Mladi za napredek Maribora 2015

32. srečanje

FLEXAGON

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor:	ANDREJ GLAVNIK, MILOŠ LAZIĆ
Mentor:	JOŽEF SENEKOVIČ
Šola:	OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2015

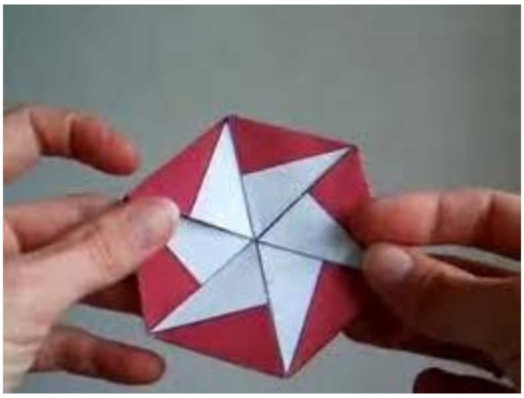
Kazalo

1. Povzetek

Ste že slišali za flexanje? Tudi midva do letos ne. Ker gre za zabavno, zanimivo in hkrati matematično dejavnost, sva želela v raziskovalni nalogi predstaviti, kako si lahko s preprostim pregibanjem papirja krajšamo čas, izdelamo lepe izdelke in uporabimo matematično znanje. Flexamo s flexagoni, ki jih lahko naredimo iz navadnega papirnatega traku. Tak flexagon ima več kot samo sprednjo in zadnjo stran. Ima tako imenovane ''zakrite'' strani, katere lahko vidimo med flexanjem flexagona. Morda navdušiva za fleksanje tudi katerega izmed bralcev najine raziskovalne naloge.

2. Uvod

Flexagon (slika 1) je ploščato telo, kateremu lahko z dogovorjenim načinom pregibanja spreminjamo lego zunanjih mejnih ploskev. Flexagoni imajo več kot samo 2 mejni ploskvi, čeprav morda na prvi pogled vidimo samo lik z dvema mejnima ploskvama. Prav tako obstaja več vrst flexagonov (slika 2) in bolj kot se poglobimo, več matematičnih izzivov spoznamo. Najpogostejši obliki flexagona sta tetraflexagon in hexaflexagon.



Slika 1

Slika 2

Metodologija dela

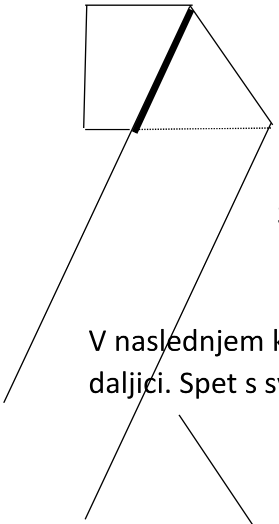
Na začetku bova pokazala kako narediti hexaflexagon, kako flexati in lastnosti flexanja. Ker je hexaflexagon sestavljen iz enakostraničnih trikotnikov, vam bova pokazala, kako jih iz papirnega traku naredimo brez merjenja kotov. Nato bova razložila način flexanja za hexaflexagon in pokazala druge flexe za različne flexagone. Pokazala vam bova tudi, kako izdelati malo zahtevnejši flexagon imenovan hexahexaflexagon.

3. ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIKI

Za izdelavo modela flexagona potrebujemo pravokotni papirni trak. Na traku na začetku narišemo daljico pod poljubnim kotom (slika 3).

Slika 3

Nato desni del traku prepognemo ob narisani daljici (slika 4a), zapognemo novi pregib, ki ga kasneje prevlečemo s svinčnikom (slika 4 b). Nastane trikotnik.

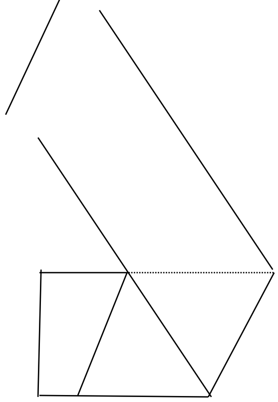


Slika 4 a

Slika 4 b

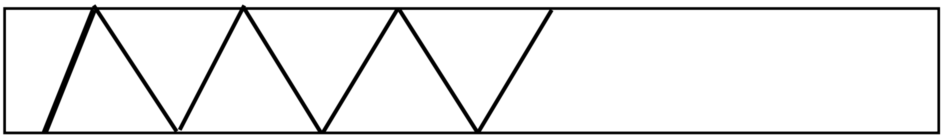
V naslednjem koraku desni del traku zapognemo navzgor (slika 5 a) ob zadnji pridobljeni daljici. Spet s svinčnikom prevlečemo pregib in dobimo nov trikotnik v vrsti (slika 5 b).

