»**Mladi za napredek Maribora**«

31. srečanje

PSEVDARIJE- matematične zmote in napake

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

Avtor: VALENTINA GERĠOVNIK

Mentor: RENATA HVALA

Ġola: PRVA GIMNAZIJA MARIBOR

Februar, 2014

»Mladi za napredek Maribora«

31. srečanje

PSEVDARIJE- matematične zmote in napake

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

PROSTOR ZA NALEPKO

Februar, 2014

Kazalo

POVZETEK

Marsikje lahko zasledimo matematične izračune, pri katerih se nam na prvi pogled zdi, da so postopki pravilni, rezultati pa so popolnoma nesmiselni. Taki primeri se pojavljajo v različnih okoljih kot zanimivosti in zabava, lahko pa so tudi opozorila na možne napake pri računanju, na katere moramo biti pozorni, npr. deljenje s številom 0.

Take matematične zmote in napake, ki se pojavljajo na različnih področjih matematike, se imenujejo psevdarije. Z njimi sem se ukvarjala v raziskovalni nalogi. Psevdarije so različnih tipov in zadevajo najrazličnejša področja v matematiki.

Moj cilj je bil opozoriti na napake pri nekaterih psevdarijah in pri drugih ugotoviti, zakaj so rezultati kljub napačnim postopkom pravilni. Ob nastajanju raziskovalne naloge sem se veliko naučila in menim, da bodo pridobljena znanja uporabna pri reševanju mnogih matematičnih problemov.

UVOD

Psevdarije (lat. pseudaria=zmota, napaka) so matematični teksti v katerih se zavestno pojavljajo napake. Najdemo jih na različnih področjih matematike. V tem uvodu jih bom le na splošno predstavila, potem pa jih bomo spoznavali sproti skozi nalogo.

Namen raziskovalne naloge

Za nalogo sem se odločila, ker me matematika zelo zanima in sem želela dopolniti svoje znanje s temami, ki jih pri pouku ne obravnavamo. Z matematičnimi zmotami sem se srečala že večkrat na spletu, kjer so bile predstavljene kot zanimivost, najpogostejša napaka pa je bila deljenje z 0. Ob pomoči mentorice sem se srečala še z veliko drugačnimi zmotami in se na podlagi tega odločila, da bo to tudi tema moje raziskovalne naloge. Z njo sem želela opozoriti na zmote, ki se lahko pojavijo že pri zelo enostavnih računih. Mislim, da bi naloga lahko pripomogla k boljšemu razumevanju možnih napak in preprečitvi ponovnega pojavljanja le-teh. Morda bi bilo na nekatere izmed teh zmot smiselno opozoriti tudi pri rednem pouku.

Nekaj o psevdarijah

Ločimo dva tipa psevdarij. Psevdarije prvega tipa so takšne, pri katerih je napaka skrita med množico drugih korakov in pripelje do absurdnega sklepa. Pri psevdarijah drugega tipa je napaka očitna, a je rezultat kljub temu pravilen. V nalogi so zbrane večinoma psevdarije prvega tipa, nekaj je tudi tistih drugega tipa. Pri psevdarijah prvega tipa je odkrita in razložena napaka, psevdarije drugega tipa pa so opremljene s pojasnilom, zakaj je rezultat vseeno pravilen in v katerih primerih se to zgodi.

Pri teh tekstih ne gre za preprosto napako v postopku, ki privede do napačnega rezultata. Bistvo psevdarije je, da napačen korak na kar se da prebrisan način prikrijemo in s postopkom, ki zgleda pravilen, bralca skušamo prepričati v pravilnost absurdnega sklepa.

Tovrstna besedila so matematične zanimivosti, ki služijo zabavi, lahko pa imajo tudi vzgojno vlogo, saj opozarjajo na potrebno previdnost pri računanju, kjer ima lahko vsak droben spodrsljaj absurdne posledice.

Znano delo na tem področju je Evklidova knjiga Pseudaria, ki je vsebovala predvsem zmote na področju geometrije, a je žal izgubljena. Njen namen je bil opozoriti začetnike v geometriji na napake, ki bi lahko pripeljale do napačnih sklepov.

Način dela

Moje delo je potekalo tako, da sem najprej zbrala psevdarije iz različnih virov, predvsem iz knjige [1], iz revije Mathematical Gazette [2-6] in iz interneta [7,8]. Po pregledu vseh sem izbrala zmote iz različnih področij z različnimi napakami. Pri mnogih je bil postopek opisan v nekaj kratkih korakih, tam sem najprej dodala vse vmesne korake. Pri psevdarijah prvega tipa sem nato natančno pregledala postopek in skušala ugotoviti, na katerem koraku se pojavi napaka. Pri psevdarijah drugega tipa pa sem raziskovala in ugotavljala, zakaj je rezultat pravilen in v katerih primerih do tega pride.

PSEVDARIJE I. TIPA

Trigonometrične enačbe

PSEVDARIJA 1: Trigonometrična enačba s pomanjkljivo rešitvijo

Rešujemo enačbo

$$\sin x - \cos x = 1.$$

Obe funkciji lahko izrazimo s tangensom polovičnega kota:

$$\sin x = \sin(2\cdot\frac{x}{2}) = \frac{\sin(2\cdot\frac{x}{2})}{1} = \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}},$$

Pri deljenju s $\cos^2\frac{x}{2}$ dobimo:

$$\frac{2\cdot\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}$$

Podobno pretvorimo tudi funkcijo kosinus:

$$\cos x = \cos(2\cdot\frac{x}{2}) = \frac{\cos(2\cdot\frac{x}{2})}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$$

Pri deljenju s $\cos^2\frac{x}{2}$ dobimo:

$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}$$

Zdaj ta izraza vstavimo v začetno enačbo in uporabimo $t = \tan\frac{x}{2}$:

$$\frac{2\cdot\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} - \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = 1$$

$$\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1-t^2}{t^2+1}=1$$

Na obeh straneh pomnožimo s t^2+1, da se znebimo ulomkov:

$$2t-(1-t^2)=1+t^2$$

Iz tega dobimo:

$$2t-1+t^2-1-t^2=0,$$

$$2t-2=0$$

$$2t=2$$

$$t=1.$$

Torej:

$$\tan\frac{x}{2}=1$$

Rešitve te enačbe so:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Vendar ta rešitev ne vsebuje očitne rešitve prvotne enačbe sin x - cos x = 1, ki je x=π.

