Mladi za napredek Maribora 2015

32. srečanje

DOLŽINA »SPIRALE«

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor:	JAKOB VIDMAR
Mentor:	JOŽEF SENEKOVIČ
Šola:	OŠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2015

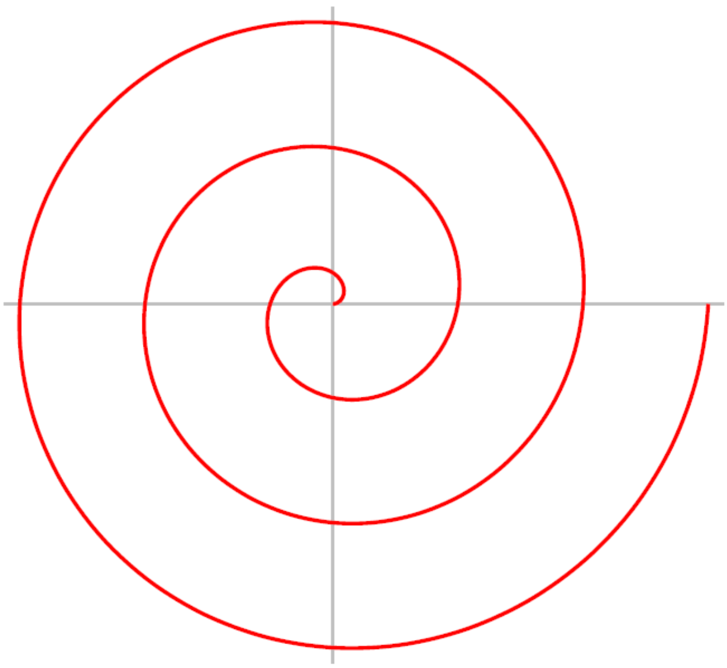
Kazalo

1. POVZETEK

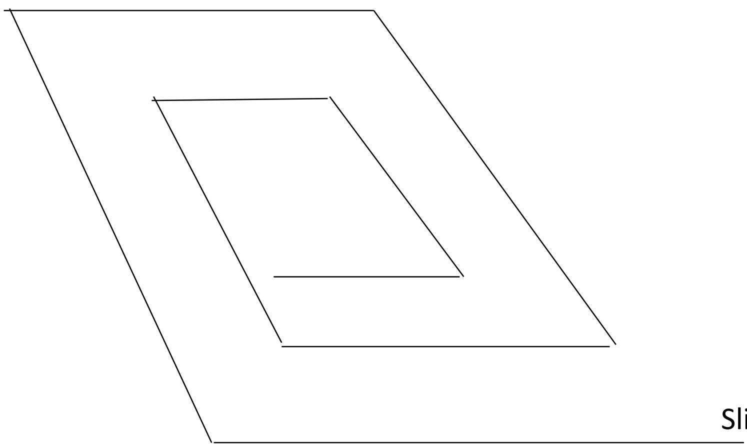
Pri izbirnem predmetu Matematične delavnice smo se pogovarjali tudi o spiralah. Gre za krivulje, ki izhajajo ali se iztekajo v eno točko. V raziskovalni nalogi me je zanimalo ali lahko izračunamo dolžino take spirale. Ugotovil sem, da z osnovnošolskim znanjem dolžin takih pravih spiral ne znam izračunati, zato sem spirale nekoliko poenostavil. V raziskovalni nalogi prikažem nekaj takih »poenostavljenih« spiral, za katere sem izračunal dolžino posameznih vej in dolžino spirale do izbranega števila vej spirale. Pri delu sem spoznal tudi »spiralo mirabilis«, za katero je osnova Fibonaccijevo zaporedje števil.

