

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2015«

32. SREČANJE

ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK S PREGIBANJEM TRAKU

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: MATIJA ŠIŠKO
Mentor: ALENKA REPNIK
Šola: OŠ BORCEV ZA SEVERNO MEJO MARIBOR

Maribor, januar 2015

»MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2015«

32. SREČANJE

ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK S PREGIBANJEM TRAKU

Raziskovalno področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Maribor, januar 2015

KAZALO

POVZETEK	4
1 UVOD	5
2 METODOLOGIJA DELA	8
2.1 Metoda poskušanja	8
2.1.1 Postopek pregibanja traku	8
2.2 Metoda grafičnih ponazoritev	10
3 REZULTATI	11
4 RAZPRAVA, INTERPRETACIJA REZULTATOV	16
5 ZAKLJUČEK	18
6 DRUŽBENA ODGOVORNOST	19
7 VIRI	20
PRILOGE	

KAZALO SLIK

Slika 1: Enakokraki trikotnik	6
Slika 2: Enakostranični trikotnik	6
Slika 3: Začetni pregib	9
Slika 4: Pregib navzdol	9
Slika 5: Rezultat pregiba	9
Slika 6: Pregib navzgor	9
Slika 7: Rezultat pregiba	9
Slika 8: Pregib navzdol	9
Slika 9: Rezultat pregiba	9

Slika 10: Pregib navzgor	9
Slika 11: Rezultat pregiba	9
Slika 12: Pregib navzdol	9
Slika 13: Rezultat pregiba	9
Slika 14: Pregib navzgor	9
Slika 15: Rezultat pregiba	10
Slika 16: Primer grafičnega modela pregibanja (vir: avtor naloge)	10
Slika 17: Začetni kot (vir: avtor naloge)	11
Slika 18: Prvi enakokraki trikotnik (vir: avtor naloge)	11
Slika 19: Grafični model pregibanja – začetni kot 35° (vir: avtor naloge)	12
Slika 20: Grafični model pregibanja – začetni kot 78° (vir: avtor naloge)	13
Slika 21: Grafični model pregibanja – začetni kot 90° (vir: avtor naloge)	13

KAZALO TABEL

Tabela 1: Vrednost napake glede na začetni kot	12
Tabela 2: Velikosti kotov na sliki 19	13
Tabela 3: Velikosti kotov na sliki 20	13
Tabela 4: Velikosti kotov na sliki 21	14
Tabela 5: Prikaz izračuna velikosti napak v kotnih stopinjah glede na število pregibov	15
Tabela 6: Potrebno število pregibov glede na velikost napake	17
Tabela 7: Prikaz izračuna velikosti napak v kotnih stopinjah glede na število pregibov	

POVZETEK

Ali ste vedeli, da se pri prepogibanju poljubno dolgega traka papirja prej ali slej pojavi enakostranični trikotnik?

Ko sem pri pouku zgodovine obrezal učni list in ga zalepil v zvezek, mi je ostal trak papirja. Začel sem ga prelagati in čez nekaj časa opazil, da je nastal (in se ponavljal) enakostranični trikotnik. Čeprav med poukom zgodovine, kar morda ni pohvalno, se je rodila ideja, da je to potrebno raziskati.

Glavno vprašanje je, zakaj se to zgodi? V raziskovalni nalogi predstavim svoje ugotovitve in odgovor na to vprašanje. Raziskujem, koliko pregibov je potrebnih, da trikotniki postanejo enakostranični. Pri raziskovanju uporabim metodo poskušanja, ki sem jo uporabil že pri uri zgodovine. To metodo dopolnim še z grafičnimi ponazoritvami in proučevanjem pisnih virov. Cilj raziskovalne naloge je pokazati, da matematika ni le v zapletenih enačbah, ampak se lahko skriva celo v vsakdanjem življenju, tudi kadar se tega sploh ne zavedamo.

1 UVOD

Pri uri zgodovine smo dobili učni list, ki ga je bilo potrebno obrezati, preden smo ga lahko zalepili v zvezek. Trak papirja, ki je postal odpadek, sem uporabil za pregibanje in opazovanje nastalega vzorca me je spodbudilo k raziskovanju. Pri pregibanju so nastajali trikotniki, sprva enakokraki, po nekaj pregibih pa enakostranični.

Kasneje sem v knjigi Martina Gardnerja prebral, da je na podoben način svoje raziskovanje začel tudi Arthur H. Stone, že davnega leta 1939 (vendar se njegovo raziskovanje ni neposredno ukvarjalo z enako temo, kot je moja).

»Trikotnik je geometrijski lik, ki je določen s tremi točkami, ki ne ležijo na isti premici.«

(vir: Berk, Draksler, Ribič, 2003, str. 132)

Glede na dolžine stranic ločimo:

a) Raznostranični trikotnik

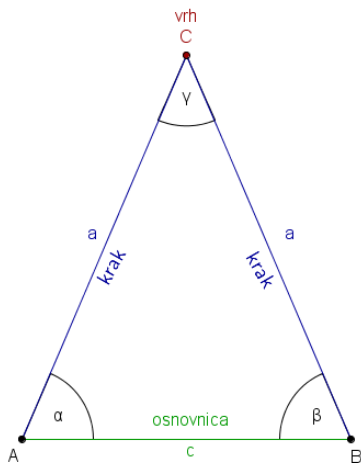
Dolžine vseh treh stranic so različne.

b) Enakokraki trikotnik (slika 1)

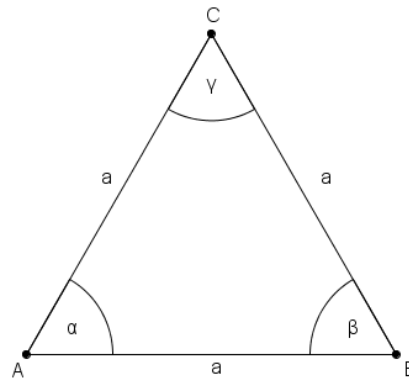
Dve stranici sta enako dolgi in ju imenujemo kraka, tretja stranica se imenuje osnovnica. Oglišče nasproti osnovnice se imenuje vrh trikotnika. Notranja kota ob osnovnici sta skladna.

c) Enakostranični trikotnik (ali pravilni trikotnik) (slika 2)

Vse tri stranice so med seboj skladne. Vsi notranji koti enakostraničnega trikotnika so med seboj skladni, torej vsak notranji kot meri natanko 60° .



Slika 1: Enakokraki trikotnik
(vir: avtor naloge)



Slika 2: Enakostranični trikotnik
(vir: avtor naloge)

Zakaj se pri prepegibanju traku pojavi enakostranični trikotnik? Po kolikih pregibih se začne pojavljati enakostranični trikotnik? Ali začetni kot vpliva na število pregibov? Ali obstaja zveza med koti pri vrhovih enakokrakih trikotnikov, ki so predhodniki enakostraničnega trikotnika? To so vprašanja, na katera sem želel najti odgovore in s pomočjo katerih so nastale moje hipoteze.

Hipoteza 1: Vzrok za pojav enakostraničnega trikotnika je razpolavljanje pri pregibanju.

Hipoteza 2: Velikost začetnega kota vpliva na število pregibov, po katerih se pojavi enakostranični trikotnik.

Hipoteza 3: Koti ob vrhovih enakokrakih trikotnikov se spreminjajo po določenem pravilu in tvorijo zaporedje.

»Ko govorimo o zaporedju, običajno mislimo na neskončno zaporedje. Zaporedje je po nekem pravilu urejena množica realnih števil.«

(vir: Šparovec, Kavka, Pavlič, Rugelj, 2005, str. 10)

Zaporedje je funkcija (predpis), ki vsakemu naravnemu številu priredi neko realno število.

Zaporedne funkcijske vrednosti $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots$ imenujemo členi zaporedja, a_n pa splošni člen.

Primer 1:

Splošni člen: $a_n = 2n + 1$

Členi zaporedja: 3, 5, 7, 9, ...

Primer 2:

Splošni člen: $a_n = \frac{n^2}{2n+3}$

Členi zaporedja: $\frac{1}{5}, \frac{4}{7}, \frac{9}{9}, \dots$

»Zaporedje je navzgor omejeno, če obstaja tako realno število M , da je za vsako naravno število n : $a_n \leq M$. Število M imenujemo zgornja meja zaporedja.

