

Mladi za napredek Maribora

31. srečanje

Vsota zaporednih naravnih števil

Matematika

Raziskovalna naloga

012345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546474849505152535455565758596061626364656667686970717273747576777879808182838485868788899091929394959697989910010110210310410510610710810911011111211311411511611711811912012112212312412512612712812913013113213313413513613713813914014114214314414514614714814915015115215315415515615715815916016116216316416516616716816917017117217317417517617717817918018118218318418518618718818919019119219319419519619719819920020120220320420520620720820921021121221321421521621721821922022122222322422522622722822923023123223323423523623723823924024124224324424524624724824925025125225325425525625725825926026126226326426526626726826927027127227327427527627727827928028128228328428528628728828929029129229329429529629729829930030130230330430530630730830931031131231331431531631731831932032132232332432532632732832933033133233333433533633733833934034134234334434534634734834935035135235335435535635735835936036136236336436536636736836937037137237337437537637737837938038138238338438538638738838939039139239339439539639739839940040140240340440540640740840941041141241341441541641741841942042142242342442542642742842943043143243343443543643743843944044144244344444544644744844945045145245345445545645745845946046146246346446546646746846947047147247347447547647747847948048148248348448548648748848949049149249349449549649749849950050150250350450550650750850951051151251351451551651751851952052152252352452552652752852953053153253353453553653753853954054154254354454554654754854955055155255355455555655755855956056156256356456556656756856957057157257357457557657757857958058158258358458558658758858959059159259359459559659759859960060160260360460560660760860961061161261361461561661761861962062162262362462562662762862963063163263363463563663763863964064164264364464564664764864965065165265365465565665765865966066166266366466566666766866967067167267367467567667767867968068168268368468568668768868969069169269369469569669769869970070170270370470570670770870971071171271371471571671771871972072172272372472572672772872973073173273373473573673773873974074174274374474574674774874975075175275375475575675775875976076176276376476576676776876977077177277377477577677777877978078178278378478578678778878979079179279379479579679779879980080180280380480580680780880981081181281381481581681781881982082182282382482582682782882983083183283383483583683783883984084184284384484584684784884985085185285385485585685785885986086186286386486586686786886987087187287387487587687787887988088188288388488588688788888989089189289389489589689789889990090190290390490590690790890991091191291391491591691791891992092192292392492592692792892993093193293393493593693793893994094194294394494594694794894995095195295395495595695795895996096196296396496596696796896997097197297397497597697797897998098198298398498598698798898999099199299399499599699799899910001001100210031004100510061007100810091010101110121013101410151016101710181019102010211022102310241025102610271028102910301031103210331034103510361037103810391040104110421043104410451046104710481049105010511052105310541055105610571058105910601061106210631064106510661067106810691070107110721073107410751076107710781079108010811082108310841085108610871088108910901091109210931094109510961097109810991100110111021103110411051106110711081109111011111112111311141115111611171118111911201121112211231124112511261127112811291130113111321133113411351136113711381139114011411142114311441145114611471148114911501151115211531154115511561157115811591160116111621163116411651166116711681169117011711172117311741175117611771178117911801181118211831184118511861187118811891190119111921193119411951196119711981199120012011202120312041205120612071208120912101211121212131214121512161217121812191220122112221223122412251226122712281229123012311232123312341235123612371238123912401241124212431244124512461247124812491250125112521253125412551256125712581259126012611262126312641265126612671268126912701271127212731274127512761277127812791280128112821283128412851286128712881289129012911292129312941295129612971298129913001301130213031304130513061307130813091310131113121313131413151316131713181319132013211322132313241325132613271328132913301331133213331334133513361337133813391340134113421343134413451346134713481349135013511352135313541355135613571358135913601361136213631364136513661367136813691370137113721373137413751376137713781379138013811382138313841385138613871388138913901391139213931394139513961397139813991400140114021403140414051406140714081409141014111412141314141415141614171418141914201421142214231424142514261427142814291430143114321433143414351436143714381439144014411442144314441445144614471448144914501451145214531454145514561457145814591460146114621463146414651466146714681469147014711472147314741475147614771478147914801481148214831484148514861487148814891490149114921493149414951496149714981499150015011502150315041505150615071508150915101511151215131514151515161517151815191520152115221523152415251526152715281529153015311532153315341535153615371538153915401541154215431544154515461547154815491550155115521553155415551556155715581559156015611562156315641565156615671568156915701571157215731574157515761577157815791580158115821583158415851586158715881589159015911592159315941595159615971598159916001601160216031604160516061607160816091610161116121613161416151616161716181619162016211622162316241625162616271628162916301631163216331634163516361637163816391640164116421643164416451646164716481649165016511652165316541655165616571658165916601661166216631664166516661667166816691670167116721673167416751676167716781679168016811682168316841685168616871688168916901691169216931694169516961697169816991700170117021703170417051706170717081709171017111712171317141715171617171718171917201721172217231724172517261727172817291730173117321733173417351736173717381739174017411742174317441745174617471748174917501751175217531754175517561757175817591760176117621763176417651766176717681769177017711772177317741775177617771778177917801781178217831784178