Slika 5 b



Slika 5 a

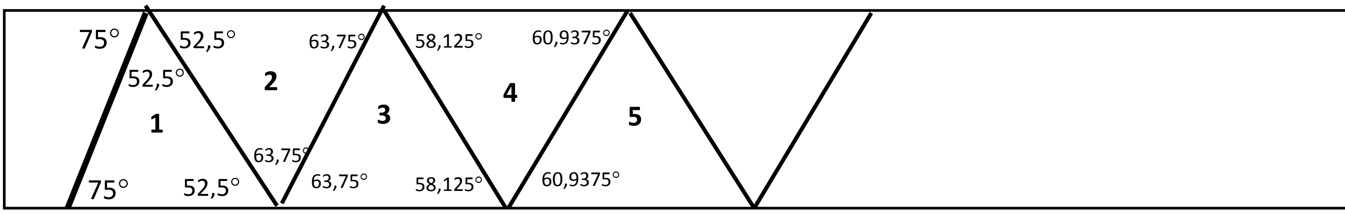
Pregibanje traku nadaljujemo dalje. Z vsakim novim pregibom oblikujemo nov trikotnik. Opazimo, da je vsaki novi trikotnik nekoliko »bolj« enakostraničen, ne glede na to, v kateri legi načrtamo začetno daljico na trak. Dobimo zaporedje trikotnikov (slika 6).



Slika 6

Od četrtega trikotnika dalje, je vsak trikotnik »skoraj« enakostraničen. Poglejmo zakaj (slika 7). Z vsakim prepogibanjem zmanjšamo razliko do kota 60°.

Naj bo kot med narisano daljico in robom traku 75°. S prepogibanjem traku razpolovimo sokot kota 75°, zato je velikost enega kota 52,5°.



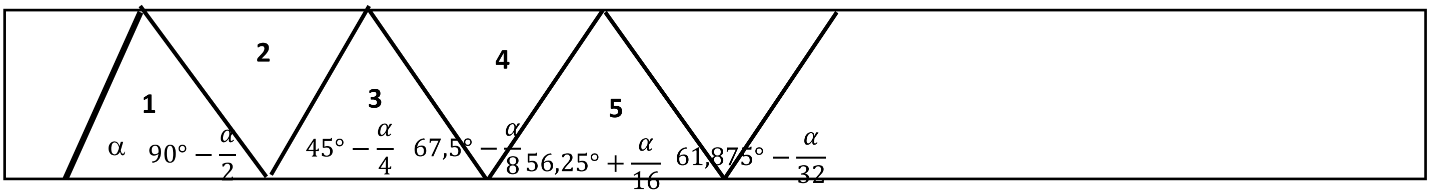
Slika 7

Izračunamo velikosti preostalih dveh notranjih kotov prvega trikotnika, to sta 75° in 52,5°. drugi trikotnik dobimo s pregibom traku navzgor. Velikosti notranjih kotov drugega trikotnika so 52,5° in dva 63,75°. Kot med daljico in robom traku je manjši za 11,25°.

V tretjem trikotniku je velikost notranjih kotov 63,75° in dva kota po 58,125°.

V četrtem trikotniku so velikosti notranjih kotov 58,125° in dva po 60,9375°. Kot med daljico in robom traku je torej 60,9375°. Opazimo, da se s pregibanjem novih trikotnikov velikost kota med daljico in robom traku bliža kotu 60°. Tako je peti trikotnik praktično enakostraničen, saj so velikosti notranjih kotov 60,9375°, 59,53125°, 59,53125°. Seveda je naslednji trikotnik v zaporedju še »bolj enakostraničen«.

Naj bo sedaj začetni kot med daljico in robom traku α (slika 8).



Slika 8

Z enakim postopkom, kot smo računali velikost kotov za α = 75°, računamo velikosti kotov pri poljubno izbrani velikosti kota α. Za peti trikotnik izračunamo velikosti

$61{,}875° - \frac{\alpha}{32}$, $61{,}875° - \frac{\alpha}{32}$ in $56{,}25° + \frac{\alpha}{16}$.

V primeru α = 75°, so torej koti 59,53125°, 59,53125° in 60,9375°. Enake velikosti smo izračunali v prvem, konkretnem primeru.

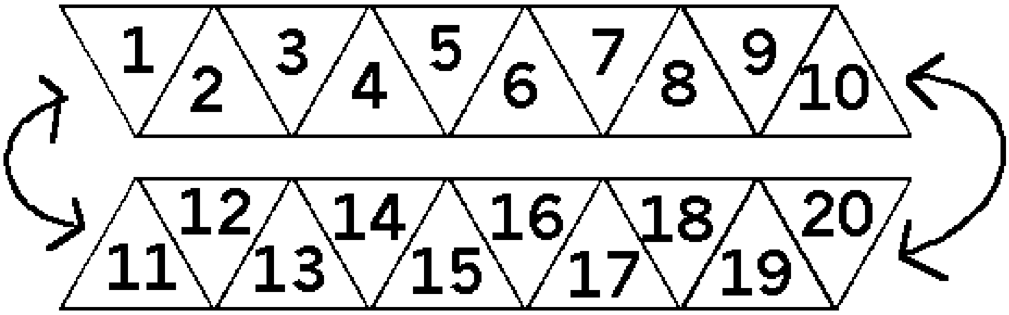
V enajstem trikotniku v zaporedju trikotnikov pa bi bile velikosti kotov $61{,}875° - \frac{\alpha}{2^{11}}$, $61{,}875° - \frac{\alpha}{2^{11}}$ in $56{,}25° + \frac{\alpha}{2^{10}}$, kar so zelo dobri približki kota 60°.