Rešitev x=π se ne pojavi, ker bi v tem primeru računali $\tan\frac{\pi}{2}$, kar pa ni definirano $(\tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0}=\infty)$. Prehod na kotno funkcijo tangens, za katero obstajajo koti, pri katerih funkcija ni definirana, je razlog, da izgubljamo rešitve. Prav tako smo med reševanjem delili s $\cos^2\frac{x}{2}$. Če bi se med rešitvami pojavila rešitev x=π, bi to pomenilo deljenje z 0.

PSEVDARIJA 2: 4=0

Vemo:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Korenimo obe strani:

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

in prištejemo 1:

$$1+\cos x = 1+\sqrt{1-\sin^2 x}\ .$$

Kvadriramo obe strani:

$$(1+\cos x)^2 = (1+\sqrt{1-\sin^2 x})^2\ .$$

V primeru, ko je x=π dobimo:

$$(1-1)^2 = (1+\sqrt{1-0})^2$$

$$0 = (1+1)^2$$

$$0 = 4$$

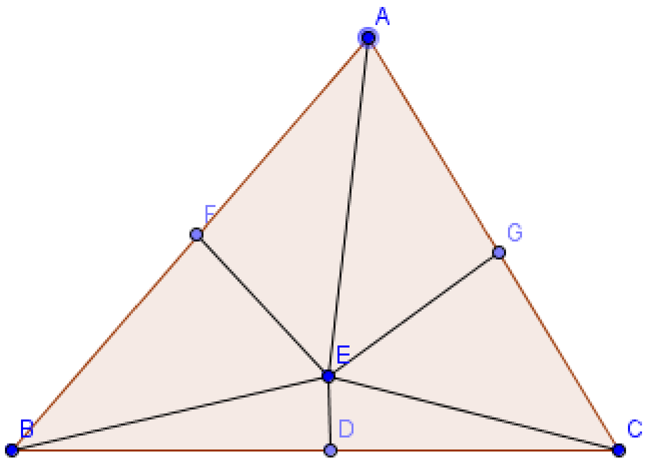
Težava se pojavi že pri prvem koraku, torej pri korenjenju na obeh straneh. Od tega koraka dalje je potrebno upoštevati enakost $\sqrt{x^2} = |x|$, torej je vrednost korena vedno pozitivno število. V enakosti $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ imamo na desni strani koren, ki bi moralo biti vedno pozitivno število, zato je potrebno pisati na levi strani $|\cos x|$. V našem primeru, ko x=π, je $\cos\pi = -1$ in $|\cos\pi| = 1$, absolutna vrednost pa v računu ni upoštevana, zato je rezultat napačen.

Zmote iz geometrije

PSEVDARIJA 3: Vsak trikotnik je enakokrak

Imejmo trikotnik *ABC*. Dokazati moramo, da nujno velja *AB = AC*.

Naj simetrala kota pri oglišču *A* seka s simetralo daljice *BC* v točki *E*. Naj bo *D* razpolovišče daljice *BC*, točki *F* in *G* sta nožišči pravokotnic iz točke *E* na stranici *AB* in *AC*. Narišemo še daljice *ED*, *EF* in *EG* (slika 1).



Slika 1: Skica k psevdariji 3

Oglejmo so trikotnika *EBD* in *ECD*. Ujemata se v dveh stranicah, saj je stranica *ED* skupna in $|BD|=|CD|$, saj je *D* razpolovišče daljice *AB*, ujemata pa se tudi v kotu med tema stranicama (pravi kot). Po skladnostnem načelu SKS sta trikotnika skladna, torej velja $|EB|=|EC|$.

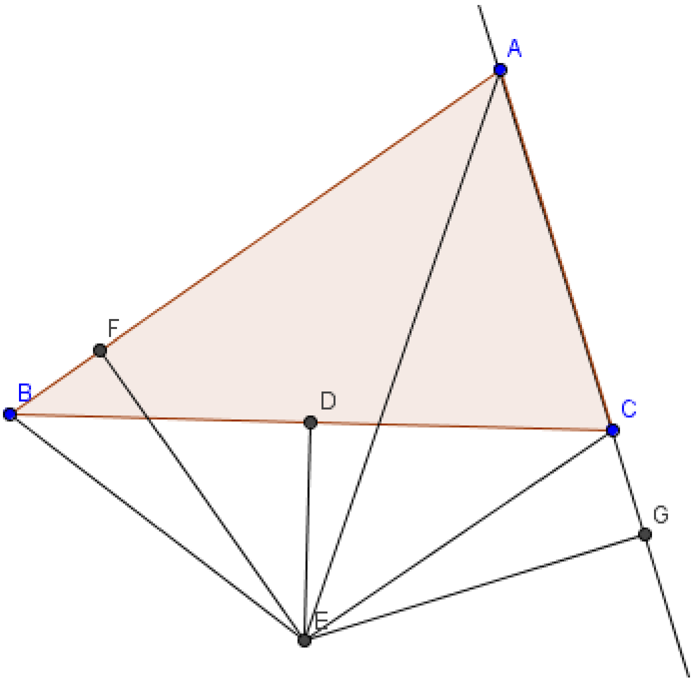
Skladna sta tudi trikotnika *AFE* in *AGE*. Ujemata se v stranici *AE*, ki je skupna obema, ter v dveh kotih: kota *FAE* in *GAE* sta enaka zaradi simetrale kota, kota *AFE* in *AGE* pa sta prava kota. Po skladnostnem načelu KSK sta trikotnika skladna, iz česar sledi, da $|AF|=|AG|$in $|EF|=|EG|$.

Skladnost ugotovimo tudi pri trikotnikih *EBF* in *ECG*. Trikotnika se ujemata v kotih *EFB* in *EGC*, ki sta prava kota. Dokazali smo tudi, da sta enaki dolžini stranic *EB* in *EC* ter *EF* in *EG*. Skladnost sledi iz skladnostnega izreka SSK, kjer velja, da sta trikotnika skladna, če se ujemata v dveh stranicah in kotu nasproti daljše. Od tod sledi $|FB|=|CG|$.

Na podlagi izpeljav dobimo: $|AB|=|AF|+|FB|=|AG|+|GC|=|AC|$.

Dokazali smo, da je vsak trikotnik enakokrak.