517861787178817891790179117921793179417951796179717981799180018011802180318041805180618071808180918101811181218131814181518161817181818191820182118221823182418251826182718281829183018311832183318341835183618371838183918401841184218431844184518461847184818491850185118521853185418551856185718581859186018611862186318641865186618671868186918701871187218731874187518761877187818791880188118821883188418851886188718881889189018911892189318941895189618971898189919001901190219031904190519061907190819091910191119121913191419151916191719181919192019211922192319241925192619271928192919301931193219331934193519361937193819391940194119421943194419451946194719481949195019511952195319541955195619571958195919601961196219631964196519661967196819691970197119721973197419751976197719781979198019811982198319841985198619871988198919901991199219931994199519961997199819992000200120022003200420052006200720082009201020112012201320142015201620172018201920202021202220232024202520262027202820292030203120322033203420352036203720382039204020412042204320442045204620472048204920502051205220532054205520562057205820592060206120622063206420652066206720682069207020712072207320742075207620772078207920802081208220832084208520862087208820892090209120922093209420952096209720982099210021012102210321042105210621072108210921102111211221132114211521162117211821192120212121222123212421252126212721282129213021312132213321342135213621372138213921402141214221432144214521462147214821492150215121522153215421552156215721582159216021612162216321642165216621672168216921702171217221732174217521762177217821792180218121822183218421852186218721882189219021912192219321942195219621972198219922002201220222032204220522062207220822092210221122122213221422152216221722182219222022212222222322242225222622272228222922302231223222332234223522362237223822392240224122422243224422452246224722482249225022512252225322542255225622572258225922602261226222632264226522662267226822692270227122722273227422752276227722782279228022812282228322842285228622872288228922902291229222932294229522962297229822992300230123022303230423052306230723082309231023112312231323142315231623172318231923202321232223232324232523262327232823292330233123322333233423352336233723382339234023412342234323442345234623472348234923502351235223532354235523562357235823592360236123622363236423652366236723682369237023712372237323742375237623772378237923802381238223832384238523862387238823892390239123922393239423952396239723982399240024012402240324042405240624072408240924102411241224132414241524162417241824192420242124222423242424252426242724282429243024312432243324342435243624372438243924402441244224432444244524462447244824492450245124522453245424552456245724582459246024612462246324642465246624672468246924702471247224732474247524762477247824792480248124822483248424852486248724882489249024912492249324942495249624972498249925002501250225032504250525062507250825092510251125122513251425152516251725182519252025212522252325242525252625272528252925302531253225332534253525362537253825392540254125422543254425452546254725482549255025512552255325542555255625572558255925602561256225632564256525662567256825692570257125722573257425752576257725782579258025812582258325842585258625872588258925902591259225932594259525962597259825992600260126022603260426052606260726082609261026112612261326142615261626172618261926202621262226232624262526262627262826292630263126322633263426352636263726382639264026412642264326442645264626472648264926502651265226532654265526562657265826592660266126622663266426652666266726682669267026712672267326742675267626772678267926802681268226832684268526862687268826892690269126922693269426952696269726982699270027012702270327042705270627072708270927102711271227132714271527162717271827192720272127222723272427252726272727282729273027312732273327342735273627372738273927402741274227432744274527462747274827492750275127522753275427552756275727582759276027612762276327642765276627672768276927702771277227732774277527762777277827792780278127822783278427852786278727882789279027912792279327942795279627972798279928002801280228032804280528062807280828092810281128122813281428152816281728182819282028212822282328242825282628272828282928302831283228332834283528362837283828392840284128422843284428452846284728482849285028512852285328542855285628572858285928602861286228632864286528662867286828692870287128722873287428752876287728782879288028812882288328842885288628872888288928902891289228932894289528962897289828992900290129022903290429052906290729082909291029112912291329142915291629172918291929202921292229232924292529262927292829292930293129322933293429352936293729382939294029412942294329442945294629472948294929502951295229532954295529562957295829592960296129622963296429652966296729682969297029712972297329742975297629772978297929802981298229832984298529862987298829892990299129922993299429952996299729982999300030013002300330043005300630073008300930103011301230133014301530163017301830193020302130223023302430253026302730283029303030313032303330343035303630373038303930403041304230433044304530463047304830493050305130523053305430553056305730583059306030613062306330643065306630673068306930703071307230733074307530763077307830793080308130823083308430853086308730883089309030913092309330943095309630973098309931003101310231033104310531063107310831093110311131123113311431153116311731183119312031213122312331243125312631273128312931303131313231333134313531363137313831393140314131423143314431453146314731483149315031513152315331543155315631573158315931603161316231633164316531663167316831693170317131723173317431753176317731783179318031813182318331843185318631873188318931903191319231933194319531963197319831993200320132023203320432053206320732083209321032113212321332143215321632173218321932203221322232233223432253226322732283229323032313232323332343235323632373238323932403241324232433244324532463247324832493250325132523253325432553256325732583259326032613262326332643265326632673268326932703271327232733274327532763277327832793280328132823283328432853286328732883289329032913292329332943295329632973298329933003301330233033304330533063307330833093310331133123313331