2. UVOD

Spirala (slika 1) je v matematiki krivulja, ki se po nekem pravilu približuje ali oddaljuje od izbrane točke. Približevanje ali oddaljevanje je odvisno od lege opazovalca. Z osnovnošolskim znanjem ne moremo o spiralah, v katerih so posamezne veje deli krivulj, kaj veliko povedati. Zato se bomo pri prikazu omejili na spirale, ki so v bistvu lomljenke, sestavljene iz daljic po nekem pravilu (slika 2). V raziskovalni nalogi raziskujem lastnosti in dolžino nekaterih izbranih lomljenk, ki pa jih bom v nadaljevanju imenoval kar spirale. Za računanje dolžine bomo morali uporabiti tudi Pitagorov izrek.



Slika 1

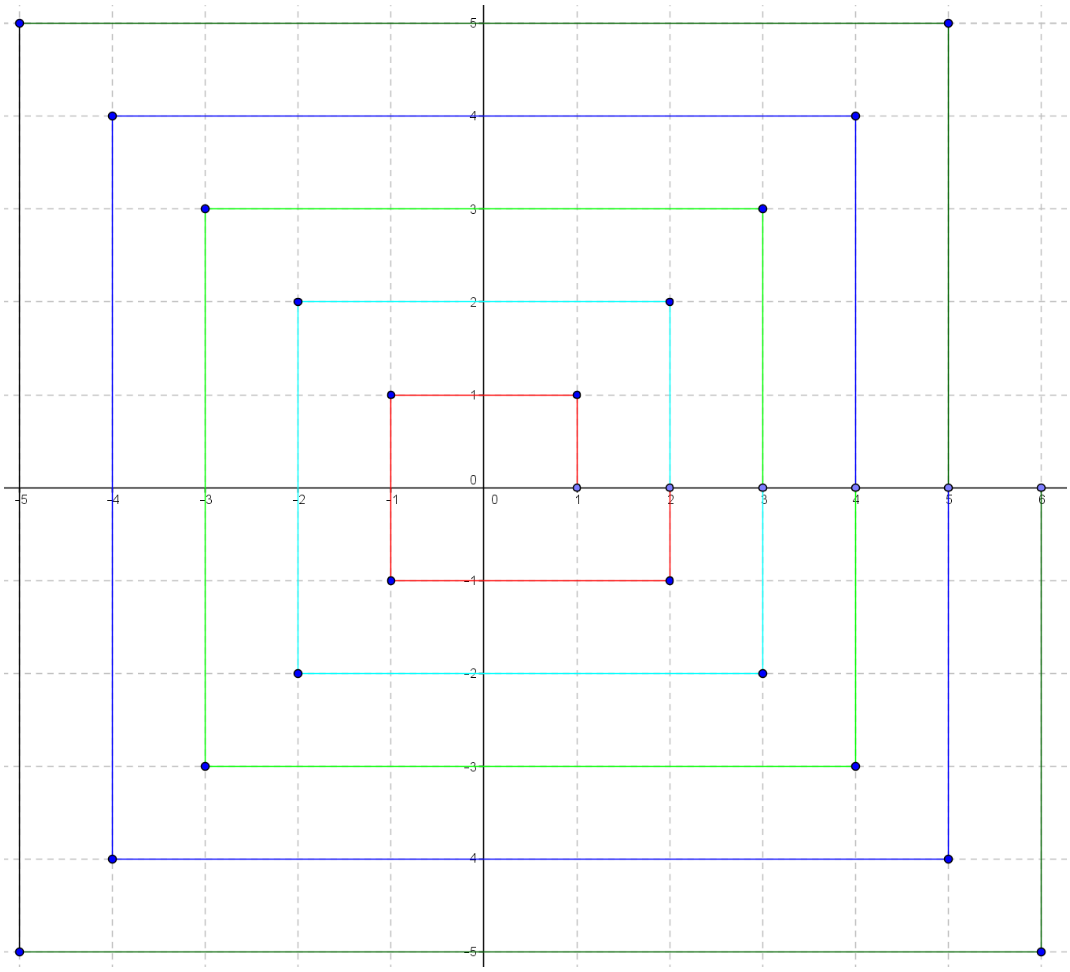


Slika 2

Poglejmo v nadaljevanju nekaj primerov spiral in njihovih dolžin.