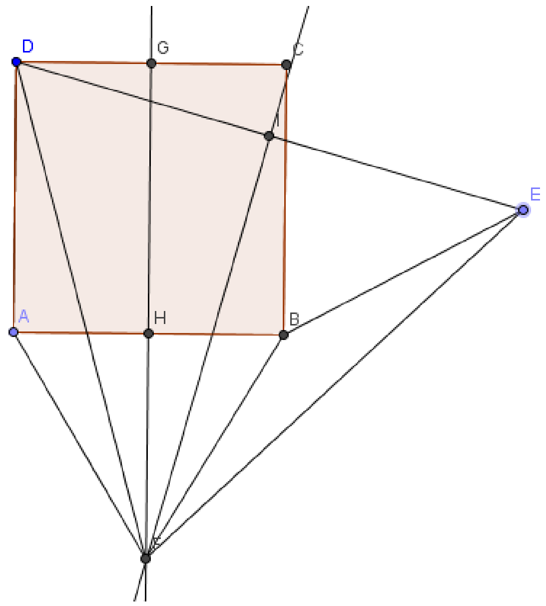
Zmota pri tem postopku je v zavajajoči skici. Čeprav je iz skice jasno vidno, da $|AC|$ ni enako $|AB|$, pa ni jasno vidno, da koti *BFE, AFE, CGE* in *AGE* niso pravi koti. Kljub temu, da sta točki *F* in *G* razpolovišči stranic *AB* in *AC*, pa točke *F* in *E* ter *G* in *E* ne ležijo na simetralah teh dveh daljic, saj smo točki *F* in *G* le povezali s točko *E*, pri drugačnem trikotniku pa bi kot lahko bil popolnoma drugačen. Seveda vse trditve o enakosti daljic in kotov veljajo, če bi trikotnik zares bil enakokrak, ne veljajo pa v poljubnem trikotniku. Slika 2 prikazuje pravo skico. Opazimo, da točka *E* leži izven trikotnika. Veljata enakosti $|AF|=|AG|$ in $|BF|=|CG|$, za stranico *AB* pa velja: $|AB|=|AF|+|BF|$, vendar je obrazec za stranico *AC* drugačen: $|AC|=|AG|-|CG|$.



Slika 2: Pravilna skica k psevdariji 3

PSEVDARIJA 4: Vsak kot je pravi kot

Imamo kvadrat *ABCD* in daljico *BE* navzven od kvadrata, tako, da je kot *ABE* topi kot (na sliki 2) in je daljica *BE* enako dolga kot stranica kvadrata. Dokazali bomo, da je kot *ABE* pravi kot.



Slika 3: Skica k psevdariji 4 (primer III)

Naj bo daljica *GH* zveznica med razpoloviščema stranic *AB* in *CD* in naj simetrala daljice *DE* seka nosilko daljice *GH* v točki *F*, daljico *DE* pa v točki *I*. Narišimo še daljici *FE* in *DF*.

Oglejmo si trikotnika *FID* in *FIE*. Stranice *FI* je skupna obema, enaki sta tudi dolžini daljic *IE* in *ID*, ker je *I* razpolovišče daljice *ED*. Kota *FID* in *FIE* sta zaradi simetrale daljice prava kota. Trikotnika sta po načelu skladnosti SKS skladna, torej sta enako dolgi tudi daljici *FD* in *FE*.

Podobno ugotovimo skladnost tudi pri trikotnikih *FHA* in *FHB*. Stranica *FH* je skupna obema, točka *H* je razpolovišče stranice *AB*, torej velja $|AH|=|BH|$, kota *FHA* in *FHB* pa sta prava kota zaradi simetrale stranice. Po načelu skladnosti SKS sta trikotnika skladna, iz česar sledi $|FA|=|FB|$ in $\angle FAB=\angle FBA$.

Pri obravnavi trikotnikov *FAD* in *FBE*, opazimo, da se ujemata v stranicah *AD* in *BE*, saj je *BE* enake dolžine kot stranica kvadrata. Dokazali smo da sta enako dolgi tudi stranici *AF* in *BF* ter stranici *FD* in *FE*. Po načelu skladnosti SSS sta trikotnika skladna, torej sta skladna tudi kota: $\angle FAD=\angle FBE$.

Zdaj je potrebno upoštevati tri možnosti glede lege presečišča *F*. To lahko leži:

I. Med točkama *G* in *H*:

$\angle ABE = \angle FBE + \angle FBA = \angle FAD + \angle FAB$ = pravi kot

II. V točki *H*:

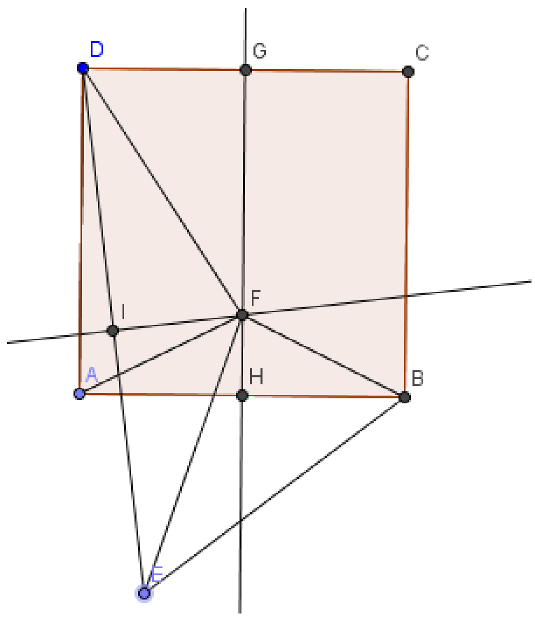
$\angle ABE = \angle FBE = \angle FAD = \angle BAD$ = pravi kot

III. Za točko *H*, na nosilki daljice *GH*:

$\angle ABE = \angle FBE - \angle FBA = \angle FAD - \angle FAB$ = pravi kot

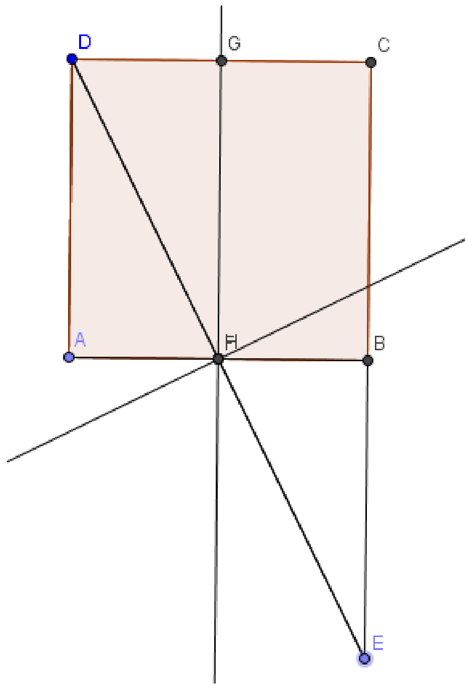
V vseh treh primerih je kot *ABE* pravi kot. Tako smo dokazali, da je vsak topi kot pravi. Od tod pa sledi tudi, da je vsak ostri kot pravi. Če je namreč nek kot oster, je njegov sokot top. Po pravkar dokazanem od tod sledi, da je sokot pravi kot. Potem pa je tudi začetni kot pravi.