Kazalo

1. Povzetek	2
2. Uvod	3
3. Vsota prvih n zaporednih naravnih števil	5
4. Vsota zaporednih naravnih števil, ko se zaporedje ne začne z 1	7
5. Vsota prvih n zaporednih sodih in lihih števil	9
6. Ugotovitve	10
7. Viri.....	10

1. Povzetek

Najverjetneje ste se že kdaj vprašali, koliko je vsota nekih zaporednih naravnih števil. Seveda si lahko pomagamo tudi s kalkulatorjem ali računalnikom, vendar tovrstni pripomočki niso vedno na voljo. Kako si torej pomagati in vsoto hitro in spretno izračunati? V raziskovalni nalogi najprej pokažem, kako spretno seštejemo zaporedna naravna števila od 1 do nekega izbranega števila. V nadaljevanju pa raziščem, kako seštejemo poljubno število zaporednih naravnih števil od nekega izbranega števila dalje. V raziskovalni nalogi sem poskušal najti najlažji način za seštevanje poljubnih zaporednih naravnih števil.

2. Uvod

Naravna števila so števila, s katerimi preštevamo. Množico naravnih števil zapišemo $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Vsako naravno število ima naslednika, za 1 večje število. Vsako naravno število, razen števila 0, ima predhodnika, ki je za 1 manjše število.

Poznamo liha in sode naravna števila. Zaporedje sodih naravnih števil zapišemo 2, 4, 6, 8, Poglejmo, kako zapišemo poljubno sodo naravno število v zaporedju. V ta namen narišemo zaporedje:



Člen 1



Člen 2



Člen 3

Slika 1

Z vsakim členom prikažemo eno število v zaporedju sodih števil. Število kvadratkov vsakega člena lahko zapišemo:

$$1 \cdot 2 = 2 \text{ (ena vrstica z dvema kvadratkoma)}$$

$$2 \cdot 2 = 4 \text{ (dve vrstici s po dvema kvadratkoma)}$$

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (tri vrstice s po dvema kvadratkoma)}$$

...