Podobno definiramo omejenost zaporedja navzdol.

Zaporedje je navzdol omejeno, če obstaja tako realno število m , da za vsak člen zaporedja velja n : $m \leq a_n$. Število m je spodnja meja zaporedja.

Zaporedje je omejeno, če je navzdol in navzgor omejeno. To pomeni, da obstajata taki realni števili m in M , da za vsak člen velja: $m \leq a_n \leq M$.

(vir: Šparovec, Kavka, Pavlič, Rugelj, 2005, str. 12)

Včasih se členi zaporedja neskončno približajo nekemu številu, vendar ga nikoli ne dosežejo oziroma presežejo. Takrat govorimo o limiti zaporedja.

»Število a je limita neskončnega zaporedja a_n , če za vsako še tako majhno pozitivno število ε obstaja tako naravno število N , da za vsako $n > N$ velja $|a - a_n| < \varepsilon$.

(vir: Šparovec, Kavka, Pavlič, Rugelj, 2005, str. 34)

Priznati moram, da se mi v začetku niti sanjalo ni, zakaj se pri pregibanju traku papirja pojavijo enakostranični trikotniki. Prav zato je namen in cilj pričujoče raziskovalne naloge raziskati in ugotoviti vzrok za pojav enakostraničnega trikotnika pri pregibanju traku. Hkrati želim z nalogo pokazati, da matematika ni le v zapletenih enačbah, ampak se lahko skriva celo v vsakdanjem življenju, tudi kadar se tega sploh ne zavedamo.

2 METODOLOGIJA DELA

Pri raziskovanju so bile uporabljene različne metode:

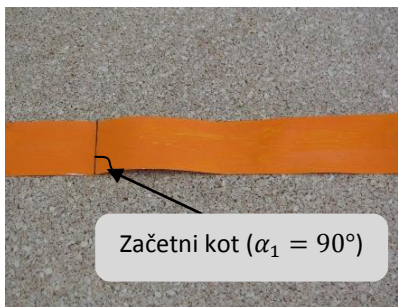
- metoda poskušanja
- metoda raziskovanja pisnih virov
- grafične ponazoritve (fotografije in grafične ponazoritve s pomočjo računalniškega programa za dinamično geometrijo GeoGebra)

2.1 Metoda poskušanja

Raziskovanje je potekalo predvsem z metodo poskušanja, to je s fizičnim pregibanjem traku. V ta namen sem uporabil blagajniški trak, ki sem ga pregibal po spodaj opisanem in prikazanem postopku. Enakostraničnost nastalih trikotnikov sem preverjal z merjenjem kotov, pri čemer sem upošteval, da so vsi notranji koti v enakostraničnem trikotniku skladni in merijo vsak 60° . Kote nastalih trikotnikov sem meril z geotrikotnikom, ki nam dovoljuje merjenje kotov do kotne stopinje natančno.

2.1.1 Postopek pregibanja traku

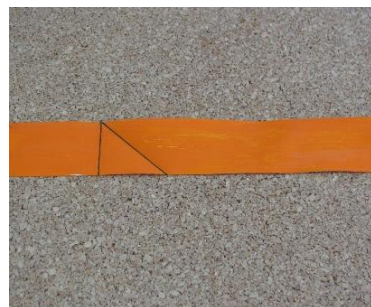
Trak poljubno prepognemo in tako dobimo začetni kot (slika 3). Nato trak pregibamo izmenoma navzdol in navzgor. Pri pregibu navzdol zgornji rob traku poravnamo s prejšnjim pregibom (slika 4) in tako razpolovimo razliko med iztegnjenim in začetnim kotom. Trak znova zravnamo (slika 5), nato naredimo pregib navzgor tako, da se spodnji rob traku poravnava s prejšnjim pregibom (slika 6). Postopek ponavljamo tako, da trak izmenoma pregibamo zdaj navzdol, zdaj navzgor in tako dobivamo sprva enakokrake trikotnike, prej ali slej pa se pojavi enakostranični trikotnik.



Slika 3: Začetni pregib¹



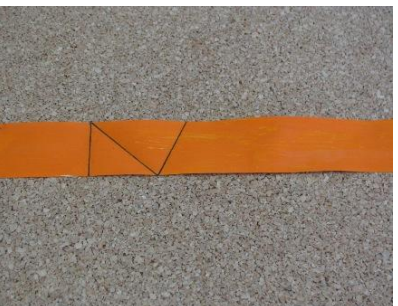
Slika 4: Pregib navzdol



Slika 5: Rezultat pregiba



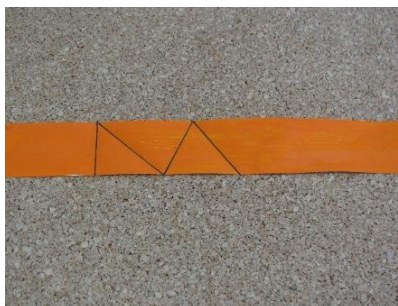
Slika 6: Pregib navzgor



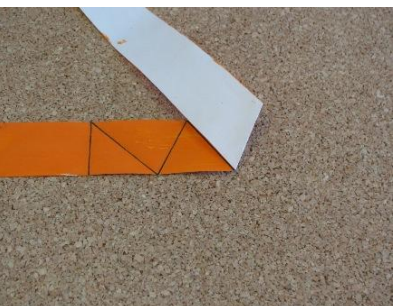
Slika 7: Rezultat pregiba



Slika 8: Pregib navzdol



Slika 9: Rezultat pregiba



Slika 10: Pregib navzgor



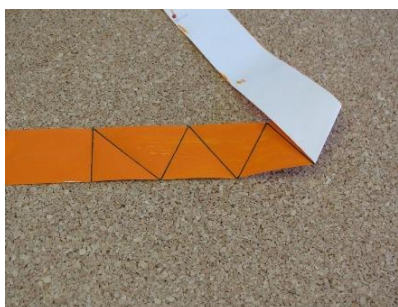
Slika 11: Rezultat pregiba



Slika 12: Pregib navzdol



Slika 13: Rezultat pregiba



Slika 14: Pregib navzgor

¹ Vir slik od 3 do 15 je lastni arhiv avtorja naloge

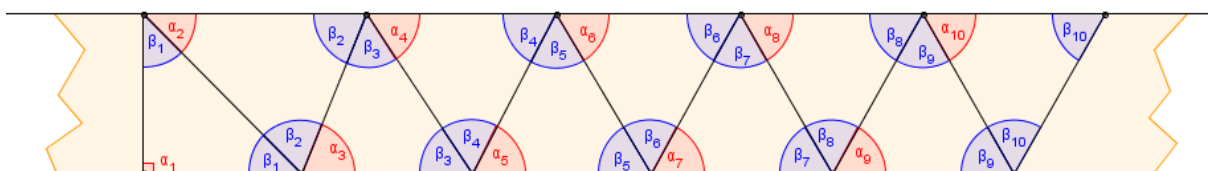


Slika 15: Rezultat pregiba

Pregibanje sem ponovil 20-krat in vsakokrat ugotavljal, ali so nastali trikotniki enakostranični in po kolikih pregibih nastane enakostranični trikotnik. Pri poskusih sem spreminjal začetni kot na traku.

2.2 Metoda grafičnih ponazoritev

Metodo poskušanja sem nadgradil še z metodo grafičnih ponazoritev in z računanjem velikosti nastalih kotov pri pregibanju traku. Za grafične ponazoritve sem uporabil računalniški program GeoGebra, ki mi je bil v veliko pomoč tudi pri računanju notranjih kotov nastalih trikotnikov na 10 mest natančno. Za izračune sem uporabil žepno računalno in računalniška programa GeoGebra in program za izdelovanje računalniških preglednic.



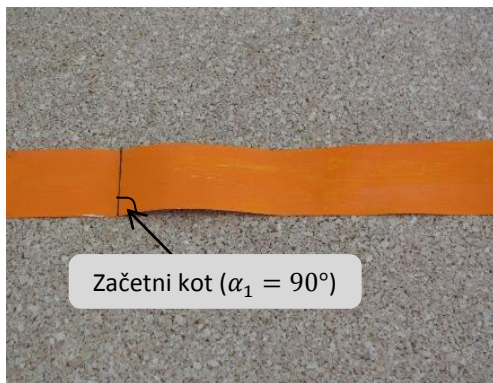
Slika 16: Primer grafičnega modela pregibanja (vir: avtor naloge)

3 REZULTATI

Enakostranični trikotnik se pri pregibanju (postopek sem že opisal) vedno pojavi, ne glede na začetni kot.