Pri tem primeru gre spet za zavajajočo skico. V I. primeru je točka *E* pod daljico *AB* (slika 3), torej je $\angle ABE = \angle FBE - \angle FBA$ in je zato ostri kot.



Slika 4: Skica k psevdariji 4 (primer I)

V II. primeru je sklep pravilen, če točka *F* sovpada s točko *H*, potem je kot pravi. Takrat z obema točkama sovpada tudi točka I(slika 4).



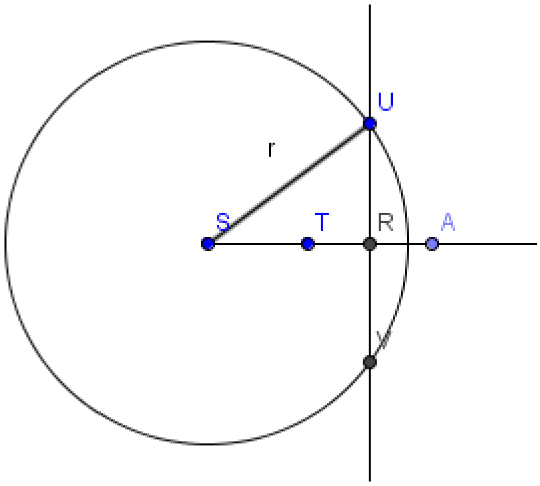
Slika 5: Skica k psevdariji 4 (primer II)

V III. primeru gre za to, da je kotu *FAD* enak kot *FBE* znotraj trikotnika *FBE*. Napaka je v izračunu, saj je z zapisom $\angle FBE$ mišljen v bistvu kot $360^\circ - \angle FBE$. Temu primeru ustreza skica na začetku (slika 2), kot *ABE* pa je topi.

PSEVDARIJA 5: Vsaka točka znotraj kroga leži na njegovi krožnici

Imamo krog s središčem S in polmerom r, in poljubno točko T znotraj kroga. Dokazati moramo, da T leži na krožnici.

Naj bo A točka na nosilki daljice ST, oddaljena od S več kot T, tako, da velja: $|ST|\cdot|SA|=r^2$. Simetrala daljice TA naj seka krožnico v točkah U in V, razpolovišče daljice TA pa označimo z R (slika 6).

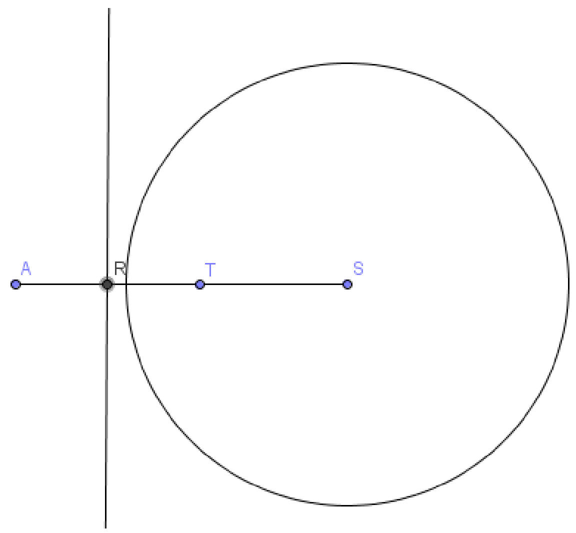


Slika 6: Skica k psevdariji 5

Iz skice vidimo: $|ST|=|SR|-|RT|$ in $|SA|=|SR|+|RA|$, ker je po konstrukciji $|RA|=|RT|$, dobimo: $|SA|=|SR|+|RT|$. Dobljene enakosti lahko vstavimo v enačbo $|ST|\cdot|SA|=r^2$ in dobimo: $|ST|\cdot|SA|=(|SR|-|RT|)(|SR|+|RT|)$ oziroma $|ST|\cdot|SA|=|SR|^2-|RT|^2$. Po Pitagorovem izreku velja: $|SR|^2=|SU|^2-|RU|^2$ in $|RT|^2=|TU|^2-|RU|^2$. Če to vstavimo v zgornjo enačbo, dobimo: $|ST|\cdot|SA|=(|SU|^2-|RU|^2)-(|TU|^2-|RU|^2)$ oziroma $|ST|\cdot|SA|=|SU|^2-|TU|^2$, za daljico SU pa ugotovimo: $|SU|^2=r^2=|ST|\cdot|SA|$. Če to vstavimo v prejšnjo enačbo dobimo: $|ST|\cdot|SA|=|ST|\cdot|SA|-|TU|^2$, torej mora veljati $|TU|=0$, kar pomeni, da točka T leži na krožnici.

Napaka je spet v zavajajoči skici. Iz skice je jasno vidno, da točka T ne leži na krožnici, vendar izračuni pokažejo prav to. Če si podrobneje ogledamo korak $|ST|\cdot|SA|=|SR|^2-|RT|^2$, oziroma $r^2= |SR|^2-|RT|^2$, je sicer računsko postopek do tega sklepa pravilen, vendar bi to moglo pomeniti, da bi v tem pravokotnem trikotniku SR bila hipotenuza, r in RT pa kateti.

Daljica *SR* bi torej morala biti daljša od *r*. Iz slike pa lahko dobimo drug Pitagorov izrek: $r^2=|SR|^2+|RU|^2$, kjer je jasno, da je *r* daljša od $|SR|$, zato je sklep $|ST|\cdot|SA|=|SR|^2-|RT|^2$ napačen. Slika spodaj prikazuje pravo sliko, ki bi spadala k tej nalogi. Opazimo, da simetrala daljice AT krožnice sploh ne seka. V dokazu smo torej delali s točkama *U* in *V,* ki dejansko ne obstajata.