$n \cdot 2$ je število kvadratkov na n -ti sliki, kjer je n vrstic s po dvema kvadratkoma.

Tako je npr. sedemintrideseto število v zaporedju sodih števil $37 \cdot 2 = 74$.

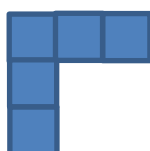
Poglejmo, kako zapišemo poljubno naravno število v zaporedju lihih naravnih števil. V ta namen narišemo zaporedje:



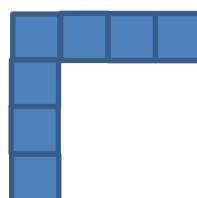
Člen 1



Člen 2



Člen 3



Člen 4

Slika 2

Z vsakim členom prikažemo eno liho število v zaporedju. Zanima nas, kako zapišemo poljubno liho število v zaporedju. Število kvadratkov v posameznih členih lahko zapišemo:

$$1 = 1$$

$2 + 2 - 1 = 3$ (V stolpcu 2 kvadratka, v vrstici dva kvadratka, vogalnega šteje dvakrat)

$3 + 3 - 1 = 5$ (V stolpcu 3 kvadratki, v vrstici 3 kvadratki, vogalnega šteje dvakrat)

$4 + 4 - 1 = 7$ (V stolpcu so 4 kvadratki, v vrstici so 4 kvadratki, vogalnega šteje dvakrat)

...

$n + n - 1 = 2n - 1$ (v stolpcu je n kvadratkov, v vrstici je n kvadratkov, vogalnega šteje dvakrat)

Z $2n - 1$ zapišemo poljubno naravno število v zaporedju lihih naravnih števil. Tako je sedemintrideseto liho število v zaporedju $2 \cdot 37 - 1 = 73$.

V zaporedju naravnih števil se izmenjujejo liha in soda naravna števila. Ko seštevamo zaporedna naravna števila, dobimo vsote dveh, treh, štirih... naravnih števil. Če zapišemo vsoto dveh zaporednih naravnih števil, je to vsota lihega in sodega števila. Recimo, da je manjše število sodo, torej $2n$, naslednik je torej liho, $2n + 1$. Tako je

$2n + 2n + 1 = 4n + 1$, ker je $4n$ sodo število, je $4n + 1$ liho število. Pokazali smo, da je vsota sodega in lihega zaporednega naravnega števila liho število.

Če seštejemo tri zaporedna naravna števila, sta to lahko dve sodi in eno liho ali dve lihi in eno sodo. V primeru dveh sodih in enega lihega je prvi člen sodo število:

$$2n + (2n + 1) + (2n + 2) = 6n + 3 = 3 \cdot (2n + 1).$$

Vsota dveh sodih in enega lihega števila je tako liho število, saj jo zapišemo s produktom števila 3 (liho število) in lihega števila $2n + 1$. Produkt dveh lihih števil je vedno liho število.

V primeru dveh lihih števil in sodega števila je prvi člen liho število:

$$2n + 1 + (2n + 2) + (2n + 3) = 6n + 6 = 3 \cdot (2n + 2).$$

Vsoto lahko zapišemo s produktom lihega števila (3) in sodega števila $2n + 2$, saj je $2n$ sodo število. Produkt sodega in lihega števila je vedno sodo število.

V primeru vsote štirih zaporednih naravnih števil bo vsota vedno soda, saj je vsota dveh lihih števil vedno sodo število, vsota sodih števil pa je tudi sodo število. Podobno sklepamo za poljubno število členov vsote.

Za vsoto zaporednih naravnih števil lahko napovemo ali bo liho ali sodo število.