4. MODEL FLEXAGONA

Kako izdelati hexaflexagon?

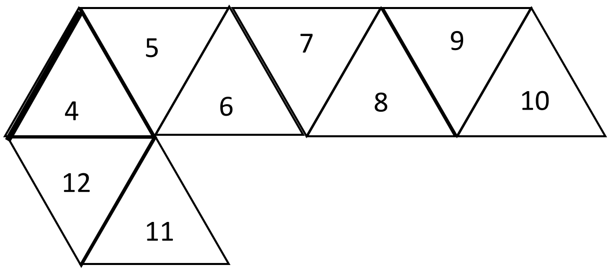
ko prepognemo 14 trikotnikov, lahko prve 4 odrežemo, preostane deset enakostraničnih trikotnikov, kar smo pokazali v prejšnji točki. Seveda lahko z ustreznimi računalniškimi programi za načrtovanje izdelamo trakove z res pravimi enakostraničnimi trikotniki. Trak začnemo prepogibati po naslednjih navodilih:

1. Označimo trikotnike od 1 do 10 po vrstnem redu na eni strani traku (slika 9).



Slika 9

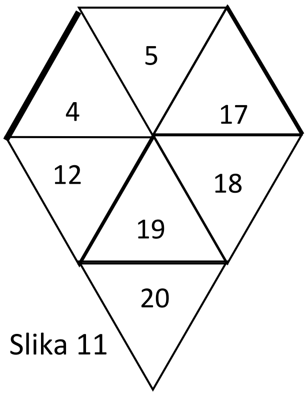
2. Na drugi strani označimo trikotnike od 11 do 20 tako, da je število 11 zapisano na nasprotni strani trikotnika s številom 1 in število 20 na nasprotni strani trikotnika s številom 10.
3. Trikotnike dobro prepognemo na obe strani, da so pregibi prožni.
4. Prepognemo pregib med trikotnikoma 3 in 4 (odebeljeno narisano) (slika 10).



Slika 10

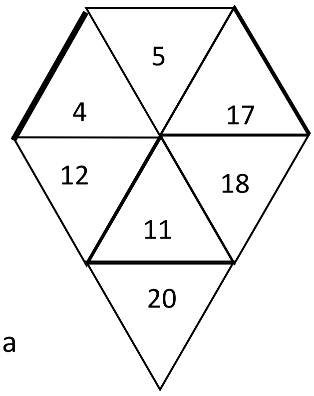
Zaradi pregiba sedaj na sprednji strani vidimo trikotnika s številkama 12 in 11.

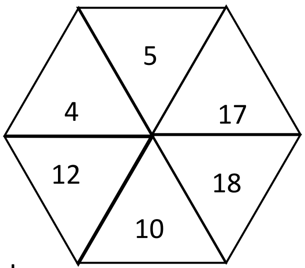
5. Nato v drugo smer (naprej) prepognemo pregib med trikotnika 6 in 7 (odebeljeno označeno) (slika 11).



Slika 11

6. Trikotnik s številom 11 postavimo nad trikotnik s številom 19 (slika 12 a) in zalepimo trikotnika , ki sta označeni s številoma 11 in 20 (slika 12 b).