3. SPIRALA 1

Poglejmo prvi primer. Za prikazano spiralo (slika 3) je značilno, da sta sosednji daljici v spirali vedno lomljeni pod pravim kotom. Zaradi lažjega opazovanja dolžin posameznih daljic, je spirala prikazana v koordinatnem sistemu. Spiralo lahko razdelimo na veje. Vsaka veja je iz enakega števila daljic, kjer pa imajo daljice lahko različne dolžine. Ena veja je enaka enemu popolnemu zasuku spirale. Veje so vedno sestavljene iz petih daljic, razlikujejo pa se po njihovi dolžini, saj so daljice vedno daljše glede na vejo spirale. Zaradi tega pride tudi do večanja dolžin posameznih vej, saj se oddaljujemo od izbrane začetne točke spirale, ki je v našem primeru (1, 0). Pri spirali s stranicami, lomljenimi pod pravim kotom, lahko izračunamo dolžino posameznih vej ter vsoto dolžin, ki je skupna dolžina spirale do neke izbrane veje.



Slika 3

Zapišimo dolžine vej za izbrani primer:

- Prva veja je dolga 1 + 2 + 2 + 3 + 1 = 9 enot.
- Druga veja je dolga 2 + 4 + 4 + 5 + 2 = 17 enot.

- Tretja veja je dolga 3 + 6 + 6 + 7 + 3 = 25 enot.
- Četrta veja je dolga 4 + 8 + 8 + 9 + 4 = 33 enot.

Postopek se seveda nadaljuje za vsako vejo po enakem pravilu. Tako smo prišli do obrazca za računanje dolžine neke veje. Najprej določimo število *n,* torej katero vejo gledamo, nato pa dolžino veje izračunamo po obrazcu

$$n + 2n + 2n + (2n + 1) + n = 8n+1.$$

Če pa želimo izračunati dolžino celotnega odseka spirale (več zaporednih vej), seštejemo posamezne dolžine vej.

Ena veja $8 \cdot 1 + 1 = 9$ enot.

Dve veji $(8 \cdot 1 + 1) + (8 \cdot 2 + 1) = 26$ enot.

Tri veje $(8 \cdot 1 + 1) + (8 \cdot 2 + 1) + (8 \cdot 3 + 1) = 51$ enot.

Za poljubno število vej spirale (*k* vej) zapišemo vsoto

$(8 \cdot 1 + 1) + (8 \cdot 2 + 1) + (8 \cdot 3 + 1) + \ldots + (8 \cdot k + 1)$. Ko vsoto preoblikujemo, zapišemo

$8 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1)$.

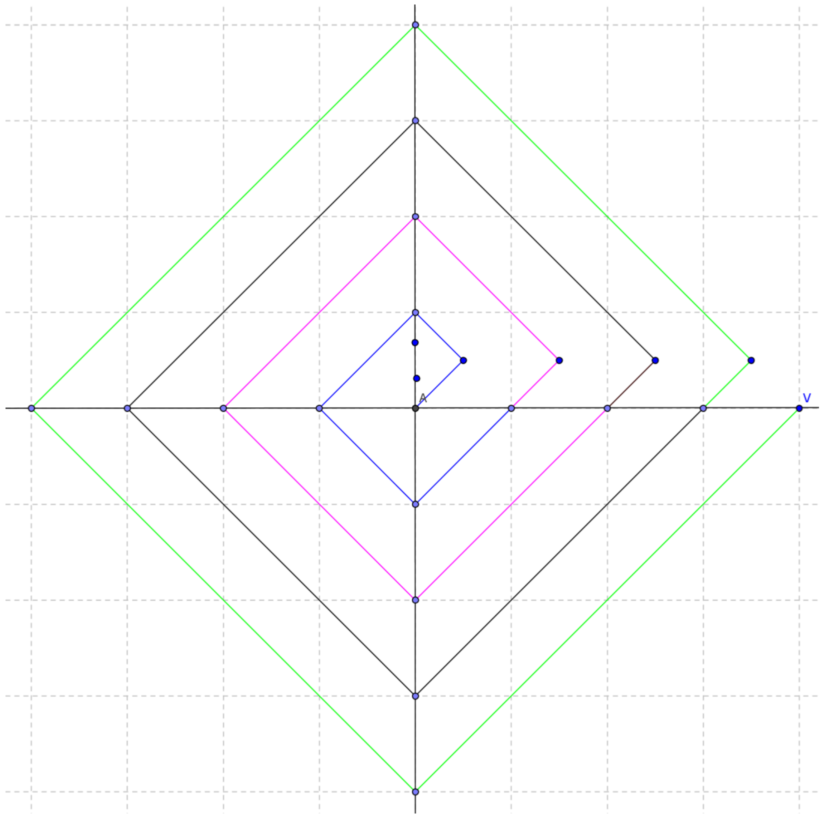
Vsoto *k* zaporednih naravnih števil lahko izračunamo s formulo $\frac{k(k+1)}{2}$.