3. Vsota prvih n zaporednih naravnih števil

Iz anekdote življenja matematika C. F. Gaussa (1777 – 1855) izvemo, kako je spretno izračunal vsoto prvih sto naravnih števil. To nalogo mu je dal učitelj, ker Gauss ni bil ravno umirjen pri pouku. Učitelj je je pričakoval dolgotrajno računanje (saj računal še niso poznali, vsaj takih ne, kot jih danes). Gauss je v zelo kratkem času povedal pravilno vsoto. Poglejmo, kako je računal:

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

$$4 + 97 = 101$$

...

Dobimo petdeset vsot 101, zato je $50 \cdot 101 = 5050$.

Postopek seveda lahko uporabimo za poljubno število prvih zaporednih naravnih števil. V nadaljevanju računajmo vsote tako, da začnemo z enim, oziroma z dvema členoma vsote. Izračunamo lahko, da je:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

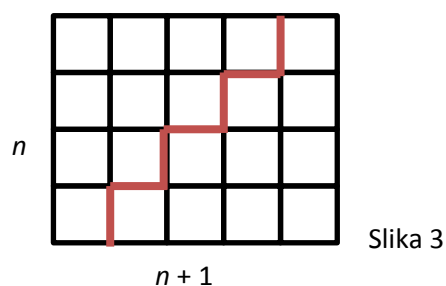
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

...

Kako pa bi izračunali vsoto n poljubnih zaporednih naravnih števil?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n - 1 + n = ?$$

Pomagamo si lahko s sliko (slika 3). Narišimo sliko vsote prvih štirih naravnih števil, $n = 4$. Vsota prvih štirih naravnih števil je 10, torej je na sliki 10 kvadratkov. Narišimo pravokotnik z dolžino $n + 1$, v našem primeru $4 + 1 = 5$ in širino n , v našem primeru 4 (slika 3).



Pravokotnik sem razdelil z rdečo črto (močno poudarjena) na dva enaka dela (z enakim številom kvadratkov). Vsak izmed delov prikazuje vsoto prvih štirih naravnih števil $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Ker je ploščina lika (v kvadratih) enaka produktu dolžine in širine, zapišemo število vseh kvadratkov $4 \cdot (4 + 1) = 20$. V polovici pravokotnika pa je zato $\frac{4 \cdot (4+1)}{2} = 10$ kvadratkov.

Ker je n lahko katerokoli naravno število, lahko zapišemo naslednjo formulo:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preverimo, ali formula velja za $n = 100$ (vsota, ki jo je računal Gauss):

$$\frac{100 \cdot (100 + 1)}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$$

Ugotovil sem, da se vrednosti, dobljeni s seštevanjem in uporabo formule, ujemata, saj je dobljena vrednost obakrat enaka.

Poskusil bom še z drugim zaporedjem naravnih števil, tokrat do števila 15:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120$$

$$\frac{15 \cdot (15 + 1)}{2} = 120$$

Sedaj pa preverimo ali formula velja za zaporedje naravnih števil, ki se ne začne z 1, na primer za štiri naslednja zaporedna naravna števila:

$$5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

Zdaj pa uporabimo formulo:

$$5 + 6 + 7 + 8 = \frac{8 \cdot (8+1)}{2} = \frac{8 \cdot 9}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

Ugotovil sem, da formula v tem primeru ne velja.

Sklepam, da vsoto zaporednih naravnih števil, ki se ne začne s številom 1, izračunamo drugače.

4. Vsota zaporednih naravnih števil, ko se zaporedje ne začne z 1

Na nekaj krajših in nekaj daljših primerih bom poskušal določiti formulo, ki velja za vsoto zaporedij, ki se ne začnejo z 1.

$$2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$10 + 11 + 12 = 33$$

$$20 + 21 + 22 = 63$$

$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 132$$

$$1000 + 1001 + 1002 + 1003 + 1004 + 1005 = 5015$$

$$123 + 124 + 125 + 126 + 127 + 128 + 129 + 130 = 1012$$

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 119$$

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 = 37$$

$$30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 = 231$$

Na prvi pogled ni nobene povezave. Računamo vsoto zaporednih naravnih števil od izbranega števila do drugega izbranega števila. S tem poznamo tudi koliko števil v zaporedju seštevamo. Ideja rešitve je morda v tem, da npr. za vsoto števil $2 + 3 + 4 + 5$ izračunam vsoto prvih petih naravnih števil in od nje odštejem število 1 (ker se vsota začne s številom 2). Vsota prvih petih naravnih števil je 15 in $15 - 1 = 14$, kar je vsota števil $2 + 3 + 4 + 5$.