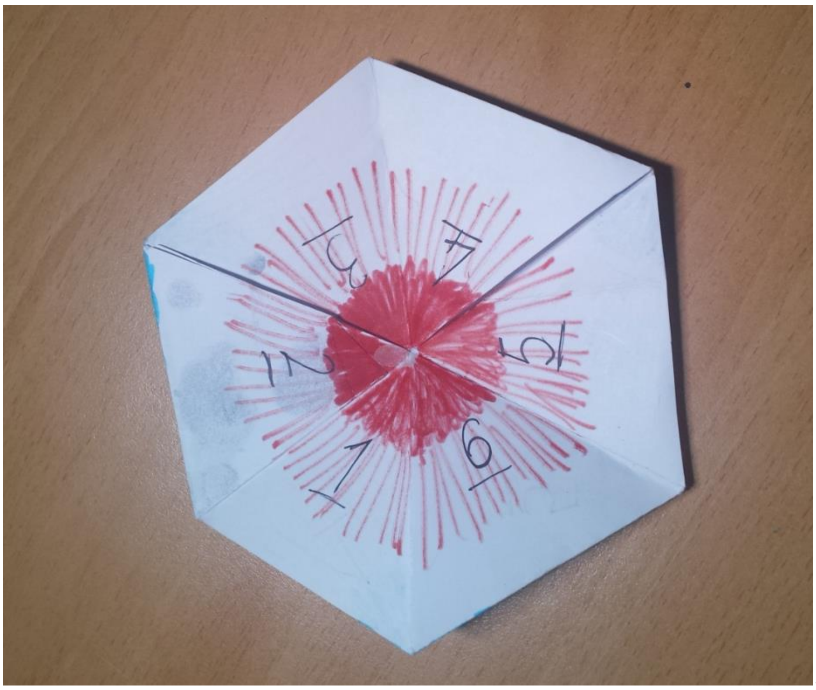




Slika 12 b

Slika 12 a

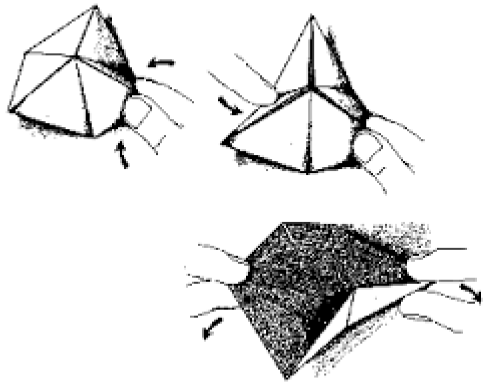
Dobimo flexagon (slika 12 c) v obliki pravilnega šestkotnika.



Slika 12 c

5. FLEXANJE

Za različne flexagone obstajajo različni načini flexanja. Flexanje pravzaprav pomeni načine pregibanja flexagona in s tem menjavanje ploskev. Za en flexagon pa imamo lahko več različnih kombinacij flexanja. Predstavila vam bova navaden način flexanja, ki je možen pri skoraj vseh flexagonih, tako imenovan ˝pinch flex˝, saj stisnemo ploskve skupaj ter nato spremenimo vzorec oz. barvo ploskve (menjamo stran). Prikažimo s sliko 13:

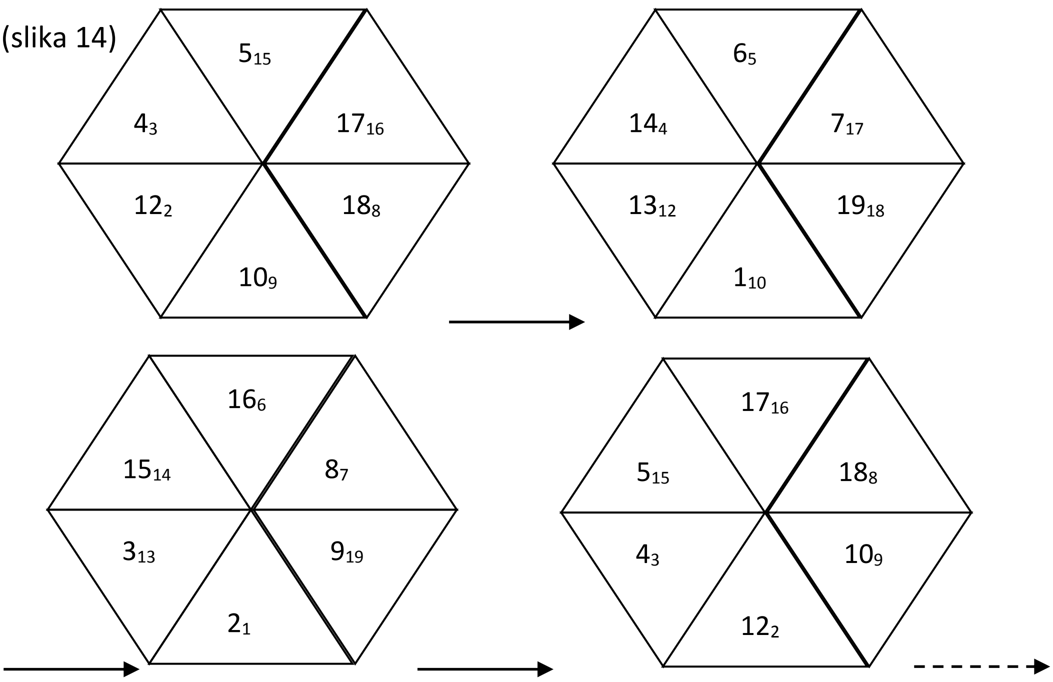


slika 13

Po določenih pregibih se vzorec spremeni v enakega, kot je bil na začetku.

Predstavimo flexanje za primer, če opazujemo vedno isto stran flexagona, kako se spreminjajo števila na posameznih trikotnikih (manjše številke so na nasprotni strani ploskve).