Definicija 1.

Začetni kot (α_1) je kot pri vrhu prvega enakokrakega trikotnika.



Slika 17: Začetni kot (vir: avtor naloge)



Slika 18: Prvi enakokraki trikotnik (vir: avtor naloge)

Definicija 2.

Napaka (ϵ) je absolutna razlika med začetnim kotom in kotom 60° .

$$\epsilon = |\alpha_1 - 60^\circ|$$

Enakostranični trikotnik se pojavlja zaradi razpolavljanja napake (ϵ), ki je razlika med začetnim kotom in velikostjo notranjega kota enakostraničnega trikotnika (60°). Napaka je sicer lahko tako pozitivna kot negativna ali pa je celo enaka 0 (nič). Zaradi lažjega raziskovanja sem napako (ϵ) pri svojem delu razumel, kot sem jo definiriral zgoraj, torej kot absolutno vrednost razlike med začetnim kotom in kotom 60° .

Tabela 1: Vrednost napake glede na začetni kot

Začetni kot (α_1)	$\varepsilon = \alpha_1 - 60^\circ $
35°	25°
78°	18°
90°	30°

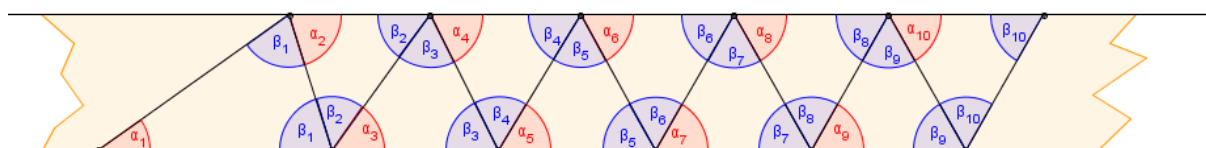
S pregibanjem traku nastajajo enakokraki trikotniki. Kote med krakoma nastalih enakokrakih trikotnikov sem zaporedoma označeval: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Začetni kot (α_1) sem že definiral, to je kot pri vrhu (oziroma med krakoma) prvega enakokrakega trikotnika. Podobno je α_2 kot pri vrhu drugega enakokrakega trikotnika, α_3 kot pri vrhu tretjega enakokrakega trikotnika ...

Pri raziskovanju sem sprva sicer opazoval te kote, vendar sem kmalu ugotovil, da je enostavneje opazovati napako (ε) in se tako osredotočil nanjo.

S fizičnim pregibanjem traku sem ugotovil, da je začetni kot pomemben za to, po kolikih pregibih se bo pojavil enakostranični trikotnik, vendar ne pomembno. Pri večini poskusov sem enakostranični trikotnik dobil po petem oziroma šestem pregibu. Pri tem moram dodati, da sem izbiral začetne kote med 30° in 100°. Rezultati so bili različni, saj sem bil pri pregibanju bolj ali manj natančen, merjenje kotov pa je bilo omejeno na natančnost ene kotne stopinje (geotrikotnik).

S poskušanjem kmalu nisem bil več zadovoljen, zaradi že omenjenih omejitev (natančnost pregibanja in natančnost meritev). Zato sem se lotil najprej grafičnega modeliranja pregibanja, kasneje še računanja.

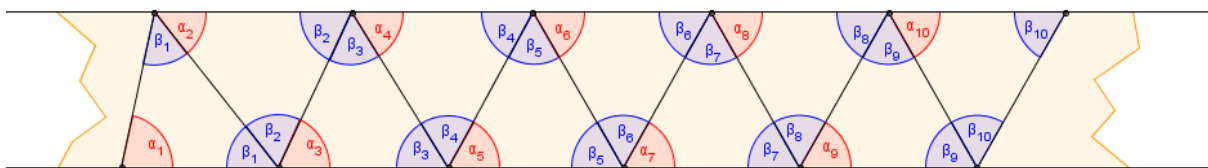
Pri pregibanju vedno znova razpolavljamo razliko med iztegnjenim kotom in enega od obeh notranjih kotov, ki leži ob osnovnici, predhodnega enakokrakega trikotnika. To lastnost pregibanja sem upošteval pri grafičnem modelu pregibanja. Nastale so spodnje slike (za začetne kote 35°, 78° in 90°) ter meritve, ki so zbrane v tabeli 2, tabeli 3 in tabeli 4.



Slika 19: Grafični model pregibanja – začetni kot 35° (vir: avtor naloge)

Tabela 2: Velikosti kotov na sliki 19

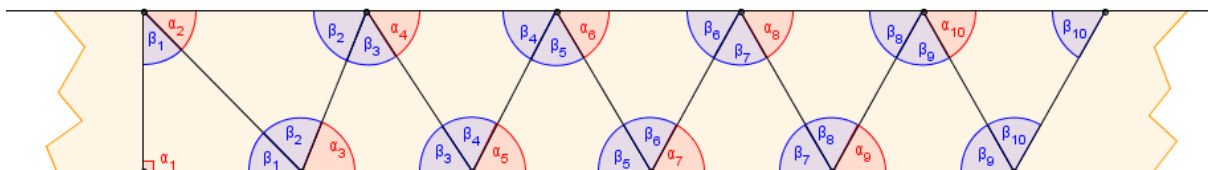
α_1	35°	β_1	$72,5^\circ$
α_2	$72,5^\circ$	β_2	$53,75^\circ$
α_3	$53,75^\circ$	β_3	$63,125^\circ$
α_4	$63,125^\circ$	β_4	$58,4375^\circ$
α_5	$58,4375^\circ$	β_5	$60,78125^\circ$
α_6	$60,78125^\circ$	β_6	$59,609375^\circ$
α_7	$59,609375^\circ$	β_7	$60,1953125^\circ$
α_8	$60,1953125^\circ$	β_8	$59,90234375^\circ$
α_9	$59,90234375^\circ$	β_9	$60,048828125^\circ$
α_{10}	$60,048828125^\circ$	β_{10}	$59,9755859375^\circ$



Slika 20: Grafični model pregibanja – začetni kot 78° (vir: avtor naloge)

Tabela 3: Velikosti kotov na sliki 20

α_1	78°	β_1	51°
α_2	51°	β_2	$64,5^\circ$
α_3	$64,5^\circ$	β_3	$57,75^\circ$
α_4	$57,75^\circ$	β_4	$61,125^\circ$
α_5	$61,125^\circ$	β_5	$59,4375^\circ$
α_6	$59,4375^\circ$	β_6	$60,28125^\circ$
α_7	$60,28125^\circ$	β_7	$59,859375^\circ$
α_8	$59,859375^\circ$	β_8	$60,0703125^\circ$
α_9	$60,0703125^\circ$	β_9	$59,96484375^\circ$
α_{10}	$59,96484375^\circ$	β_{10}	$60,017578125^\circ$



Slika 21: Grafični model pregibanja – začetni kot 90° (vir: avtor naloge)

Tabela 4: Velikosti kotov na sliki 21

α_1	90°	β_1	45°
α_2	45°	β_2	67,5°
α_3	67,5°	β_3	56,25°
α_4	56,25°	β_4	61,875°
α_5	61,875°	β_5	59,0625°
α_6	59,0625°	β_6	60,46875°
α_7	60,46875°	β_7	59,765625°
α_8	59,765625°	β_8	60,1171875°
α_9	60,1171875°	β_9	59,94140625°
α_{10}	59,94140625°	β_{10}	60,029296875°

Grafični model in opazovanje velikosti notranjih kotov sta me popeljala v razmislek, ali lahko izračunamo velikost napake pri posameznem pregibu.

Z razpolavljanjem kota razpolavljamo tudi napako. Tako je napaka po prvem pregibu enaka polovici prvotne napake, po drugem je enaka četrtini prvotne napake, po tretjem je enaka osmini ...

Zaradi tega lahko izračunamo velikost napake pri posameznem pregibu:

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^n}$$

Obrazec je uporaben pri vseh začetnih kotih (vključno z začetnim kotom 60°, čeprav je smiselnost računanja napake v tem in nekaterih drugih začetnih kotih lahko vprašljiva). Seveda je smiselno omejiti velikosti začetnih kotov na največ 180° zaradi narave papirnatega traku.