Dolžino spirale za poljubno število *k* vej izračunamo s formulo

$$8 \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2}\right) + k = 4k(k+1) + k = 4k^2 + 5k.$$

4. SPIRALA 2

Poglejmo naslednji primer (slika 4), imenujmo to spiralo spirala 2. Tudi za to spiralo je značilno, da sta sosednji daljici lomljeni pod pravim kotom. Zaradi večje preglednosti je narisana v koordinatni mreži. Prav tako kot prvo, lahko tudi to spiralo razdelimo na dele, imenovane veje. Vsak veja je sestavljena iz enakega števila različno dolgih daljic. Za veje je prav tako značilno, da so vedno sestavljene iz petih daljic. Dolžine posameznih vej se povečujejo, ko se oddaljujemo od začetne (izhodiščne) točke spirale. Ena veja pa pomeni dolžino enega popolnega obrata v spirali. Za to spiralo je za razliko od prve značilno, da njene daljice ležijo na koordinatni osi (x, y) pod kotom 45°. Dolžine posameznih vej in dolžine spiral lahko v tem primeru tudi računamo. Dolžine posameznih daljic izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka.



Slika 5

Do postopka za računanje dolžin vej sem prišel tako, da sem najprej seštel dolžine posameznih daljic v eni veji.

- Dolžina prve veje $\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ enot.
- Dolžina druge veje je $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ enot.
- Dolžina tretje veje $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$ enot.

Opazimo, da se vsaka veja začne z dolžino daljice $\sqrt{2}$ enot, nadaljuje se z dolžino daljice $(2n-1)\sqrt{2}$ enot, ter tremi enakimi daljicami z dolžino $2n\sqrt{2}$ enot, kjer je n zaporedno število veje. Tako lahko zapišemo formulo za dolžino n-te posamezne veje te spirale:

$$\sqrt{2} + (2n-1)\sqrt{2} + 3 \cdot 2n\sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{2} + 2n\sqrt{2} - \sqrt{2} + 6n\sqrt{2} =$$

$$= 8n\sqrt{2}$$

Zapišimo še formulo za dolžino več zaporednih vej spirale od prve veje dalje. Izračunamo vsote dolžin za posamezno število vej.

- Dolžina prve veje je $8\sqrt{2}$ enot.
- Seštevek dolžin prve in druge veje je $8\sqrt{2} + 16\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$ enot.
- Seštevek dolžin prve, druge in tretje veje je $8\sqrt{2} + 16\sqrt{2} + 24\sqrt{2} = 48\sqrt{2}$ enot.