Slika 7: Prava skica k psevdariji 5

Računanje z neznankami

PSEVDARIJA 6: 1=0

Enačbo premice *p* zapišemo v obliki:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Pri tem velja: (a,0) in (0,b) sta presečišči premice z obema osema.

Enačbo preoblikujemo:

$$bx+ay=ab$$

$$\frac{b}{y}+\frac{a}{x}=\frac{ab}{xy}$$

Vstavimo x=a:

$$\frac{b}{y}+1=\frac{b}{y}$$

Iz tega pa dobimo:

$$1=0$$

Napaka se pojavi v koraku, ko vstavimo $x=a$. Vemo, da velja, da je funkcijska vrednost v a enaka 0 (y=0), torej ulomek $\frac{b}{y}$ od tega koraka dalje ne obstaja.

PSEVDARIJA 7: 1=0

Predpostavimo:

$$a=b$$

Odštejemo b na obeh straneh:

$$a-b=b-b$$

Delimo z izrazom a-b:

$$\frac{a-b}{a-b}=\frac{b-b}{a-b}$$

Ker imamo na levo strani v števcu in imenovalcu isti števili, na desni pa v števcu odštejemo število od samega sebe, dobimo: 1=0.

Napaka se pojavi pri deljenju z izrazom *a-b*. Kljub temu, da sta oznaki različni, smo na samem začetku predpostavili *a=b*, torej deljenje z *a-b* pomeni deljenje z 0. Dobljeni ulomki ne obstajajo. Če bi ta korak preskočili, bi dobili enačbo *a-b=b-b* in z upoštevanjem začetne trditve *a=b* bi to pomenilo 0=0, kar pa je pravilen rezultat.

PSEVDARIJA 8: 4=5

Izberimo števila a=4, b=5 in c=1.

Torej velja:

$$c=b-a$$

Pomnožimo z b-a:

$$c(b-a)=(b-a)^2$$

Izračunamo kvadrat razlike in uporabimo distributivnostni zakon:

$$cb-ca=b^2-2ab+a^2$$

Odštejemo a^2:

$$cb-ca-a^2=b^2-2ab$$

Prištejemo ab:

$$ab+cb-ca-a^2=b^2-ab$$

Odštejemo cb:

$$ab-ca-a^2=b^2-cb-ab$$

Izpostavimo a oz. b:

$$a(b-c-a)=b(b-c-a)$$

Delimo z b-c-a in dobimo:

$$a=b$$

Torej:

$$4=5$$

Tudi tukaj se pojavi napaka pri deljenju z 0. Kljub temu, da poznamo vrednosti števil a, b, c in kljub temu, da so vsa števila različna od 0, moramo biti pozorni, saj smo delili z b-c-a = 5-1-4=0. Do podobnih rezultatov bi prišli pri računanju s katerimi koli tremi števili a, b in c, ki jih lahko kombiniramo tako, da je b-c-a= 0, npr: a=3, b=2, c=-1 ali a=-2, b=6, c=8 itd. Že prva vrstica nas opozori na to napako, torej napačne rezultate bodo dala števila, za katera velja c=b-a.

PSEVDARIJA 9:* $\sqrt{2}$ *=0

Imejmo izraz $y=\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}$, pri čemer so vsi koreni pozitivna števila.

Če izraz kvadriramo dobimo:

$$y^2=a+\sqrt{b}-2(\sqrt{a+\sqrt{b}})(\sqrt{a-\sqrt{b}})+a-\sqrt{b}$$

$$y^2=a+\sqrt{b}-2(\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})})+a-\sqrt{b}$$

$$y^2=a+\sqrt{b}-2\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{b}$$

$$y^2=2a-2\sqrt{a^2-b}$$

In končno:

$$y^2=2(a-\sqrt{a^2-b})$$

Recimo, da je $b=2a-1$, potem je

$$a^2-b=a^2-2a+1=(a-1)^2$$

in

$$y^2=2[a-\sqrt{(a-1)^2}]=2[a-(a-1)]=2$$

Podobno, če je $b=4(a-1)$, potem je

$$a^2-b=a^2-4a+4=(a-2)^2$$

in

$$y^2=2[a-\sqrt{(a-2)^2}]=2[a-(a-2)]=4.$$

Dejansko je y odvisen od a in b, zato bi lahko pisali $y(a,b)=\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}$. Zdaj za b vstavimo enkrat $2a$-1, drugič pa 4(a-1). V prvem primeru dobimo $y(a,2a-1)=\sqrt{2}$, saj je $y^2(a,2a-1)=2$, v drugem primeru pa $y(a,4(a-1))=2$, saj je $y^2(a,4(a-1))=4$.

Torej je $y(a, 2a-1) = \sqrt{y(a, 4(a-1))}$. (Tako na desni kot na levi imamo 2). Upoštevamo, kaj je dejansko *y*(*a,b*) in dobimo:

$$\sqrt{a+\sqrt{2a-1}} - \sqrt{a-\sqrt{2a-1}} = \sqrt{\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}} - \sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}}.$$

Vstavimo *a*=1 in dobimo $\sqrt{2} = 0$.

Napaka se pojavi v koraku, ko sklepamo, da je $\sqrt{(a-2)^2} = a-2$. Če v to enačbo vstavimo *a*=1, vidimo, da je rezultat napačen: 1=–1. Od tega koraka dalje je enačba napačna, zato je tudi končna rešitev napačna. Pri enačbi $\sqrt{(a-2)^2} = a-2$ namreč ni upoštevano pravilo $\sqrt{x^2} = |x|$. Koren je vedno pozitiven, tudi če število *x* ni. Pravilna enačba bi v tem primeru bila $\sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$.

PSEVDARIJA 10: $\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Najti želimo realni števili *a* in *b* tako, da bo veljalo: $\frac{a}{9}=1-\frac{2}{b}$ in $\frac{b}{9}=1-\frac{2}{a}$.