Primer.

Začetni kot $\alpha_1 = 90^\circ$

Začetna napaka $\epsilon = 30^\circ$

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^n}$$

$$\epsilon_3 = \frac{30^\circ}{2^3}$$

$$\epsilon_3 = \frac{30^\circ}{8}$$

$$\epsilon_3 = \underline{\underline{3,75^\circ}}$$

Tabela 5: Prikaz izračuna velikosti napak v kotnih stopinjah glede na število pregibov²

Začetni kot (α_1)	35°	78°	90°	106°
ϵ	25°	18°	30°	46°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	12,5°	9°	15°	23°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	6,25°	4,5°	7,5°	11,5°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	3,125°	2,25°	3,75°	5,75°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	1,5625°	1,125°	1,875°	2,875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,78125°	0,5625°	0,9375°	1,4375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,390625°	0,28125°	0,46875°	0,71875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,1953125°	0,140625°	0,234375°	0,359375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,09765625°	0,0703125°	0,1171875°	0,1796875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,048828125°	0,03515625°	0,05859375°	0,08984375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,0244140625°	0,017578125°	0,029296875°	0,044921875°

Napake tvorijo padajoče zaporedje: $\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{8}, \frac{\epsilon}{16}, \frac{\epsilon}{32}, \dots$

Zaporedje koeficientov napake: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

Z opazovanjem zaporedja ugotovimo, da je zaporedje padajoče, saj je vsak naslednji člen zaporedja manjši od prejšnjega, hkrati pa so vsi členi zaporedja vedno pozitivni in se približujejo ničli, ki pa je nikoli ne dosežejo. Pravimo, da limitirajo k nič (0) oziroma, da je limita tega zaporedja nič (0).

² V tabeli je le nekaj primerov zaradi omejenega prostora. Tabela v celoti je priloga te naloge.

4 INTERPRETACIJA REZULTATOV

Med raziskovanjem sem ugotovil, da se pri pregibanju traku (če gledamo natančno) enakostranični trikotnik sploh ne pojavi, pač pa se pojavi enakokraki trikotnik, ki je tako blizu enakostraničnega trikotnika, da naše oko ne loči več med enakostraničnim in enakokrakim trikotnikom. Kolikšna je lahko napaka, da je našemu očesu nezaznavna, je verjetno zelo relativno, saj so nekateri med nami boljši ocenjevalci velikosti kotov, drugi spet nekoliko slabši. Glede na to, da z geotrikotnikom, ki je naš zvesti spremljevalec pri pouku, kote lahko izmerimo največ na stopinjo natančno, sem sam (pri tej raziskovalni nalogi) mejo postavil pri $0,5^\circ$. Ko napaka postane manjša od $0,5^\circ$ (notranji koti trikotnika pa merijo torej med $59,5^\circ$ in $60,5^\circ$), sem privzel, da je trikotnik enakostraničen, vsaj za laično oko.

Začetni kot lahko meri od 0° do 180° , zaradi narave papirnatega traku začetni kot večji od 180° ni mogoč. Največja napaka je posledično 120° . Poskušanje in izračune sem omejil na celoštevilске začetne kote³. Po izračunih iz tabele 5 in tabele 7 (priloga) ugotovimo, da je trikotnik navidezno enakostraničen najkasneje po osmem pregibu. Seveda je od začetnega kota in napake odvisno, po koliko pregibih dobimo želeni enakostranični trikotnik. Zaradi razpolavljanja napake pri vsakem naslednjem pregibu se razlika med preostankom napake in kotom 60° precej hitro zmanjšuje. Tako je potrjena moja hipoteza 1, saj trikotniki postajajo vse bližje enakostraničnemu prav zaradi razpolavljanja kota (in s tem tudi napake) pri pregibanju.

Z metodo preizkušanja sem prišel do ugotovitve, da začetni kot ne vpliva pomembno na to, po kolikih pregibih se bo pojavil enakostranični trikotnik, vendar so me izračuni kasneje prepričali v nasprotno. Za napako, ki meri 1° , se navidezno enakostranični trikotnik pojavi že po drugem pregibu. Za napaki 2° in 3° se navidezno enakostranični trikotnik pojavi po tretjem pregibu. Z večanjem napake se večja tudi število pregibov, tako moramo za napako od 4° do 7° narediti štiri pregibe. Podatki o številu pregibov, po katerih je nastali enakokraki trikotnik na videz enakostraničen, so zbrani v tabeli spodaj. Z gotovostjo lahko trdimo, da po

³ Razmislek, kako izračunati velikost napake, ostaja isti tudi v primeru, če je velikost začetnega kota realno število, še zmeraj smiselno omejeno (med 0 in 180).

desetem pregibu v vseh primerih dobimo enakostranični trikotnik, saj so napake po desetem pregibu manjše od $0,12^\circ$. Podobno trdita tudi Hilton in Pedersen (2010).

Tabela 6: Potrebno število pregibov glede na velikost napake

Velikost napake	Potrebno število pregibov, po katerih se pojavi enakostranični trikotnik
1°	2
$2^\circ - 3^\circ$	3
$4^\circ - 7^\circ$	4
$8^\circ - 15^\circ$	5
$16^\circ - 31^\circ$	6
$32^\circ - 63^\circ$	7
$64^\circ - 120^\circ$	8

Tako je potrjena tudi hipoteza 2, da začetni kot vpliva na število pregibov, po katerih se pojavi enakostranični trikotnik.

Od prvega do zadnjega trikotnika so vsi enakokraki trikotniki. Velikost kota med krakom in osnovnico prejšnjega enakokrakega trikotnika je enaka velikosti kota med krakoma novega trikotnika. Velikosti kotov pri vrhovih enakokrakih trikotnikov tvorijo zaporedje. Koti so izmenično večji in manjši od 60° , razlika (napaka) pa se vedno hitreje zmanjšuje. Zaporedje napak $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{8}, \frac{\varepsilon}{16}, \frac{\varepsilon}{32}, \dots$ je padajoče in se neskončno približa nič (0). Posledično je potrjena še hipoteza 3, da se koti ob vrhovih enakokrakih trikotnikov spreminjajo po določenem pravilu in tvorijo zaporedje.

Moje raziskovanje se je začelo s poskušanjem, torej fizičnim prelaganjem papirnatega traku, vendar me je raziskovalni duh gnal naprej, saj se je poskušanje izkazalo za precej nenatančno. Raziskovalne metode sem sproti prilagajal in dodajal, saj me je v to sililo raziskovanje samo. Sem mnenja, da so bile izbrane raziskovalne metode primerne za to, da sem si lahko odgovoril na raziskovalna vprašanja in poiskal odgovore na vprašanja, ki so se mi pojavila ob raziskovanju samem.

5 ZAKLJUČEK

Pregibanje traku me je spodbudilo k raziskovanju in ob koncu se z zadovoljstvom ozrem nazaj ter z veseljem ugotavljam, da je bilo moje raziskovanje uspešno. Preprost trak papirja lahko skriva veliko skrivnosti, tudi matematičnih. Namen mojega raziskovanja je bil, da pokažem, da se matematika skriva tudi v vsakdanjih rečeh, ne le v zapletenih enačbah. Skozi raziskovanje sem ugotovil, da se nekatere pojave lahko opiše tudi z matematičnimi enačbami oziroma obrazci, kar mi je bilo v veliko pomoč.

Uspelo mi je raziskati vzrok za pojav enakostraničnega trikotnika pri pregibanju traku, kar je bila zame največja uganka ob začetku raziskovanja in nastajanju pričujoče raziskovalne naloge. S ponosom lahko rečem, da so bile vse začetne hipoteze potrjene. Začetni kot res vpliva na to, po koliko pregibih se pojavi enakostranični trikotnik, ki nastane zaradi razpolavljanja kota, in s tem napake, pri pregibanju. Uspelo mi je najti zaporedje, ki jasno kaže na to, kar je najverjetneje najpomembnejša ugotovitev mojega raziskovanja. S pregibanjem traku se enakostranični trikotnik pravzaprav sploh ne pojavi, pač pa se pojavi enakokraki trikotnik, ki se od enakostraničnega razlikuje tako zelo malo, da to našemu očesu ni vidno.