Prvi trije flexi (slika 14)

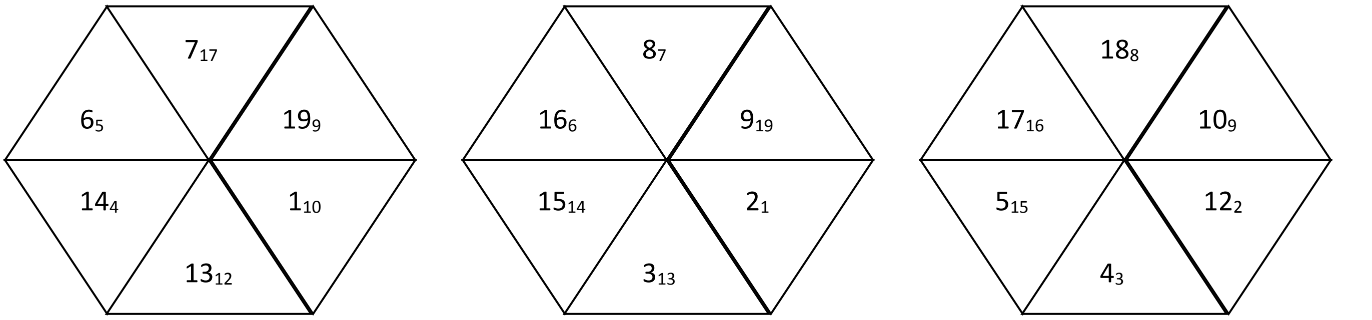


Slika 14

Na prvi levi sliki izberemo začetni položaj flexagona. Na sprednji ploskvi so števila 4, 5, 17, 18, 10 in 12. Pri flexanju smo pozorni, da ne zasukamo flexagona ali zamenjamo strani med fleksanjem. Samo tako lahko pravilno opazujemo menjavo številk na ploskvi flexagona. Po treh flexih so na sprednji ploskvi enaka števila kot na začetku, vendar zasukana v pozitivno smer (zadnja desna slika).

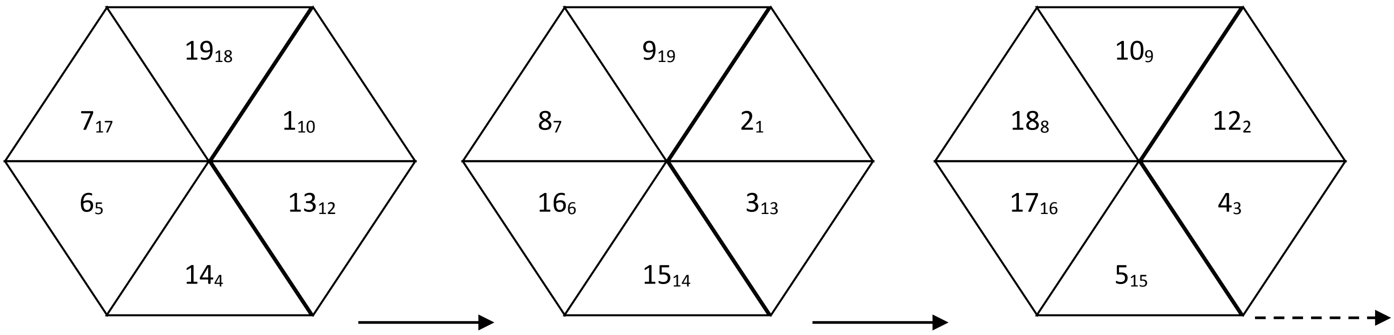
S flexanjem nadaljujemo. Zanima nas, po koliko flexih se morda števila pojavijo na isti strani, kot so bila na začetku flexanja.

Po naslednjih treh flexih (slika 15), so na isti ploskvi spet začetna števila (tretja slika z desne) v enakem zaporedju kot na začetku, vendar z novim zasukom v pozitivno smer.



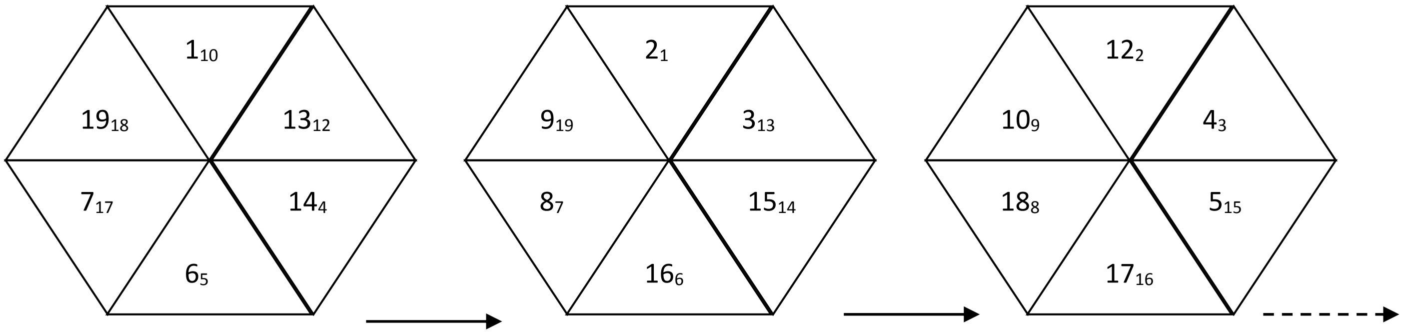
Slika 15

Naslednji trije flexi (slika 16) dajo začetna števila na isti ploskvi, zasukana za eno polje v pozitivno smer.