Če želimo sešteti dolžine *k* vej te spirale, zapišemo vsoto:

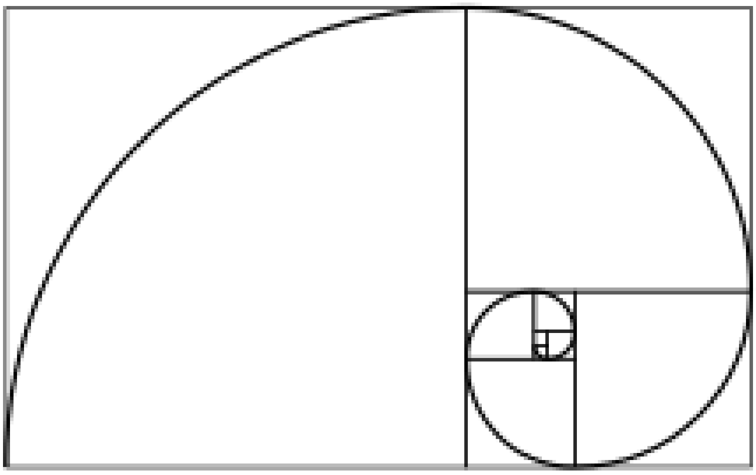
$8\sqrt{2} + 16\sqrt{2} + 24\sqrt{2} + \cdots + k \cdot 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + k).$

V oklepaju je zapisana vsota prvih *k* naravnih števil, ki jo lahko zapišemo tudi kot $\frac{k(k+1)}{2}$. Tako je dolžina za *k* – vej spiral enaka

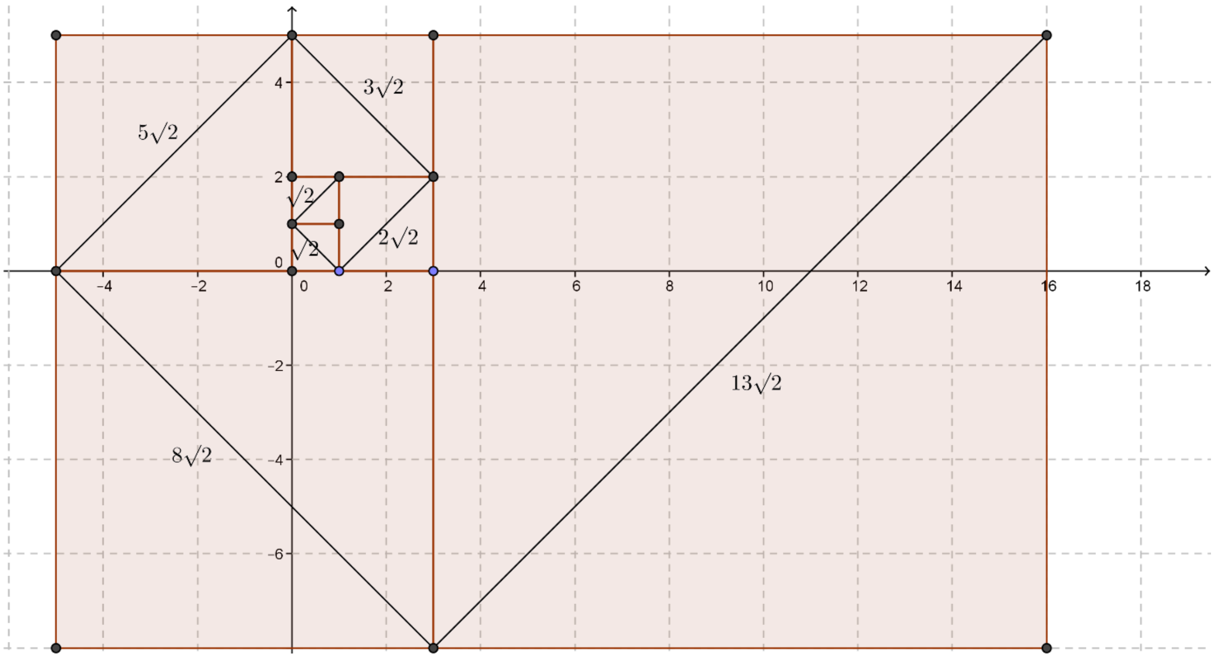
$$\frac{k(k+1) \cdot 8\sqrt{2}}{2} = k(k+1) \cdot 4\sqrt{2}.$$