Morda bi lahko nalogo nadgradil tako, da bi opazoval napako samo in ne le njene absolutne vrednosti. Morda pa bi se splačalo raziskati tudi, kaj se dogaja s koti, če spremenimo način pregibanja traku in namesto izmeničnega pregibanja navzgor – navzdol izberemo kako drugačno zaporedje pregibov.

Kljub težavam in skrbem med nastajanjem naloge sem ob zaključku izredno ponosen na končni izdelek. Med delom sem ugotavljal, da je v matematiki veliko lažje kakšen pojav opisati z matematičnimi simboli, enačbami ali skicami, saj je 'matematični jezik' precej težak, zahteva natančnost in doslednost.

Pregibanje traku je lahko zgolj prostočasna dejavnost, lahko pa se razvije še v veliko več ...

6 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Mladi smo bodoči aktivni oblikovalci družbe in sveta, v katerem živimo, zato je še posebej pomembno, da mi »obudimo« vrednote in na njih gradimo svojo, našo prihodnost. Odgovornost je ena tistih vrednot, ki se prepleta s skoraj vsemi področji našega delovanja. Učenci, osnovnošolci, smo zagotovo odgovorni za lastno učenje in s tem, ko to odgovornost sprejmemo, se odgovorno vedemo tudi do družbe. Učenje oziroma izobraževanje nasploh prispevata k trajnostnemu razvoju družbe in posameznikov v njej.

Z iskreno radovednostjo učenje postane raziskovanje. Spontano, vsakdanje ali pa preraste v znanstveno in sistematično. Pričujoča naloga je rezultat slednjega in tako tudi dokaz, da svojo nalogo v družbi sprejemam zelo odgovorno.

7 VIRI

Berk J., Draksler J., Robič M., 2003, Skrivnosti števil in oblik 7, Ljubljana, Rokus

Gardner M., 1988, Hexaflexagons and other mathematical diversions, Chicago, The University of Chicago Press

Hilton P., Pedersen J. in Donmoyer S., 2010, A Mathematical Tapestry Demonstrating the Beautiful Unity of Mathematics, New York, Cambridge University Press

Šparovec J., Kavka D., Pavlič G. in Rugelj M., 2005, Tempus – Matematika za 4. letnik gimnazij, Ljubljana, Modrijan

PRILOGE

Tabela 7: Prikaz izračuna velikosti napak v kotnih stopinjah glede na število pregibov

Začetni kot (α_1)	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
ϵ	60°	59°	58°	57°	56°	55°	54°	53°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	30°	29,5°	29°	28,5°	28°	27,5°	27°	26,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	15°	14,75°	14,5°	14,25°	14°	13,75°	13,5°	13,25°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	7,5°	7,375°	7,25°	7,125°	7°	6,875°	6,75°	6,625°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	3,75°	3,6875°	3,625°	3,5625°	3,5°	3,4375°	3,375°	3,3125°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	1,875°	1,84375°	1,8125°	1,78125°	1,75°	1,71875°	1,6875°	1,65625°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,9375°	0,921875°	0,90625°	0,890625°	0,875°	0,859375°	0,84375°	0,828125°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,46875°	0,4609375°	0,453125°	0,4453125°	0,4375°	0,4296875°	0,421875°	0,4140625°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,234375°	0,23046875°	0,2265625°	0,22265625°	0,21875°	0,21484375°	0,2109375°	0,20703125°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,1171875°	0,115234375°	0,11328125°	0,111328125°	0,109375°	0,107421875°	0,10546875°	0,103515625°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,05859375°	0,0576171875°	0,056640625°	0,0556640625°	0,0546875°	0,0537109375°	0,052734375°	0,0517578125°

Začetni kot (α_1)	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°
ϵ	52°	51°	50°	49°	48°	47°	46°	45°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	26°	25,5°	25°	24,5°	24°	23,5°	23°	22,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	13°	12,75°	12,5°	12,25°	12°	11,75°	11,5°	11,25°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	6,5°	6,375°	6,25°	6,125°	6°	5,875°	5,75°	5,625°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	3,25°	3,1875°	3,125°	3,0625°	3°	2,9375°	2,875°	2,8125°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	1,625°	1,59375°	1,5625°	1,53125°	1,5°	1,46875°	1,4375°	1,40625°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,8125°	0,796875°	0,78125°	0,765625°	0,75°	0,734375°	0,71875°	0,703125°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,40625°	0,3984375°	0,390625°	0,3828125°	0,375°	0,3671875°	0,359375°	0,3515625°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,203125°	0,19921875°	0,1953125°	0,19140625°	0,1875°	0,18359375°	0,1796875°	0,17578125°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,1015625°	0,099609375°	0,09765625°	0,095703125°	0,09375°	0,091796875°	0,08984375°	0,087890625°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,05078125°	0,0498046875°	0,048828125°	0,0478515625°	0,046875°	0,0458984375°	0,044921875°	0,0439453125°

Začetni kot (α_1)	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°
ϵ	44°	43°	42°	41°	40°	39°	38°	37°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	22°	21,5°	21°	20,5°	20°	19,5°	19°	18,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	11°	10,75°	10,5°	10,25°	10°	9,75°	9,5°	9,25°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	5,5°	5,375°	5,25°	5,125°	5°	4,875°	4,75°	4,625°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	2,75°	2,6875°	2,625°	2,5625°	2,5°	2,4375°	2,375°	2,3125°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	1,375°	1,34375°	1,3125°	1,28125°	1,25°	1,21875°	1,1875°	1,15625°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,6875°	0,671875°	0,65625°	0,640625°	0,625°	0,609375°	0,59375°	0,578125°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,34375°	0,3359375°	0,328125°	0,3203125°	0,3125°	0,3046875°	0,296875°	0,2890625°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,171875°	0,16796875°	0,1640625°	0,16015625°	0,15625°	0,15234375°	0,1484375°	0,14453125°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0859375°	0,083984375°	0,08203125°	0,080078125°	0,078125°	0,076171875°	0,07421875°	0,072265625°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,04296875°	0,0419921875°	0,041015625°	0,0400390625°	0,0390625°	0,0380859375°	0,037109375°	0,0361328125°

Začetni kot (α_1)	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°
ϵ	36°	35°	34°	33°	32°	31°	30°	29°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	18°	17,5°	17°	16,5°	16°	15,5°	15°	14,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	9°	8,75°	8,5°	8,25°	8°	7,75°	7,5°	7,25°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	4,5°	4,375°	4,25°	4,125°	4°	3,875°	3,75°	3,625°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	2,25°	2,1875°	2,125°	2,0625°	2°	1,9375°	1,875°	1,8125°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	1,125°	1,09375°	1,0625°	1,03125°	1°	0,96875°	0,9375°	0,90625°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,5625°	0,546875°	0,53125°	0,515625°	0,5°	0,484375°	0,46875°	0,453125°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,28125°	0,2734375°	0,265625°	0,2578125°	0,25°	0,2421875°	0,234375°	0,2265625°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,140625°	0,13671875°	0,1328125°	0,12890625°	0,125°	0,12109375°	0,1171875°	0,11328125°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0703125°	0,068359375°	0,06640625°	0,064453125°	0,0625°	0,060546875°	0,05859375°	0,056640625°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,03515625°	0,0341796875°	0,033203125°	0,0322265625°	0,03125°	0,0302734375°	0,029296875°	0,0283203125°

Začetni kot (α_1)	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°
ϵ	28°	27°	26°	25°	24°	23°	22°	21°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	14°	13,5°	13°	12,5°	12°	11,5°	11°	10,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	7°	6,75°	6,5°	6,25°	6°	5,75°	5,5°	5,25°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	3,5°	3,375°	3,25°	3,125°	3°	2,875°	2,75°	2,625°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	1,75°	1,6875°	1,625°	1,5625°	1,5°	1,4375°	1,375°	1,3125°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,875°	0,84375°	0,8125°	0,78125°	0,75°	0,71875°	0,6875°	0,65625°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,4375°	0,421875°	0,40625°	0,390625°	0,375°	0,359375°	0,34375°	0,328125°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,21875°	0,2109375°	0,203125°	0,1953125°	0,1875°	0,1796875°	0,171875°	0,1640625°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,109375°	0,10546875°	0,1015625°	0,09765625°	0,09375°	0,08984375°	0,0859375°	0,08203125°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0546875°	0,052734375°	0,05078125°	0,048828125°	0,046875°	0,044921875°	0,04296875°	0,041015625°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,02734375°	0,0263671875°	0,025390625°	0,0244140625°	0,0234375°	0,0224609375°	0,021484375°	0,0205078125°

