \cdot \frac{bv_b}{2} = 7 \cdot \frac{3 \cdot 3{,}11}{2} + 7 \cdot \frac{4 \cdot 4{,}15}{2} = 32{,}655 + 58{,}1 = 90{,}755 cm^2$$

$$p_C = 7 \cdot \frac{cv_c}{2} = 7 \cdot \frac{5 \cdot 5{,}19}{2} = 90{,}825\ cm^2 \quad \rightarrow\ p_C = p_A + p_B$$

4.5 Pravilni n-kotniki

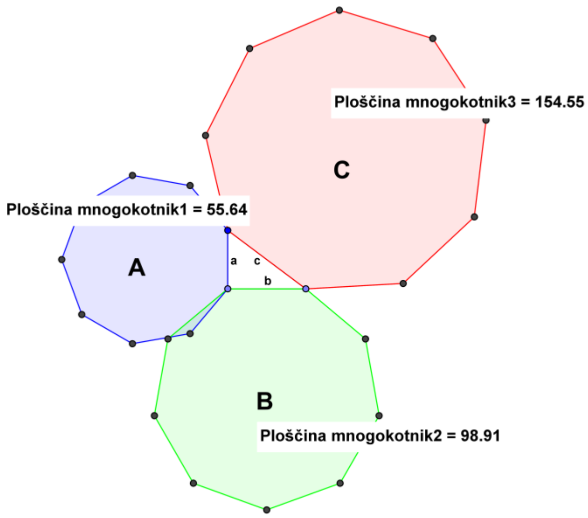
Da je delo potekalo hitreje, sem v aplikaciji Geogebra poiskal možnost prikaza ploščine likov.



(Slika 10: Pravilni osemkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor)

Izračun.

$p_A + p_B = 43{,}46 + 77{,}25 = 120{,}71\ cm^2 \ \rightarrow\ p_C = p_A + p_B$

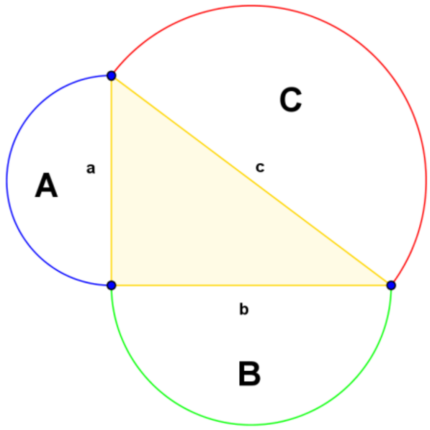


(Slika 11: Pravilni devetkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor)

Izračun:

$p_A + p_B = 55{,}64 + 98{,}91 = 154{,}55\ cm^2 \ \rightarrow\ p_C = p_A + p_B$

4.6 Polkrog



(Slika 12: Polkrogi nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor)

Izračun:

$r_a = 1{,}5cm$

$r_b = 2cm$

$$p_A + p_B = \frac{\pi r_a^2}{2} + \frac{\pi r_b^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{2} + \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 1{,}125\pi\ cm^2 + 2\pi\ cm^2 = 3{,}125\pi\ cm^2$$

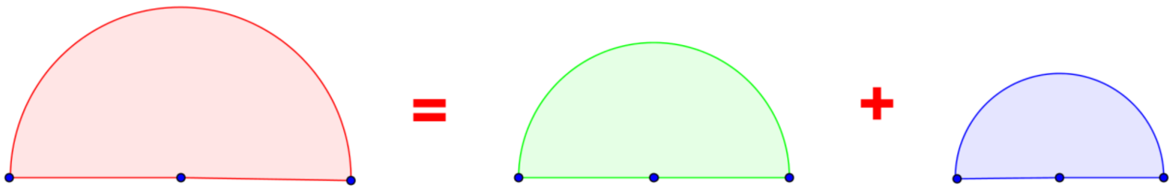
$$p_C = \frac{\pi r_c^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2{,}5^2}{2} = 3{,}125\pi cm^2 \quad \Rightarrow p_C = p_A + p_B$$

Dokaz:

$$p_A + p_B = \frac{\pi r_a^2}{2} + \frac{\pi r_b^2}{2} = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{8}\ c^2$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi r_c^2}{2} = p_C$$

Grafični prikaz enakosti ploščin:



(Slika 13: Ploščine polkrogov,vir: avtor)