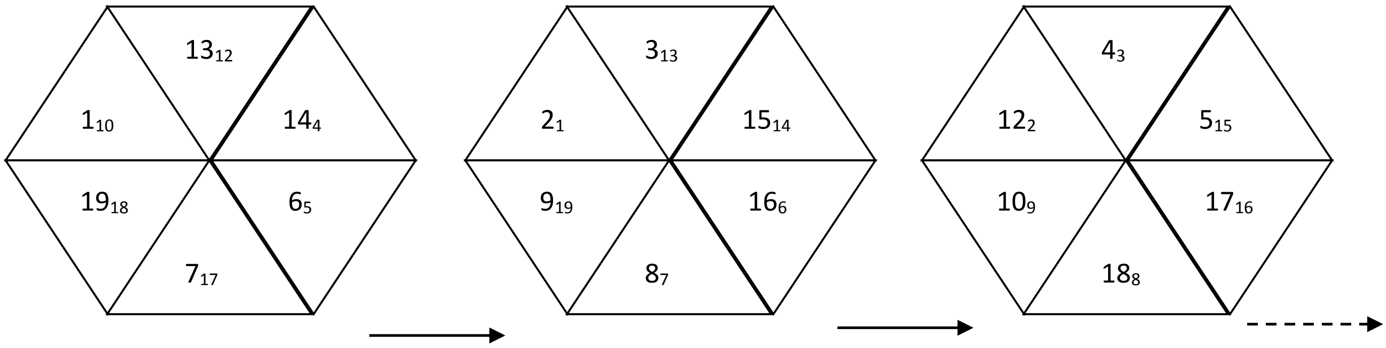
Slika 16

S flexanjem nadaljujemo, po treh flexih spet prikažemo začetna števila na isti ploskvi (slika 17) s spremenjeno lego števil na poljih.



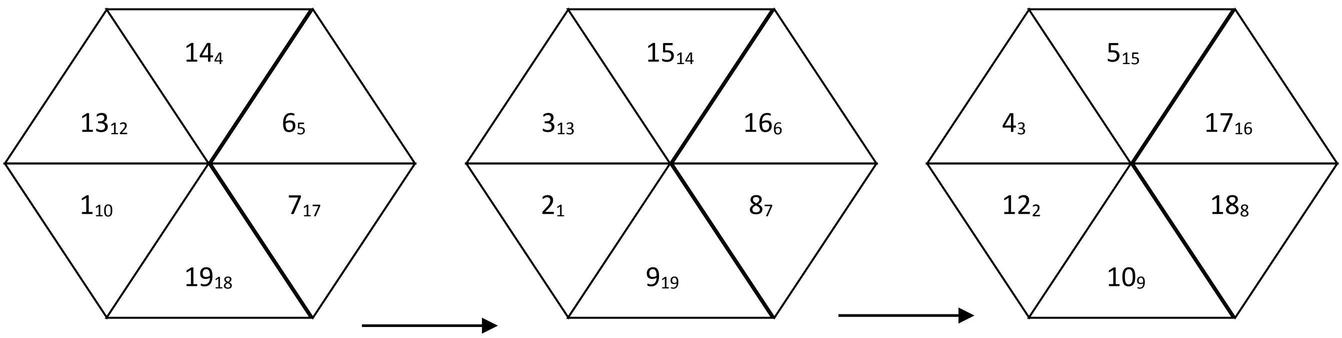
Slika 17

Naslednji trije flexi (slika 18) zamenjajo števila še za eno polje.



Slika 18

Potrebujemo še samo tri flexe (slika 19) in števila so razporejena natančno v začetni legi.



Slika 19

Z opazovanjem spreminjanja lege števil na ploskvah sva ugotovila, da po vsakih treh fleksih v isto smer (navznoter ali navzven) števila na ploskvi zamenjajo lego v pozitivni smeri (flexanje navznoter) ali negativni smeri (flexanje navzven) za eno polje ali 60°. Ker je šest polj na eni ploskvi flexagona, potrebujemo šestkrat po tri flexe, skupaj 18 flexov da iz začetne lege števil spet dobimo števila enako razporejena.