Začetni kot (α_1)	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°	47°
ϵ	20°	19°	18°	17°	16°	15°	14°	13°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	10°	9,5°	9°	8,5°	8°	7,5°	7°	6,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	5°	4,75°	4,5°	4,25°	4°	3,75°	3,5°	3,25°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	2,5°	2,375°	2,25°	2,125°	2°	1,875°	1,75°	1,625°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	1,25°	1,1875°	1,125°	1,0625°	1°	0,9375°	0,875°	0,8125°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,625°	0,59375°	0,5625°	0,53125°	0,5°	0,46875°	0,4375°	0,40625°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,3125°	0,296875°	0,28125°	0,265625°	0,25°	0,234375°	0,21875°	0,203125°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,15625°	0,1484375°	0,140625°	0,1328125°	0,125°	0,1171875°	0,109375°	0,1015625°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,078125°	0,07421875°	0,0703125°	0,06640625°	0,0625°	0,05859375°	0,0546875°	0,05078125°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0390625°	0,037109375°	0,03515625°	0,033203125°	0,03125°	0,029296875°	0,02734375°	0,025390625°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,01953125°	0,0185546875°	0,017578125°	0,0166015625°	0,015625°	0,0146484375°	0,013671875°	0,0126953125°

Začetni kot (α_1)	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°
ϵ	12°	11°	10°	9°	8°	7°	6°	5°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	6°	5,5°	5°	4,5°	4°	3,5°	3°	2,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	3°	2,75°	2,5°	2,25°	2°	1,75°	1,5°	1,25°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	1,5°	1,375°	1,25°	1,125°	1°	0,875°	0,75°	0,625°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	0,75°	0,6875°	0,625°	0,5625°	0,5°	0,4375°	0,375°	0,3125°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,375°	0,34375°	0,3125°	0,28125°	0,25°	0,21875°	0,1875°	0,15625°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,1875°	0,171875°	0,15625°	0,140625°	0,125°	0,109375°	0,09375°	0,078125°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,09375°	0,0859375°	0,078125°	0,0703125°	0,0625°	0,0546875°	0,046875°	0,0390625°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,046875°	0,04296875°	0,0390625°	0,03515625°	0,03125°	0,02734375°	0,0234375°	0,01953125°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0234375°	0,021484375°	0,01953125°	0,017578125°	0,015625°	0,013671875°	0,01171875°	0,009765625°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,01171875°	0,0107421875°	0,009765625°	0,0087890625°	0,0078125°	0,0068359375°	0,005859375°	0,0048828125°

Začetni kot (α_1)	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°
ϵ	4°	3°	2°	1°	0°	1°	2°	3°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	2°	1,5°	1°	0,5°	0°	0,5°	1°	1,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	1°	0,75°	0,5°	0,25°	0°	0,25°	0,5°	0,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	0,5°	0,375°	0,25°	0,125°	0°	0,125°	0,25°	0,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	0,25°	0,1875°	0,125°	0,0625°	0°	0,0625°	0,125°	0,1875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,125°	0,09375°	0,0625°	0,03125°	0°	0,03125°	0,0625°	0,09375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,0625°	0,046875°	0,03125°	0,015625°	0°	0,015625°	0,03125°	0,046875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,03125°	0,0234375°	0,015625°	0,0078125°	0°	0,0078125°	0,015625°	0,0234375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,015625°	0,01171875°	0,0078125°	0,00390625°	0°	0,00390625°	0,0078125°	0,01171875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0078125°	0,005859375°	0,00390625°	0,001953125°	0°	0,001953125°	0,00390625°	0,005859375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,00390625°	0,0029296875°	0,001953125°	0,0009765625°	0°	0,0009765625°	0,001953125°	0,0029296875°

Začetni kot (α_1)	64°	65°	66°	67°	68°	69°	70°	71°
ϵ	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	2°	2,5°	3°	3,5°	4°	4,5°	5°	5,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	1°	1,25°	1,5°	1,75°	2°	2,25°	2,5°	2,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	0,5°	0,625°	0,75°	0,875°	1°	1,125°	1,25°	1,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	0,25°	0,3125°	0,375°	0,4375°	0,5°	0,5625°	0,625°	0,6875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,125°	0,15625°	0,1875°	0,21875°	0,25°	0,28125°	0,3125°	0,34375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,0625°	0,078125°	0,09375°	0,109375°	0,125°	0,140625°	0,15625°	0,171875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,03125°	0,0390625°	0,046875°	0,0546875°	0,0625°	0,0703125°	0,078125°	0,0859375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,015625°	0,01953125°	0,0234375°	0,02734375°	0,03125°	0,03515625°	0,0390625°	0,04296875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0078125°	0,009765625°	0,01171875°	0,013671875°	0,015625°	0,017578125°	0,01953125°	0,021484375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,00390625°	0,0048828125°	0,005859375°	0,0068359375°	0,0078125°	0,0087890625°	0,009765625°	0,0107421875°

Začetni kot (α_1)	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°
ϵ	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	6°	6,5°	7°	7,5°	8°	8,5°	9°	9,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	3°	3,25°	3,5°	3,75°	4°	4,25°	4,5°	4,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	1,5°	1,625°	1,75°	1,875°	2°	2,125°	2,25°	2,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	0,75°	0,8125°	0,875°	0,9375°	1°	1,0625°	1,125°	1,1875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,375°	0,40625°	0,4375°	0,46875°	0,5°	0,53125°	0,5625°	0,59375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,1875°	0,203125°	0,21875°	0,234375°	0,25°	0,265625°	0,28125°	0,296875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,09375°	0,1015625°	0,109375°	0,1171875°	0,125°	0,1328125°	0,140625°	0,1484375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,046875°	0,05078125°	0,0546875°	0,05859375°	0,0625°	0,06640625°	0,0703125°	0,07421875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0234375°	0,025390625°	0,02734375°	0,029296875°	0,03125°	0,033203125°	0,03515625°	0,037109375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,01171875°	0,0126953125°	0,013671875°	0,0146484375°	0,015625°	0,0166015625°	0,017578125°	0,0185546875°

Začetni kot (α_1)	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°
ϵ	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	10°	10,5°	11°	11,5°	12°	12,5°	13°	13,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	5°	5,25°	5,5°	5,75°	6°	6,25°	6,5°	6,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	2,5°	2,625°	2,75°	2,875°	3°	3,125°	3,25°	3,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	1,25°	1,3125°	1,375°	1,4375°	1,5°	1,5625°	1,625°	1,6875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,625°	0,65625°	0,6875°	0,71875°	0,75°	0,78125°	0,8125°	0,84375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,3125°	0,328125°	0,34375°	0,359375°	0,375°	0,390625°	0,40625°	0,421875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,15625°	0,1640625°	0,171875°	0,1796875°	0,1875°	0,1953125°	0,203125°	0,2109375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,078125°	0,08203125°	0,0859375°	0,08984375°	0,09375°	0,09765625°	0,1015625°	0,10546875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0390625°	0,041015625°	0,04296875°	0,044921875°	0,046875°	0,048828125°	0,05078125°	0,052734375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,01953125°	0,0205078125°	0,021484375°	0,0224609375°	0,0234375°	0,0244140625°	0,025390625°	0,0263671875°

Začetni kot (α_1)	88°	89°	90°	91°	92°	93°	94°	95°
ϵ	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	14°	14,5°	15°	15,5°	16°	16,5°	17°	17,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	7°	7,25°	7,5°	7,75°	8°	8,25°	8,5°	8,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	3,5°	3,625°	3,75°	3,875°	4°	4,125°	4,25°	4,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	1,75°	1,8125°	1,875°	1,9375°	2°	2,0625°	2,125°	2,1875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	0,875°	0,90625°	0,9375°	0,96875°	1°	1,03125°	1,0625°	1,09375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	0,4375°	0,453125°	0,46875°	0,484375°	0,5°	0,515625°	0,53125°	0,546875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,21875°	0,2265625°	0,234375°	0,2421875°	0,25°	0,2578125°	0,265625°	0,2734375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,109375°	0,11328125°	0,1171875°	0,12109375°	0,125°	0,12890625°	0,1328125°	0,13671875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,0546875°	0,056640625°	0,05859375°	0,060546875°	0,0625°	0,064453125°	0,06640625°	0,068359375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,02734375°	0,0283203125°	0,029296875°	0,0302734375°	0,03125°	0,0322265625°	0,033203125°	0,0341796875°