Označimo prvo število v vsoti s spremenljivko z , zadnjo število v vsoti pa s spremenljivko n . Recimo, da je število $z = 9$ in število $n = 13$. Zanima nas, kakšna je vsota števil z do n , torej od vključno števila 9 do vključno števila 13, kar je 5 števil.

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 = ?$$

Vsoto teh števil lahko zapišemo tudi drugače:

$$(13 + 9) = n + z = 22$$

$$(12 + 10) = (n - 1) + (z + 1) = n + z = 22$$

$$11 = 11$$

Vsota je tako $22 + 22 + 11 = 55$ ali $2(n + z) + (n + z):2$.

Imamo torej 2 cela para, katerih vsota je 22, in eno število, katerega vrednost je $\frac{1}{2}$ od vsote parov (povprečna vrednost prvega in zadnjega števila v vsoti). Vseh števil v zaporedju je 5, torej imamo $\frac{5}{2}$ parov. Število parov lahko zapišemo

$$m = \frac{(n-z)+1}{2} = \frac{(13-9)+1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Vsoto izračunamo kot produkt vsote prvega in zadnjega števila v paru in števila m .

$$(13 + 9) \cdot \frac{13-9+1}{2} = 22 \cdot \frac{5}{2} = 22 \cdot 2,5 = 55$$

Zdaj pa formula:

$$(n + z) \cdot \frac{(n-z)+1}{2}$$

Zdi se, da je formula prava. Hitro preverimo za sodo število naravnih števil v vsoti $2 + 3 + 4 + 5$. Vsota je 14. Če uporabimo zapisano formulo je $z = 2$, $n = 5$ in $m = \frac{(n-z)+1}{2} = \frac{(5-2)+1}{2} = 2$. Vsoto izračunam $(2 + 5) \cdot 2 = 14$.

Lahko pa računamo tudi tako:

Predpostavimo, da je število $z = 9$ in število $n = 13$. Izračunamo vsoto prvi n števil, kar že znamo in odštejemo vsoto prvih $z - 1$ števil (vsoto števil od 1 do 8):

$$\frac{13 \cdot (13+1)}{2} - \frac{8 \cdot (8+1)}{2} = 91 - 36 = 55$$

Za poljubna števila zapišemo

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(z-1) \cdot z}{2} &= , \text{ kjer naj bo } k = n - z, \text{ razlika med največjim in najmanjšim} \\ &\text{ številom v zaporedju členov vsote. Potem zapišemo } n = k + z. \text{ Tako je} \\ &= \frac{(k+z)(k+z+1)}{2} - \frac{(z-1) \cdot z}{2} = \frac{1}{2} \cdot (k^2 + zk + zk + k + z^2 + z - z^2 + z) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (k^2 + 2zk + 2z + k) = \frac{1}{2} \cdot (k(k+2z) + (k+2z)) = \\ &= \frac{1}{2} (k+2z)(k+1) \end{aligned}$$

Za $n = 13$, $z = 9$ je $k = 13 - 9 = 4$. Tako je vsota $\frac{1}{2} \cdot (4 + 2 \cdot 9)(4 + 1) = 55$.