Če želimo, da sta izraza definirana, mora veljati:

$$a,b\neq 0$$

Če izrazimo eno od neznank dobimo:

$$a=9-\frac{18}{b} \text{ in } b=9-\frac{18}{a}$$

Izraza vstavimo v zgornji enačbi:

$$\frac{a}{9}=1-\frac{2}{9-\frac{18}{a}}$$

$$\frac{a}{9}=1-\frac{2}{\frac{9a-18}{a}}$$

$$\frac{a}{9}=1-\frac{2a}{9a-18}$$

$$\frac{a}{9}=\frac{9a-18-2a}{9a-18}$$

$$\frac{a}{9}=\frac{7a-18}{9a-18}$$

$$a=\frac{9(7a-18)}{9(a-2)}$$

$$a=\frac{7a-18}{a-2}$$

Postopek je enak pri *b*, kjer dobimo: $b=\frac{7b-18}{b-2}$. Iz tega dobimo kvadratno enačbo:

$$b(b-2)=7b-18$$

$$b^2-9b+18=0$$

Oziroma za *a*:

$$a^2-9a+18=0.$$

Ko rešimo obe kvadratni enačbi, opazimo, da dobimo kombinaciji rešitev *a*=3 in *b*=6, oziroma *a*=6 in *b*=3. Če vstavimo *a*=3 in *b*=6 (oziroma *a*=6 in *b*=3) v začetni enačbi pa dobimo: $\frac{3}{9}=1-\frac{2}{6}$, torej $\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ oziroma $\frac{6}{9}=1-\frac{2}{3}$, s čemer smo dokazali, da je $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Napaka se pojavi v sklepu, da morata *a* in *b* biti različna, kar pa ni nujno. Iz kvadratnih enačb dobimo rešitve *a*=3 in *a*=6 ter *b*=3 in *b*=6, torej imamo 4 možne kombinacije, ki jih lahko vstavimo v začetno enačbo. Pri kombinacijah *a*=3 in *b*=6 oziroma *a*=6 in *b*=3, se pri končni rešitvi pojavijo težave, kot v našem primeru. Pri kombinacijah *a*=3 in *b*=3 oziroma *a*=6 in *b*=6, se tovrstne težave ne pojavijo, saj je leva stran enaka desni. Napaka je torej v skriti predpostavki, da sta *a* in *b* različni števili.

PSEVDARIJA 11: π=3

Rešujemo enačbo:

$$2x = \pi + 3$$

Pomnožimo obe strani z izrazom (π–3):

$$2x(\pi - 3) = (\pi + 3)(\pi - 3)$$

$$2\pi x - 6x = \pi^2 - 9$$

$$9 - 6x = \pi^2 - 2\pi x$$

Prištejemo x^2:

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2\pi x + \pi^2$$

Vidimo, da sta izraza na obeh straneh popolna kvadrata:

$$(x-3)^2 = (x-\pi)^2$$

Torej:

$$x - 3 = x - \pi$$

$$\pi=3$$

Napaka se pojavi, ko preprosto sklepamo, da iz $(x-3)^2 = (x-\pi)^2$ sledi $x - 3 = x - \pi$. Pri enačbi x^2=y je potrebno upoštevati, da ima enačba dve rešitvi: y in –y. Če bi pri eni od kvadratnih enačb upoštevali minus, bi dobili pravilni rezultat- začetno enačbo $x = \frac{\pi + 3}{2}$ (npr. $-x + 3 = x - \pi$, $2x = \pi + 3$).

Druge psevdarije I. tipa

PSEVDARIJA 12: 1=2

Imejmo enačbo:

$$\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$$

Enačbo korenimo na obeh straneh:

$$\sqrt{\frac{-1}{1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}}$$

Zapišemo drugače:

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

To je:

$$\frac{i}{1}=\frac{1}{i}$$

Pomnožimo z $\frac{1}{2}$ in dobimo:

$$\frac{i}{2}=\frac{1}{2i}$$

Prištejemo $\frac{3}{2i}$ na obeh straneh:

$$\frac{i}{2}+\frac{3}{2i}=\frac{1}{2i}+\frac{3}{2i}$$

Pomnožimo z *i*:

$$i(\frac{i}{2}+\frac{3}{2i})=i(\frac{1}{2i}+\frac{3}{2i})$$

Uporabimo distributivnostni zakon:

$$\frac{i^2}{2} + \frac{3i}{2i} = \frac{i}{2i} + \frac{3i}{2i}$$

Imaginarne enote se okrajšajo, velja tudi i^2=-1:

$$\frac{-1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

Končno dobimo: 1=2.

Napaka se pojavi že v 2. in 3. koraku, saj negativna števila sicer imajo korenske vrednosti, vendar pri njih ne veljajo enaka pravila kot, če so pod korenom pozitivna števila. Pri pozitivnih številih na primer velja $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; a,b>0, pri negativnih številih pa ne moremo trditi enako, na primer: $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, vendar $\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = i \cdot i = -1$. Takšna napaka tudi privede do nesmiselnega rezultata na koncu.

PSEVDARIJA 13: Vsi ljudje so enako stari

Z metodo popolne indukcije želimo dokazati, da so vsi ljudje enako stari v vsaki skupini *n* ljudi.

1. Preverimo ali trditev velja za n=1. Pri skupini z enim samim človekom to seveda velja.
2. Predpostavimo, da trditev velja za *n=k* ljudi, pri čemer je *k* iz množice naravnih števil. Dokažimo, da trditev velja za *n=k+1* ljudi:

   Naj bo *A* množica *k+1* ljudi, *x* in *y* pa sta elementa množice *A*. Trditev bo veljala, če bosta *x* in *y* enako stara. Oglejmo si vse ljudi v množici *A*, razen *x*. Množica *A* brez elementa *x* ima *k* elementov, torej so po predpostavki vsi enako stari. Zdaj si oglejmo vse elemente množice *A*, brez *y*. Tudi množica *A* brez *y* ima *k* ljudi, ki so po predpostavki enako stari. Potem pa so vsi ljudje v skupini enako stari.

Napaka se pojavi pri prehodu z n= 1 na n=2, kjer sklepi iz 2. točke zgoraj ne veljajo. Če imamo par ljudi: *x* in *y* in enega od njiju izločimo, so v preostanku vsi enako stari, saj je v preostanku en sam človek. Vendar pa to še ne pomeni, da sta x in *y* enako stara.

PSEVDARIJA 14: Neskončne vrste

(a) 1=0.