Začetni kot (α_1)	96°	97°	98°	99°	100°	101°	102°	103°
ϵ	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°
po 1. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$	18°	18,5°	19°	19,5°	20°	20,5°	21°	21,5°
po 2. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$	9°	9,25°	9,5°	9,75°	10°	10,25°	10,5°	10,75°
po 3. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{8}\right)$	4,5°	4,625°	4,75°	4,875°	5°	5,125°	5,25°	5,375°
po 4. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{16}\right)$	2,25°	2,3125°	2,375°	2,4375°	2,5°	2,5625°	2,625°	2,6875°
po 5. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{32}\right)$	1,125°	1,15625°	1,1875°	1,21875°	1,25°	1,28125°	1,3125°	1,34375°
po 6. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{64}\right)$	0,5625°	0,578125°	0,59375°	0,609375°	0,625°	0,640625°	0,65625°	0,671875°
po 7. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{128}\right)$	0,28125°	0,2890625°	0,296875°	0,3046875°	0,3125°	0,3203125°	0,328125°	0,3359375°
po 8. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{256}\right)$	0,140625°	0,14453125°	0,1484375°	0,15234375°	0,15625°	0,16015625°	0,1640625°	0,16796875°
po 9. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{512}\right)$	0,0703125°	0,072265625°	0,07421875°	0,076171875°	0,078125°	0,080078125°	0,08203125°	0,083984375°
po 10. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{1024}\right)$	0,03515625°	0,0361328125°	0,037109375°	0,0380859375°	0,0390625°	0,0400390625°	0,041015625°	0,0419921875°
Začetni kot (α_1)	104°	105°	106°	107°	108°	109°	110°	111°
ϵ	44°	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°
po 1. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$	22°	22,5°	23°	23,5°	24°	24,5°	25°	25,5°
po 2. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$	11°	11,25°	11,5°	11,75°	12°	12,25°	12,5°	12,75°
po 3. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{8}\right)$	5,5°	5,625°	5,75°	5,875°	6°	6,125°	6,25°	6,375°
po 4. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{16}\right)$	2,75°	2,8125°	2,875°	2,9375°	3°	3,0625°	3,125°	3,1875°
po 5. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{32}\right)$	1,375°	1,40625°	1,4375°	1,46875°	1,5°	1,53125°	1,5625°	1,59375°
po 6. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{64}\right)$	0,6875°	0,703125°	0,71875°	0,734375°	0,75°	0,765625°	0,78125°	0,796875°
po 7. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{128}\right)$	0,34375°	0,3515625°	0,359375°	0,3671875°	0,375°	0,3828125°	0,390625°	0,3984375°
po 8. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{256}\right)$	0,171875°	0,17578125°	0,1796875°	0,18359375°	0,1875°	0,19140625°	0,1953125°	0,19921875°
po 9. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{512}\right)$	0,0859375°	0,087890625°	0,08984375°	0,091796875°	0,09375°	0,095703125°	0,09765625°	0,099609375°
po 10. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{1024}\right)$	0,04296875°	0,0439453125°	0,044921875°	0,0458984375°	0,046875°	0,0478515625°	0,048828125°	0,0498046875°

Začetni kot (α_1)	112°	113°	114°	115°	116°	117°	118°	119°
ϵ	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°
po 1. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$	26°	26,5°	27°	27,5°	28°	28,5°	29°	29,5°
po 2. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$	13°	13,25°	13,5°	13,75°	14°	14,25°	14,5°	14,75°
po 3. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{8}\right)$	6,5°	6,625°	6,75°	6,875°	7°	7,125°	7,25°	7,375°
po 4. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{16}\right)$	3,25°	3,3125°	3,375°	3,4375°	3,5°	3,5625°	3,625°	3,6875°
po 5. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{32}\right)$	1,625°	1,65625°	1,6875°	1,71875°	1,75°	1,78125°	1,8125°	1,84375°
po 6. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{64}\right)$	0,8125°	0,828125°	0,84375°	0,859375°	0,875°	0,890625°	0,90625°	0,921875°
po 7. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{128}\right)$	0,40625°	0,4140625°	0,421875°	0,4296875°	0,4375°	0,4453125°	0,453125°	0,4609375°
po 8. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{256}\right)$	0,203125°	0,20703125°	0,2109375°	0,21484375°	0,21875°	0,22265625°	0,2265625°	0,23046875°
po 9. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{512}\right)$	0,1015625°	0,103515625°	0,10546875°	0,107421875°	0,109375°	0,111328125°	0,11328125°	0,115234375°
po 10. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{1024}\right)$	0,05078125°	0,0517578125°	0,052734375°	0,0537109375°	0,0546875°	0,0556640625°	0,056640625°	0,0576171875°
Začetni kot (α_1)	120°	121°	122°	123°	124°	125°	126°	127°
ϵ	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°
po 1. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$	30°	30,5°	31°	31,5°	32°	32,5°	33°	33,5°
po 2. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$	15°	15,25°	15,5°	15,75°	16°	16,25°	16,5°	16,75°
po 3. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{8}\right)$	7,5°	7,625°	7,75°	7,875°	8°	8,125°	8,25°	8,375°
po 4. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{16}\right)$	3,75°	3,8125°	3,875°	3,9375°	4°	4,0625°	4,125°	4,1875°
po 5. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{32}\right)$	1,875°	1,90625°	1,9375°	1,96875°	2°	2,03125°	2,0625°	2,09375°
po 6. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{64}\right)$	0,9375°	0,953125°	0,96875°	0,984375°	1°	1,015625°	1,03125°	1,046875°
po 7. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{128}\right)$	0,46875°	0,4765625°	0,484375°	0,4921875°	0,5°	0,5078125°	0,515625°	0,5234375°
po 8. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{256}\right)$	0,234375°	0,23828125°	0,2421875°	0,24609375°	0,25°	0,25390625°	0,2578125°	0,26171875°
po 9. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{512}\right)$	0,1171875°	0,119140625°	0,12109375°	0,123046875°	0,125°	0,126953125°	0,12890625°	0,130859375°
po 10. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{1024}\right)$	0,05859375°	0,0595703125°	0,060546875°	0,0615234375°	0,0625°	0,0634765625°	0,064453125°	0,0654296875°

Začetni kot (α_1)	128°	129°	130°	131°	132°	133°	134°	135°
ϵ	68°	69°	70°	71°	72°	73°	74°	75°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	34°	34,5°	35°	35,5°	36°	36,5°	37°	37,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	17°	17,25°	17,5°	17,75°	18°	18,25°	18,5°	18,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	8,5°	8,625°	8,75°	8,875°	9°	9,125°	9,25°	9,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	4,25°	4,3125°	4,375°	4,4375°	4,5°	4,5625°	4,625°	4,6875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	2,125°	2,15625°	2,1875°	2,21875°	2,25°	2,28125°	2,3125°	2,34375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	1,0625°	1,078125°	1,09375°	1,109375°	1,125°	1,140625°	1,15625°	1,171875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,53125°	0,5390625°	0,546875°	0,5546875°	0,5625°	0,5703125°	0,578125°	0,5859375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,265625°	0,26953125°	0,2734375°	0,27734375°	0,28125°	0,28515625°	0,2890625°	0,29296875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,1328125°	0,134765625°	0,13671875°	0,138671875°	0,140625°	0,142578125°	0,14453125°	0,146484375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,06640625°	0,0673828125°	0,068359375°	0,0693359375°	0,0703125°	0,0712890625°	0,072265625°	0,0732421875°
Začetni kot (α_1)	136°	137°	138°	139°	140°	141°	142°	143°
ϵ	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	38°	38,5°	39°	39,5°	40°	40,5°	41°	41,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	19°	19,25°	19,5°	19,75°	20°	20,25°	20,5°	20,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	9,5°	9,625°	9,75°	9,875°	10°	10,125°	10,25°	10,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	4,75°	4,8125°	4,875°	4,9375°	5°	5,0625°	5,125°	5,1875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	2,375°	2,40625°	2,4375°	2,46875°	2,5°	2,53125°	2,5625°	2,59375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	1,1875°	1,203125°	1,21875°	1,234375°	1,25°	1,265625°	1,28125°	1,296875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,59375°	0,6015625°	0,609375°	0,6171875°	0,625°	0,6328125°	0,640625°	0,6484375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,296875°	0,30078125°	0,3046875°	0,30859375°	0,3125°	0,31640625°	0,3203125°	0,32421875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,1484375°	0,150390625°	0,15234375°	0,154296875°	0,15625°	0,158203125°	0,16015625°	0,162109375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,07421875°	0,0751953125°	0,076171875°	0,0771484375°	0,078125°	0,0791015625°	0,080078125°	0,0810546875°