5. SPIRALA 3

Predstavimo lastnosti spirale, ki je posebna oblika spirale Mirabilis (slika 6). Izhodišče je Fibonaccijevo zaporedje števil 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 … . Vsak naslednji člen zaporedja je vsota predhodnih dveh členov. Zaporedje pa se prične s členoma 1, 1. Členi zaporedja naj bodo dolžine stranic kvadratov in kvadrate načrtujemo enega ob drugem (slika 7) – vsota dolžin stranic predhodnih kvadratov je dolžina stranice novega kvadrata. V vsak kvadrat načrtamo eno diagonalo. Eno krajišče diagonale predhodnega kvadrata je krajišče diagonale naslednjega kvadrata. Nastane lomljenka. Glede na zastavljeno izhodišče, je tudi to spirala.



Slika 6



Slika 7

V spirali sta dolžini prvih dveh diagonal enaki $\sqrt{2}$ enot, saj sta diagonali skladnih kvadratov z dolžino stranice 1. V tem primeru spirale ne bom razdelil na posamezne veje, ampak zapisal samo dolžine daljic: $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 13\sqrt{2}, 21\sqrt{2}, \ldots$.

Dolžina spirale za posamezne dolžine daljic.

- Ena daljica $\sqrt{2}$ enot.
- Dve daljici $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ enot.
- Tri daljice $\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ enot.
- Štiri daljice $\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ enot.
- Pet daljic $\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ enot.

Nadaljujemo na enak način. Za poljubno *k*-to daljico v spirali zapišemo vsoto

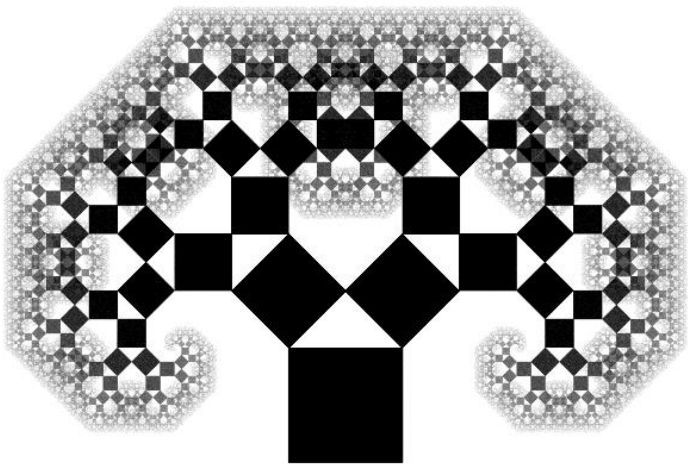
$\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \cdots + f_k\sqrt{2} = (1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + f_k) \cdot \sqrt{2}$ enot. Kjer je f_k *k*-ti člen Fibonaccijevega zaporedja. Izračunati bi morali vse člene Fibonaccijevega zaporedja vključno do *k*-tega člena, jih sešteti in vsoto množiti s $\sqrt{2}$.

Izračun poljubnega člena Fibonaccijevega zaporedja ni preprost. Formula za izračun člena je

$f(k) = \frac{\emptyset^k}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\emptyset)^k}{\sqrt{5}}$, kjer je število $\emptyset$ zlato razmerje $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033 \dots$. Število je iracionalno. Dokaj natančno lahko izračunamo člene pri manjšem *k*, za velike *k* pa uporabljamo računalniške programe.