Imamo vrsto:

$$S=1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots.$$

Če sestavimo pare:

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots.=0+0+0+\ldots.=0$$

Če sestavimo pare na drugačen način:

$$S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots.=1-0-0-0-\ldots.=1$$

Dokazali smo torej:

$$1=0$$

(b) –1 je pozitivno število

Imamo vrsto:

$$S=1+2+4+8+16+32+\ldots.$$

Vidimo, da je vsota S pozitivna. Če obe strani pomnožimo z 2, dobimo:

$$2S=2+4+16+32+\ldots.$$

Pri tej vsoti so vsi členi, razen prvega, enaki kot pri prvotni, torej:

$$2S=S-1$$

$$S=-1$$

Ampak na začetku vidimo, da je vsota S pozitivno število, torej je –1 pozitivno število.

(c) 0 je pozitivno število (večje od 0)

Imamo vrsti:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ...$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + ...$$

Drugo pomnožimo z 2:

$$2S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

Dobili smo vsoto prve in druge vrste:

$$2S_2 = S_1 + S_2$$

$$0 = S_1 - S_2$$

Vendar, če ti dve vrsti odštejemo:

$$S_1 - S_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{8}) + ...$$

Vidimo, da je razlika v vsakem oklepaju pozitivna, saj vedno od večjega odštevamo manjše število, torej je tudi vsota pozitivna. $S_1 – S_2$ je pozitivno število, torej je 0 pozitivno število (0 je večje od 0).

Pri prvi vrsti je težava v tem, da člene združujemo na različne načine. Kljub temu, da vrsta ni konvergentna in njena vsota sploh ne obstaja, pa niti pri konvergentnih vrstah ne smemo poljubno združevati členov. Vsota konvergentne vrste je limita zaporedja delnih vsot. Delne vsote pa seštevamo od prvega do n-tega števila. Če bi člene združevali in seštevali drugače, vsota ne bi bila nujno ista.

Pri ostalih treh vrstah je napaka podobna. Vemo, da je vrsto lahko izračunamo, ko je konvergentna, to se zgodi, ko je konvergentno njeno zaporedje delnih vsot. Pri vseh treh vrstah opazimo, da niso konvergentne. Ostale tri vrste pa gredo proti neskončnosti. Teh vrst, torej, sploh ne moremo izračunati.

Podrobneje si lahko ogledamo drugo vrsto:

$$S=1+2+4+8+16+32+....$$

Vrsta lahko postane konvergentna, če vsem členom priredimo obratne vrednosti:

$$S_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$$

Zdaj lahko uporabimo isti postopek reševanja, kot prej. Vrsto pomnožimo z 2:

$$2S_1=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....$$

Ponovno opazimo, da so vsi členi, razen prvega enaki prvotni vrsti.

$$2S_1=2+S_1$$

Iz te enačbe dobimo $S_1=2$, kar je pravilna rešitev.

PSEVDARIJE II. TIPA

PSEVDARIJA 1: Kvadratna enačba

Rešujemo enačbo:

$$(x+3)(2-x)=4$$

Sklepamo podobno kot pri reševanju enačbe $(x+3)(2-x)=0$, torej:

$$x+3=4 \quad \text{ali}$$
$$2-x=4$$

Dobimo rešitvi:

$$x_1=1$$
$$x_2=-2$$

Opazimo, da sta rešitvi kljub napačnemu postopku pravilni.

Ugotovimo kdaj se to zgodi. Poskusimo (pravilno) rešiti enačbo $(x-a)(b-x)=c$:

$$-x^2+bx+ax-ab=c$$
$$-x^2+(b+a)x-ab-c=0$$
$$x^2-(b-a)x+ab+c=0$$
$$x^2+(a+b)x+ab+c=0$$

Vemo:

$\underline{a+b=x_1+x_2}$ (vsota rešitev enačbe)   in $\underline{ab+c=x_1x_2}$ (produkt rešitev enačbe)

Če rešujemo enačbo po drugem- napačnem načinu, pa o rešitvah izvemo naslednje:

$$(x-a)(b-x)=c$$

$$x-a=c \quad b-x=c$$
$$\underline{x_1=c+a \quad x_2=b-c}$$

Zanima nas kdaj bosta naši (po napačni poti dobljeni) rešitvi sovpadali s pravimi rešitvami. To se bo zgodilo, ko bo $a+b=x_1+x_2$ in ko bo $ab+c=x_1x_2$. Zdaj lahko rešimo sistem enačb. Če pogledamo enačbo $ab+c=x_1x_2$, lahko vanjo vstavimo $x_1=c+a$ in $x_2=b-c$:

$$ab+c=(c+a)(b-c)$$

$$ab+c=cb-c^2+ab-ac$$

$$c-cb+c^2+ac=0$$

$$c(c-b+a+1)=0$$

Od tod dobimo dve rešitvi za c. Prva rešitev je c=0. V tem primeru po našem postopku dobimo pravi rešitvi. Druga možnost pa je:

$$c-b+a+1=0$$
$$\underline{c=b-a-1}$$

Torej bomo z napačnim postopkom dobili pravilni rešitvi tudi, ko je $c=b-a-1$. V našem uvodnem primeru smo imeli a=-3, b=2, c=4 in v tem primeru res velja $b-a-1 = 4 = c$.

PSEVDARIJA 2: Poiskati največji kot v trikotniku s stranicami dolgimi 4, 7 in 9

Označimo iskani kot z α. V trikotniku nastavimo sinus kota α, kot razmerje med stranico dolgo 9, in stranico dolgo 7:

$$\sin\alpha = \frac{9}{7} \approx 1{,}2857$$

Vrednost razdelimo:

$$1 = \sin 90°$$

$$0{,}2857 = \sin 16°36'$$

Če oba kota seštejemo, dobimo: $90° + 16°36' = 106°36'$

$$1{,}2857 = \sin 106°36'$$

Dobili smo pravilni rezultat.

Pri izpeljavi je vse polno napak. Najprej opazimo, da trikotnik ni pravokotni, zato sinus kota ni preprosto kvocient stranic. V naslednji vrstici sklepamo, da sin(a+b) = sin a + sin b, kar v splošnem tudi ne velja. Kljub temu dobimo pravilni rezultat. Seveda to ni možno v vsakem trikotniku, ampak samo pod posebnimi pogoji.

Naj bo *TBC* pravokotni trikotnik s pravim kotom pri oglišču *C*. Narišemo krog s središčem v točki *B* in polmerom |*BT*|+|*BC*|, ki seka krog s središčem v *C* in polmerom |*CT*|+|*CB*| v točki *A*. Pri takšnem trikotniku *ABC* (slika 8) lahko kot pri oglišču *C* poiščemo po zgornji metodi.