Poglejmo še, katera zaporedja števil so se pojavila na isti ploskvi v enem krogu flexanja:

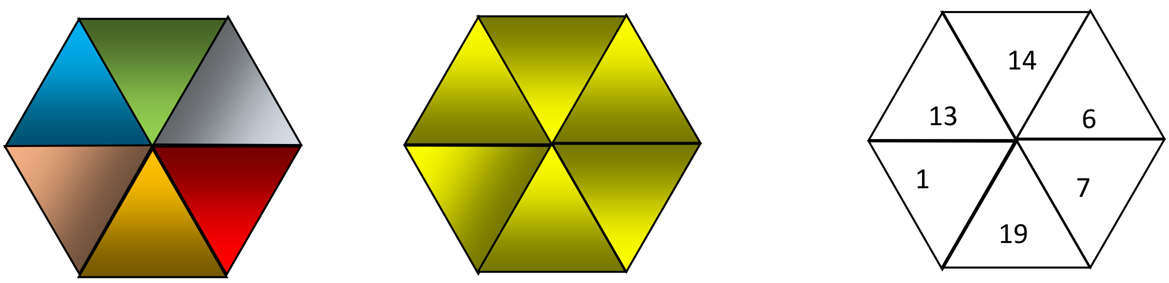
5, 4, 12, 10, 18, 17

6, 14, 13, 1, 19, 7

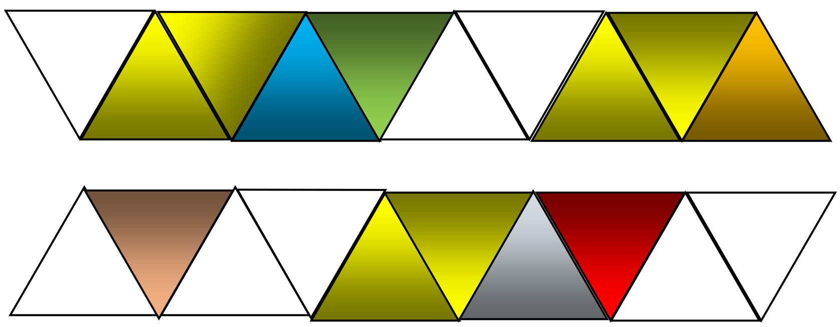
16, 15, 3, 2, 9, 8

Ti trije nizi števil se v enakem zaporedju pojavijo v vsaki trojici flexov. Če pobarvamo ta polja z različnimi barvami, lahko na izbrani ploskvi opazimo menjavo barv. Tako je (slika 20) vsakemu številu na izbrani ploskvi 5, 4, 12, 10, 18, 17 prirejena ena barva, hkrati pa sva prikazala (slika 21), kako izbira barv deluje na traku pred izdelavo flexagona.

Če pa želimo, da se pri flexanju ena stran obarva z enako barvo, to pokažemo na zaporedju števil 3, 15, 16, 8, 9, 2 (druga slika na sliki 20).



Slika 20

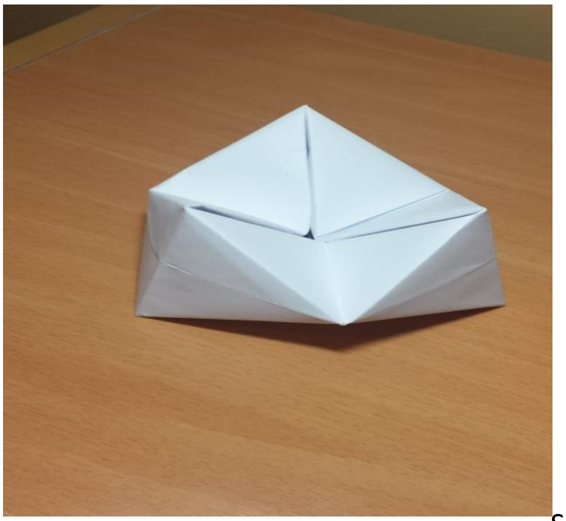


Slika 21

6. VRSTE FLEXAGONOV

Pri preiskovanju raznih primerov na spletu sva naletela na veliko različnih možnosti izdelave flexagonov. V nadaljevanju predstavljava s slikami nekaj izdelkov, ki sva jih naredila.