5 ZAKLJUČNI DEL

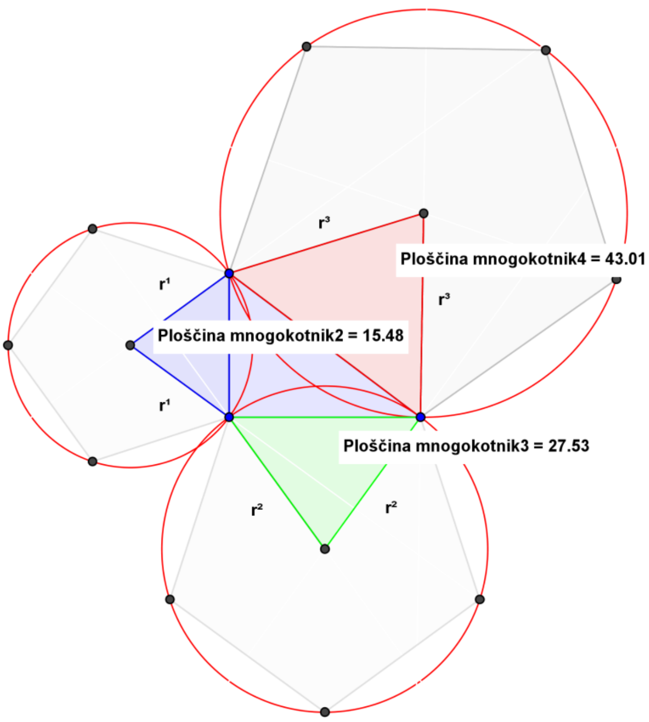
5.1 Ugotovitve

Moja hipoteza, da Pitagorov izrek velja za vse pravilne like, je potrjena.

Ugotovil sem, da je vsota ploščin pravilnih večkotnikov nad katetama enaka ploščini pravilnega večkotnika nad hipotenuzo. S svojim dosedanjim matematičnim znanjem sem lahko preverjal enakost na primeru z danimi dolžinami stranic trikotnika. Pri enakostraničnem trikotniku in pravilnem šestkotniku sem dokazal tudi grafično in računsko. V nalogi sem potrjeval Pitagorov izrek vse do pravilnega devetkotnika. Ker lahko vsak naslednji n- kotnik razdelimo na enakostranične trikotnike, velja Pitagorov izrek za vse pravilne mnogokotnike.

Ker sem dokazal, da velja Pitagorov izrek za polkroge nad stranico, velja posledično tudi za kroge, katerih premeri so enaki stranicam pravokotnega trikotnika. Ploščina kroga je le dvakratnik ploščine polkroga .

Večkotnik sem razdelil na enakokrake trikotnike. V vseh treh večkotnikih je enako število trikotnikov. Torej je ploščina večjega trikotnika enaka vsoti ploščin manjših dveh. Pri tem je dolžina krakov enaka polmeru večkotniku očrtanega kroga.



(Slika 14: Ploščine enakokrakih trikotnikov,vir: avtor)

5.2 Družbena odgovornost

Sem mnenja, da raziskovalna naloga prispeva k razširitvi znanja uporabe Pitagorovega izreka. Z ugotovitvami raziskovalne naloge lahko sestavimo različne problemske naloge pri matematiki.

5.3 Viri in literatura

http://www.matematiki.si/pitagora/

http://www2.arnes.si/~osljtrzin2/pi/

http://eucbeniki.sio.si/vega2/244/index3.html

Peter J. Bentley, Knjiga o številih, 2010, Kitajska, Tehniška založba Slovenije

Willia P. Berlinghoff, Fernando q. Guevea, Matematika skozi stoletja, 2008, Ljubljana, Založba Modrijan

Dirk J. Sruik, Kratka zgodovina matematike,1978, Ljubljana, Državna založba Slovenije

5.4 Viri slik

Slika 1: Grški matematik Pitagora, vir: http://www2.arnes.si/~mtanko/pitagora.htm

slika 2: Dokaz Pitagorovega izreka 1, vir:http://eucbeniki.sio.si/vega2/244/dokaz_1.png

Slika 3: Dokaz Pitagorovega izreka 3, vir: http://eucbeniki.sio.si

Slika 4: Enakostranični trikotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor

Slika 5: Ploščine enakostraničnih trikotnikov, vir:avtor

Slika 6: Pravilni petkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor

Slika 7:Ploščine pravilnih petkotnikov,vir: avtor

Slika 8: Pravilni šestkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor

Slika 9: Pravilni sedemkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor

Slika 10: Pravilni osemkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor

Slika 11: Pravilni devetkotniki nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor

Slika 12: Polkrogi nad stranicami pravokotnega trikotnika, vir: avtor

Slika 13: Ploščine polkrogov,vir: avtor

Slika 14: Ploščine enakokrakih trikotnikov,vir: avtor