Naj bo $|BC|=a$, $|TC|=b$ in $|TB|=c$. Potem velja:

$$|CA|=b+a \text{ in } |AB|=c+a$$

$$c^2-b^2=a^2.$$

Po uporabljeni metodi dobimo:

$$\sin C = \frac{c+a}{b+a} = 1 + \frac{c-b}{b+a}$$

Označimo C–90°=θ.

$$\sin\theta = \frac{c-b}{b+a}$$

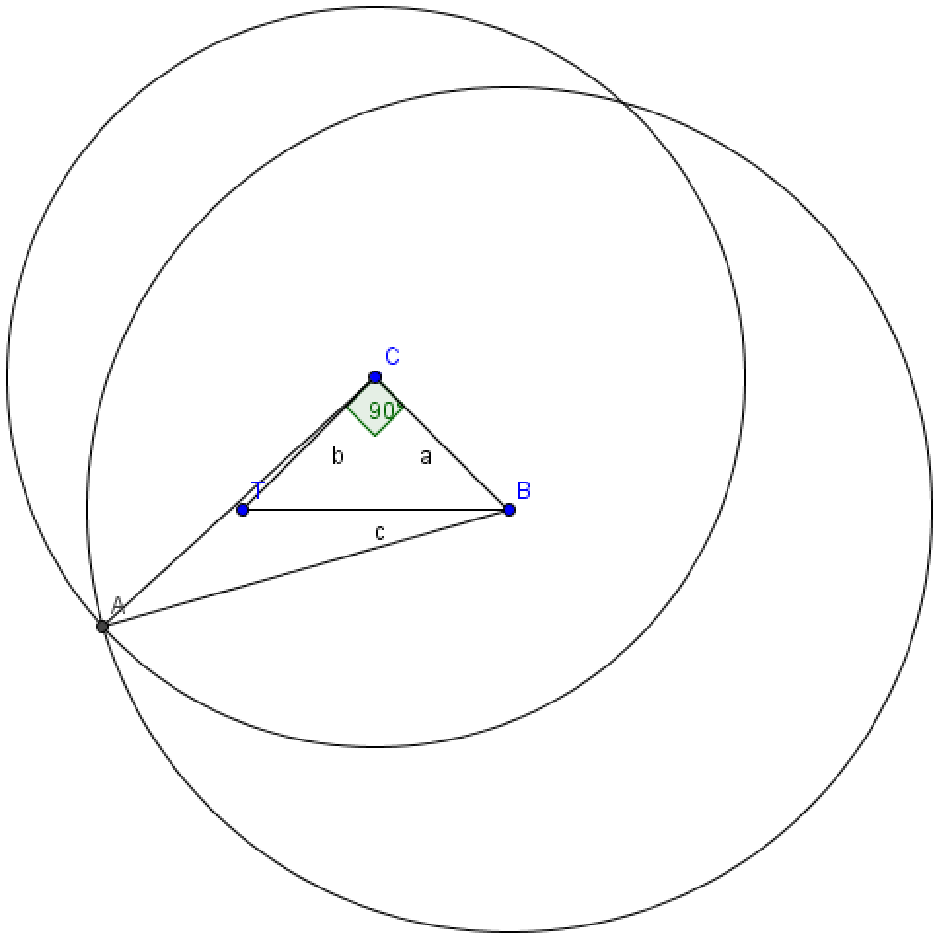
Vemo, da C=90°+θ, torej:

$$\cos C = -\sin\theta = \frac{b-c}{b+a}.$$

Po kosinusnem izreku pa dobimo:

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+(b+a)^2-(c+a)^2}{2a(b+a)} = \frac{b^2-c^2+a^2+2ab-2ac}{2a(b+a)} = \frac{2ab-2ac}{2a(b+a)} = \frac{b-c}{b+a}.$$

Po obeh postopkih na koncu dobimo enak rezultat.



Slika 8: Skica k psevdariji 2

ZAKLJUČEK

Cilj moje naloge je bil ugotoviti pogoste napake, ki se lahko pojavijo v matematičnih tekstih in opozoriti nanje. To mi je uspelo pri vseh primerih, navedenih v nalogi. Psevdarije se sicer pojavljajo še na mnogih drugih, zahtevnejših področjih, za katera bi potrebovala več znanja matematike. Veliko vprašanj pri obravnavani temi tako še ostaja odprtih za nadaljnje preučevanje. Kljub temu sem se iz naloge veliko naučila, predvsem to, da je potrebna velika previdnost, saj že manjša napaka lahko privede do nesmiselnega rezultata.

Menim, da je obravnavana tema mnogim dijakom neznana. Med tistimi, ki so se s tovrstnimi zmotami že srečali, pa jim je bližje razvedrilna funkcija obravnavane teme, kot pa izobraževalna vloga. Napake, ki v obravnavanih primerih privedejo do nesmiselnega rezultata, pa se velikokrat pojavljajo tudi pri reševanju običajnih šolskih primerov, zato mislim, da bi moja raziskovalna naloga lahko bila koristna tudi pri rednem pouku.

Literatura

[1] E. A.Maxwell, *Fallacies in mathematics*, Cambridge University Press, 1959.

[2] A. P. Rollet, *Pseudaria 1*, Mathematical Gazette, Vol. 39, No 327 (Feb. 1955), str. 35.

[3] E. A.Maxwell, *Pseudaria 8,* Mathematical Gazette, Vol. 40, No 331 (Feb. 1956), str. 58.

[4] E. J. Hopkins, *Pseudaria 23,* Mathematical Gazette, Vol. 47, No 360 (Maj 1963), str. 158.

[5] A. S. Wiener, *Pseudaria 25,* Mathematical Gazette, Vol. 48, No 364 (Maj 1964), str. 220.

[6] R. Beetham, *Pseudaria 31,* Mathematical Gazette, Vol. 50, No 372 (Maj 1966), str. 185.

[7] *Mathematical fallacy*. Wikipedia, spletna enciklopedija. Dostopno na
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_fallacy
Povzeto dne 29.9.2013.

[8] *Spot the math errors!* Skulls in the stars. Dostopno na
http://skullsinthestars.com/2008/12/12/spot-the-math-errors/
Povzeto dne 19.1.2014.