Pa zapišimo vsoto zaporednih naravnih števil še tako:

$$\begin{aligned}9 + 10 + 11 + 12 + 13 &= 9 + (9 + 1) + (9 + 2) + (9 + 3) + (9 + 4) = 5 \cdot 9 + (1 + 2 + 3 + 4) = \\ &= 45 + \frac{4 \cdot (4+1)}{2} = 45 + 10 = 55\end{aligned}$$

Vsak naslednji člen v vsoti je od predhodnega večji za 1. Zato lahko zapišemo vsoto zaporednih naravnih števil kot vsoto produkta prvega števila in števila členov z vsoto zaporednih naravnih števil od 1 do števila, ki je za ena manjše od števila členov. Če je $z = 9$, $n = 13$, je $m = 5$, kjer je m število členov v vsoti. Formula, ki jo zapišemo je

$$m \cdot z + \frac{(m-1) \cdot m}{2}.$$

Če bi izbrali vsoto naravnih števil od 123 do 130, je $z = 123$, $m = 130 - 123 + 1 = 8$. Tako je vsota po tej formuli $123 \cdot 8 + \frac{(8-1) \cdot 8}{2} = 1012$.

Vsoto zaporednih naravnih števil lahko izračunamo na različne načine, odvisno od načina razmišljanja.

In morda še kako bi izračunali vsoto nekaj zaporednih sodih (lih) števil – če bi našel kako pravilo

5. Vsota prvih n zaporednih sodih in lihih števil

Soda števila

Poljubno n -to sodo število v zaporedju naravnih števil zapišemo $2n$. Vsota prvih petih naravnih sodih števil je $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$. Vsako sodo število je večkratnik števila 2, zato lahko v vsoti izpostavimo število 2:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 2 \cdot 15 = 30.$$

Opazimo, da je v oklepaju zapisana vsota prvih n naravnih števil, če je n v tem primeru število členov vsote sodih števil. Zato lahko zapišemo formulo

$$2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Vsoto prvih n sodih naravnih števil izračunamo torej s formulo $n(n+1)$, kjer je n število členov vsote.

Liha števila

Premislimo, kako bi izračunali vsoto zaporednih prvih nekaj lihih števil. Poglejmo primer vsote $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$, v kateri je šest lihih zaporednih števil. Seveda lahko izračunamo z delnim seštevanjem in dobimo vsoto 36. Kaj pa, če je v vsoti veliko členov?

Moja ideja je, da od vsote vseh prvih naravnih števil do števila 11 odštejem vsoto vseh sodih števil do števila 11. Razlika je seveda vsota vseh lihih števil:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 11) - (2 + 4 + 6 + 8 + 10) = \frac{11 \cdot (11+1)}{2} - 5 \cdot 6 = 66 - 30 = 36.$$

V zaporedju prvih enajst naravnih števil je pet sodih števil, zato je vsota sodih števil $5 \cdot 6 = 30$.

Naj bo sedaj n najvišje liho število, do katerega želimo sešteti vsa liha števila. Med prvimi n lihimi števili je $\frac{n-1}{2}$ sodih števil. Tako zapišemo razliko vseh naravnih števil do vključno števila n in vseh sodih števil do števila n :

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) &= \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) = \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot \left(n - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{2n}{2} - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n - n + 1}{2} = \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Vsoto vseh prvih lihih števil do lihega števila n izračunamo s formulo $\frac{(n+1)^2}{4}$.

6. Ugotovitve

V raziskovalni nalogi sem ugotovil in pokazal, da lahko vsoto prvih nekaj zaporednih naravnih števil izračunam s formulo $\frac{n(n+1)}{2}$. Tako ni potrebno seštevanje posameznih delnih vsot. Prav tako sem ugotovil, da lahko vsoto zaporednih naravnih števil, ki se ne začne s številom 1, izračunamo spretno. Glede na to, katera začetna števila izberemo, lahko vsoto izračunamo na različne načine. Tudi vsoto zaporednih lihih in sodih zaporednih naravnih števil lahko spretno izračunamo.

Mislil, da sem z raziskavo pokazal kar nekaj spretnih poti računanja, kar mi bo morda pomagalo tudi pri pouku matematike.

7. Viri

[1] G. Polya, Kako rešujemo matematične probleme. Ljubljana, DMFA 1985

[2] Presek, Letnik 2 (1974/75), Številka 1, strani 24 – 25, Jože Malešič, O formuli za vsoto prvih n naravnih števil