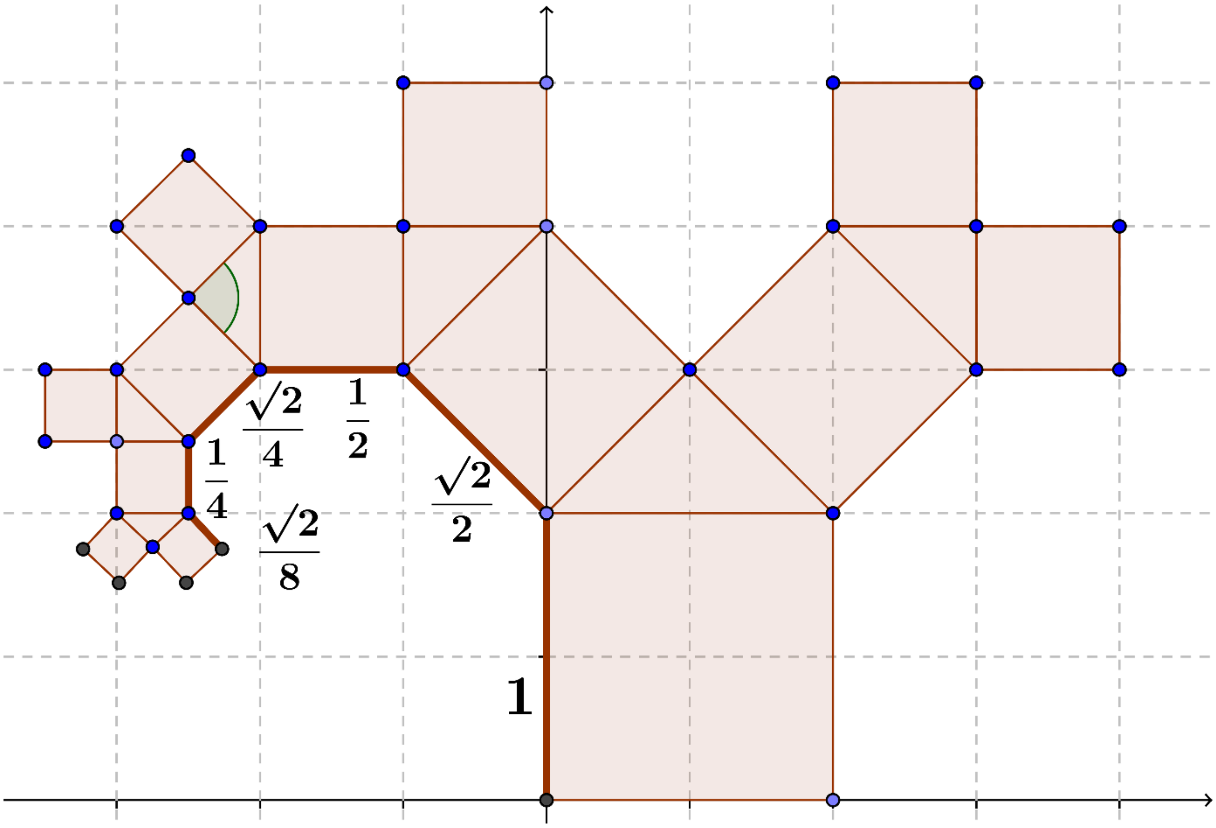
6. PITAGOREJSKO DREVO

Poglejmo še en primer, kjer lahko opazujemo nastanek spirale, pravzaprav lomljenke. Na sliki 8 je Pitagorejsko drevo. Drevo nastane tako, da nad kvadrat z dolžino stranice 1 načrtamo enakokraki pravokotni trikotnik. Nad krakoma tega trikotnik kvadrat itd.



Slika 8

Kje pravzaprav lahko opazujemo lomljenko v obliki spirale (slika 9)? Močneje poudarimo daljice, ki oblikujejo lomljenko v obliki spirale. Prva daljica je stranica kvadrata z dolžino stranice 1. Nad stranico kvadrata načrtamo enakokraki trikotnik s hipotenuzo 1 in dolžino katet $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kateta je stranica novega kvadrata in hkrati naslednja daljica v »spirali«. Če tako nadaljujemo pridemo do lika, ki spominja na drevo. Močneje poudarjene stranice kvadratov »drevesa« pa so spirala, ki jo predstavljam.