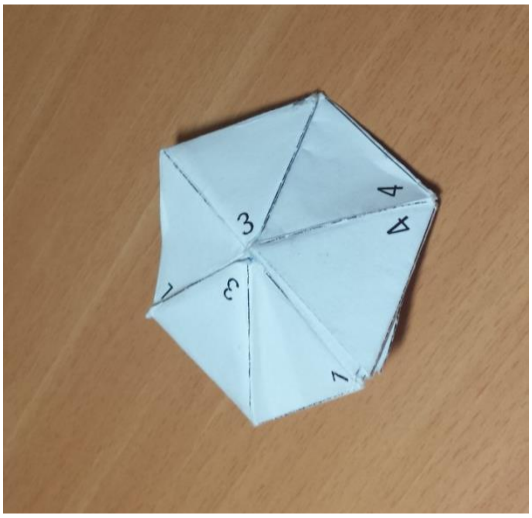
- 3D Hexa flexagon



Slika 22

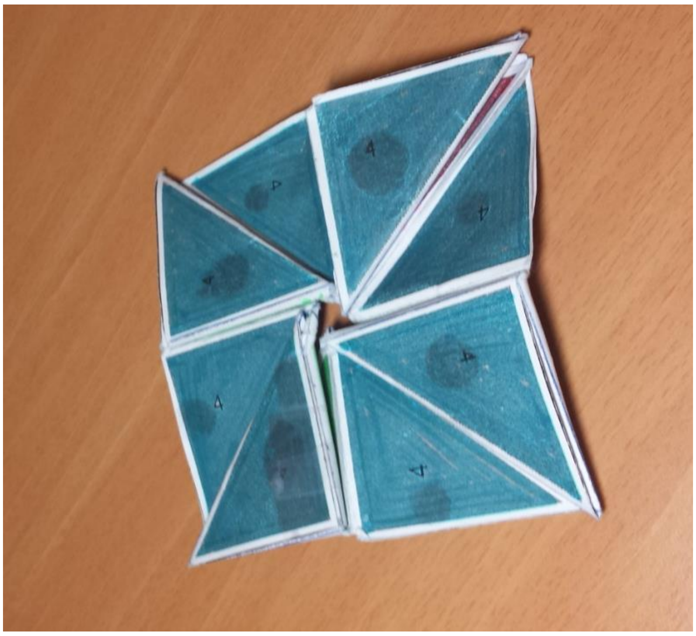
- Kvadratni Tetra flexagon

Slika 23

- Hexa hexa flexagon 

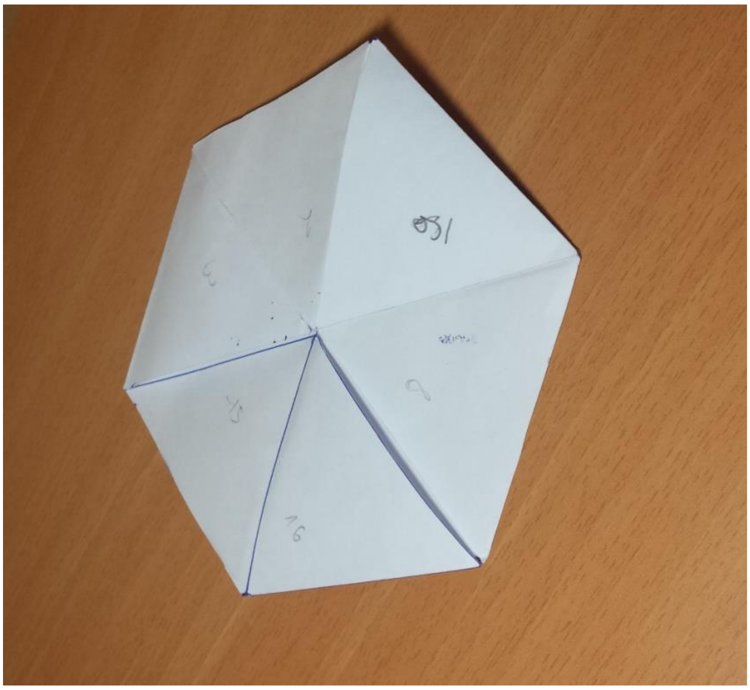
Slika 24

- Octa flexagon



Slika 25

- Hexa flexagon



Slika 26

7. Zaključek

V raziskovalni nalogi sva precej natančno spoznala flexagone. Pokazala sva, da ima lahko en kos papirja tudi več kot dve strani, seveda če je zložen na primeren način. Z izdelavo flexagonov, opazovanjem in načrtovanjem sva ugotovila, kako se spreminjajo posamezne ploskve pri flexanju. Gre za zasuk za 60°. Način flexanja pa odloči ali gre za zasuk v pozitivno ali negativno smer.

Meniva, da sva z raziskovalno nalogo predstavila nekaj posebnega, ne tako znanega. S samo izdelavo flxagonov se naučimo opazovati, moramo biti natančni, premišljamo o spreminjanju lege ploskev in o barvah, če flexagon obarvamo. Prav tako uporabimo znanje o kotih trikotnika, da pokažemo kako samo s pregibanjem papirnega traku nastanejo enakostranični trikotniki. Samo brskanje po spletnih straneh pa je postalo tako koristno in usmerjeno v konkretno znanje.

8. Viri

(1) https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSDIALnyco9unGghH06e4CglNqpYIii6R-tpXtHLB5tHZ8gt7SkiA

28.1. 2015

(2) https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSDIALnyco9unGghH06e4CglNqpYIii6R-tpXtHLB5tHZ8gt7SkiA

28.1.2015

(4) http://www.mathnstuff.com/papers/tetra/hold/hexa1.gif

28.1.2015

(3) Matematika z zvitkom papirja, Adriaan Herremans University of Antwerp. Zapiski delavnice KUPM 2014, Čatež