Začetni kot (α_1)	144°	145°	146°	147°	148°	149°	150°	151°
ϵ	84°	85°	86°	87°	88°	89°	90°	91°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	42°	42,5°	43°	43,5°	44°	44,5°	45°	45,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	21°	21,25°	21,5°	21,75°	22°	22,25°	22,5°	22,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	10,5°	10,625°	10,75°	10,875°	11°	11,125°	11,25°	11,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	5,25°	5,3125°	5,375°	5,4375°	5,5°	5,5625°	5,625°	5,6875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	2,625°	2,65625°	2,6875°	2,71875°	2,75°	2,78125°	2,8125°	2,84375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	1,3125°	1,328125°	1,34375°	1,359375°	1,375°	1,390625°	1,40625°	1,421875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,65625°	0,6640625°	0,671875°	0,6796875°	0,6875°	0,6953125°	0,703125°	0,7109375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,328125°	0,33203125°	0,3359375°	0,33984375°	0,34375°	0,34765625°	0,3515625°	0,35546875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,1640625°	0,166015625°	0,16796875°	0,169921875°	0,171875°	0,173828125°	0,17578125°	0,177734375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,08203125°	0,0830078125°	0,083984375°	0,0849609375°	0,0859375°	0,0869140625°	0,087890625°	0,0888671875°
Začetni kot (α_1)	152°	153°	154°	155°	156°	157°	158°	159°
ϵ	92°	93°	94°	95°	96°	97°	98°	99°
po 1. pregibu ($\frac{\epsilon}{2}$)	46°	46,5°	47°	47,5°	48°	48,5°	49°	49,5°
po 2. pregibu ($\frac{\epsilon}{4}$)	23°	23,25°	23,5°	23,75°	24°	24,25°	24,5°	24,75°
po 3. pregibu ($\frac{\epsilon}{8}$)	11,5°	11,625°	11,75°	11,875°	12°	12,125°	12,25°	12,375°
po 4. pregibu ($\frac{\epsilon}{16}$)	5,75°	5,8125°	5,875°	5,9375°	6°	6,0625°	6,125°	6,1875°
po 5. pregibu ($\frac{\epsilon}{32}$)	2,875°	2,90625°	2,9375°	2,96875°	3°	3,03125°	3,0625°	3,09375°
po 6. pregibu ($\frac{\epsilon}{64}$)	1,4375°	1,453125°	1,46875°	1,484375°	1,5°	1,515625°	1,53125°	1,546875°
po 7. pregibu ($\frac{\epsilon}{128}$)	0,71875°	0,7265625°	0,734375°	0,7421875°	0,75°	0,7578125°	0,765625°	0,7734375°
po 8. pregibu ($\frac{\epsilon}{256}$)	0,359375°	0,36328125°	0,3671875°	0,37109375°	0,375°	0,37890625°	0,3828125°	0,38671875°
po 9. pregibu ($\frac{\epsilon}{512}$)	0,1796875°	0,181640625°	0,18359375°	0,185546875°	0,1875°	0,189453125°	0,19140625°	0,193359375°
po 10. pregibu ($\frac{\epsilon}{1024}$)	0,08984375°	0,0908203125°	0,091796875°	0,0927734375°	0,09375°	0,0947265625°	0,095703125°	0,0966796875°

Začetni kot (α_1)	160°	161°	162°	163°	164°	165°	166°	167°
ϵ	100°	101°	102°	103°	104°	105°	106°	107°
po 1. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$	50°	50,5°	51°	51,5°	52°	52,5°	53°	53,5°
po 2. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$	25°	25,25°	25,5°	25,75°	26°	26,25°	26,5°	26,75°
po 3. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{8}\right)$	12,5°	12,625°	12,75°	12,875°	13°	13,125°	13,25°	13,375°
po 4. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{16}\right)$	6,25°	6,3125°	6,375°	6,4375°	6,5°	6,5625°	6,625°	6,6875°
po 5. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{32}\right)$	3,125°	3,15625°	3,1875°	3,21875°	3,25°	3,28125°	3,3125°	3,34375°
po 6. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{64}\right)$	1,5625°	1,578125°	1,59375°	1,609375°	1,625°	1,640625°	1,65625°	1,671875°
po 7. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{128}\right)$	0,78125°	0,7890625°	0,796875°	0,8046875°	0,8125°	0,8203125°	0,828125°	0,8359375°
po 8. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{256}\right)$	0,390625°	0,39453125°	0,3984375°	0,40234375°	0,40625°	0,41015625°	0,4140625°	0,41796875°
po 9. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{512}\right)$	0,1953125°	0,197265625°	0,19921875°	0,201171875°	0,203125°	0,205078125°	0,20703125°	0,208984375°
po 10. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{1024}\right)$	0,09765625°	0,0986328125°	0,099609375°	0,1005859375°	0,1015625°	0,1025390625°	0,103515625°	0,1044921875°
Začetni kot (α_1)	168°	169°	170°	171°	172°	173°	174°	175°
ϵ	108°	109°	110°	111°	112°	113°	114°	115°
po 1. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$	54°	54,5°	55°	55,5°	56°	56,5°	57°	57,5°
po 2. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$	27°	27,25°	27,5°	27,75°	28°	28,25°	28,5°	28,75°
po 3. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{8}\right)$	13,5°	13,625°	13,75°	13,875°	14°	14,125°	14,25°	14,375°
po 4. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{16}\right)$	6,75°	6,8125°	6,875°	6,9375°	7°	7,0625°	7,125°	7,1875°
po 5. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{32}\right)$	3,375°	3,40625°	3,4375°	3,46875°	3,5°	3,53125°	3,5625°	3,59375°
po 6. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{64}\right)$	1,6875°	1,703125°	1,71875°	1,734375°	1,75°	1,765625°	1,78125°	1,796875°
po 7. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{128}\right)$	0,84375°	0,8515625°	0,859375°	0,8671875°	0,875°	0,8828125°	0,890625°	0,8984375°
po 8. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{256}\right)$	0,421875°	0,42578125°	0,4296875°	0,43359375°	0,4375°	0,44140625°	0,4453125°	0,44921875°
po 9. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{512}\right)$	0,2109375°	0,212890625°	0,21484375°	0,216796875°	0,21875°	0,220703125°	0,22265625°	0,224609375°
po 10. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{1024}\right)$	0,10546875°	0,1064453125°	0,107421875°	0,1083984375°	0,109375°	0,1103515625°	0,111328125°	0,1123046875°

Začetni kot (α_1)	176°	177°	178°	179°	180°
ϵ	116°	117°	118°	119°	120°
po 1. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$	58°	58,5°	59°	59,5°	60°
po 2. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$	29°	29,25°	29,5°	29,75°	30°
po 3. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{8}\right)$	14,5°	14,625°	14,75°	14,875°	15°
po 4. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{16}\right)$	7,25°	7,3125°	7,375°	7,4375°	7,5°
po 5. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{32}\right)$	3,625°	3,65625°	3,6875°	3,71875°	3,75°
po 6. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{64}\right)$	1,8125°	1,828125°	1,84375°	1,859375°	1,875°
po 7. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{128}\right)$	0,90625°	0,9140625°	0,921875°	0,9296875°	0,9375°
po 8. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{256}\right)$	0,453125°	0,45703125°	0,4609375°	0,46484375°	0,46875°
po 9. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{512}\right)$	0,2265625°	0,228515625°	0,23046875°	0,232421875°	0,234375°
po 10. pregibu $\left(\frac{\epsilon}{1024}\right)$	0,11328125°	0,1142578125°	0,115234375°	0,1162109375°	0,1171875°