Slika 9

Dolžina prve daljice je 1 enota.

Dolžina druge daljice je $\frac{\sqrt{2}}{2}$ enote.

Dolžina tretje daljice je $\frac{1}{2}$ enote.

Dolžina četrte daljice je $\frac{\sqrt{2}}{4}$ enote.

Dolžina pete daljice je $\frac{1}{4}$ enote.

Dolžina šeste daljice je $\frac{\sqrt{2}}{8}$ enote.

Zaporedje daljic se nadaljuje v neskončnost. Z opazovanjem dolžin daljic v zaporedju daljic opazimo, da dolžino poljubne *n*-te daljice v zaporedju daljic izračunamo s formulo

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}.$$

Da izračunamo dolžino spirale do neke izbrane daljice, opazujmo vsote dolžin daljic:

Za k = 1, je dolžina 1 enota.

Za k = 2, je dolžina $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ enote.

Za k = 3, je dolžina $1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$ enote.

Za k = 4, je dolžina $1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}$ enote.

Za k = 5, je dolžina $1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}$ enote.

Če tako nadaljujemo, opazimo, da je za vsak sodi k sodo število členov, zadnji člen je vedno ulomek s $\sqrt{2}$ v števcu. Ko je k liho število je zadnji člen ulomek z enakim imenovalcem kot ga ima predhodni ulomek s $\sqrt{2}$ v števcu. Imenovalci ulomkov so potence z osnovo 2. Poglejmo, kako se spreminja stopnja potence z osnovo 2 pri različni vrednosti k:

Za k =2 in 3 je imenovalec zadnjih dveh ulomkov 2^1.

Za k = 4 in 5 je imenovalec zadnjih dveh ulomkov 2^2.

Za k = 6 in 7 je imenovalec zadnjih dveh ulomkov 2^3.

Ker gre za zaporedje števil sklepamo, da je npr. za k = 10 in 11 imenovalec zadnjih dveh ulomkov 2^5. Stopnja potence z osnovo 2 je polovica sode vrednosti števila k.

Če je torej k sodo število, zapišemo skupno dolžino spirale:

$$1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}}+\frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{k}{2}}}.$$

Če je k liho število pa zapišemo skupno dolžino spirale.

$$1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}-1}}+\frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{k-1}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}}.$$

7. ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi sem želel spoznati ali lahko z mojim znanjem izračunam dolžino lomljene črte (lomljenke), ki ima nekatere lastnosti simetrale. Naloge sem se lotil sistematično s pomočjo računalniškega programa za načrtovanje (Geogebra).

Izračunal sem dolžino posameznih daljic v štirih predstavljenih spiralah in zapisal dolžino poljubne daljice v zaporedju daljic lomljenke (spirale). Za dve enostavnejši spirali sem zapisal tudi dolžino spirale do izbrane veje (vsota dolžin zaporednih daljic).

Menim, da sem se pri raziskavi dolžin veliko naučil, hkrati pa na nov način uporabil matematično znanje. Z izdelavo raziskovalne naloge pa sem poskušal biti družbeno odgovoren, saj dajem možnost vsem zainteresiranim, da moje ugotovitve preberejo, se morda kaj novega naučijo in se celo navdušijo za uporabo matematike.

8. VIRI

(1) https://sl.wikipedia.org/wiki/Spirala#mediaviewer/File:Archimedean_spiral.png, 26.1. 2015

(2) https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/93/Fibonacci_spiral_34.svg/220px-Fibonacci_spiral_34.svg.png, 26.1.2015

(4) //fc02.deviantart.net/fs70/i/2010/065/f/0/Pythagoras_trees_by_IDeviant.jpg, 28.1.2015

(3) Mihaela Kosič, Fibonaccijevo zaporedje, seminarska naloga; Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana