

Mladi za napredek Maribora 2014

31. srečanje

VEDNO ZMAGAM

Matematika

Raziskovalna naloga

CE q | k X CE P CE S U Š CE U X Q Ě Z CE U R CE S CE Ú Ü Ò Á Ü Ò ¥ Ò Ü Ò P

T ^ } q | k R U Ž Ò Ü Ò P Ò S U X Q

¥ [| a U ¥ Á U R CE P CE S Ò P CE Á CE Ü Ó U Ü

Februar, 2014

KAZALO

Povzetek	2
Uvod	3
Nekaj malega o igri NIM	3
Dvojiški sistem in pravila	4
Igramo igro NIM	6
Zaključna pozicija in različice	7
Ugotovitve	12
Viri	13

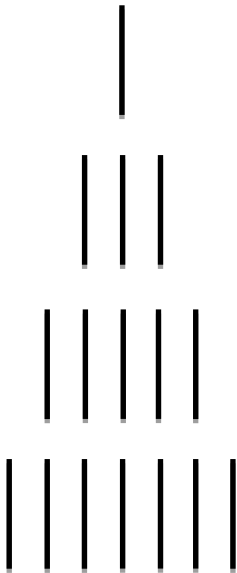
POVZETEK

Poznate igro NIM? Ste videli film Last year in Marienbad (1961)? Verjetno ne, vendar prav v tem film spoznamo zaNIMivo igro, kjer na prvi pogled vedno zmaga samo en igralec.

V raziskovalni nalogi sva si zastavili cilj, da bi odkrili način oz. pravilo, po katerem lahko vedno zmagamo pri igranju igre NIM in njenih različic. Raziskovali sva predvsem s pomočjo praktičnega dela, delali sva poskuse ob igranju različic te igre. Prav na ta način sva prišli tudi do ugotovitve, da pomembno vlogo pri zmagovalni strategiji igra dvojiški sistem. Samo uporaba le-tega nam lahko zagotovi stoo odstotno zmago v igri NIM.

UVOD

Slika 1

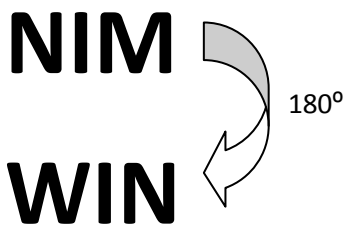


Vse se je začelo z ogledom francoskega črno-belega filma *Last year in Marienbad* iz leta 1961 [1]. Bolj kot sama vsebina filma, je najino pozornost pritegnila igra, ki jo v filmu večkrat igrajo (Slika 1) in jo lahko najdemo na naslovu (<http://www.smart-kit.com/s7879/>). V igri so v vrstah razporejene paličice. Igralca paličice odvezemata po nekem pravilu. Določena oseba v filmu v tej igri zmeraj zmaga, a nihče ne uspe razvozlati, kako mu to uspe. Tudi po ogledu filma naju vprašanje, kako lahko ta oseba vedno zmaga, ni pustilo pri miru. Ali je sploh mogoče pri določeni miselni igri zagotovo zmagati? To vprašanje se nama je zdelo vredno poglobitve,

predvsem, ker smo tudi pri matematični delavnici spoznali igro, ki jo igramo po podobnih pravilih, kot igro iz omenjenega filma. Za najino raziskovalno nalogo sva si tako želeli ugotoviti zmagovalno strategijo te igre. V ta namen pogledjmo v nadaljevanju nekoliko podrobneje igro NIM.

NEKAJ MALEGA O IGRI NIM

Slika 2



Igra NIM je verjetno poimenovana po nemški besedi »NIMm«, ki pomeni vzemi, kar je v bistvu rdeča nit te igre. V igri moramo odvezemati palčke (ali druge predmete) in sicer po določenem pravilu. Ko sva se poglobili v številne pomene besede NIM, sva prišli do zaNIMive ugotovitve. Če besedo NIM obrnemo za 180 stopinj, dobimo besedo »win« (Slika 2), ki v angleščini pomeni glagol zmagati. Pri igrah tega tipa je največkrat že na začetku znano, kateri igralec bo zmagal. Poznamo ogromno različic te igre, ki pa se med seboj razlikujejo le po pravilu odzemanja. Običajno zmaga igralec, ki je naredil zadnjo potezo (odvzem).

Na začetku sva se lotili le primera NIM igre iz filma, se pravi, da sva začeli iskati pravilo, s pomočjo katere bi lahko vedno zmagali. Pri tem sva si pomagali z interaktivno igro, ki sva jo našli na spletu [2]. V igri s spleta je nasprotnik, se pravi računalnik, vedno zmagal. Po precej neuspešnih poskusih in z močno željo, da bi ga premagali, sva začeli zapisovati njegove poteze. Vsako igro sva uporabljali kombinacijo potez, ki jih do tedaj še nisva, kar pomeni, da sva odvezemali različne paličice po različnih zaporedjih. Ko ni bilo več nobene kombinacije, ki je še nisva uporabili, sva se lotili preučevanja zapiskov njegovih potez. Po dolgotrajnem sklepanju in posvetovanju, sva prišli do določenega sistema, za katerega sva si upali trditi, da bi z njegovo pomočjo lahko zmagali. Nato sva raziskovali po literaturi in spletu in prišli do ugotovitve, da je najin sistem dvojiški sistem.

DVOJIŠKI SISTEM IN PRAVILA

Vsakodnevno uporabljamo desetiški številski sistem z desetimi števki (0, 1, 2, ..., 9) in desetiškimi enotami (1, 10, 100, ...). Vsako število lahko zapišemo z desetiško številko, kjer je pomemben vrstni red števk (mestni zapis), tako je število »petnajst« zapisano $1D5E = 1 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 15$. Na enak način oblikujemo dvojiški številski sestav, ki ga prav tako vsakodnevno uporabljamo, vendar se ne zavedamo njegove uporabe (računalništvo).

V dvojiškem številskem sestavu vsako številko zapišemo z dvema števki 0 in 1. Dvojiške enote so 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, Število $15 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1111_2$ zapisano z dvojiško številko. Pri ugotavljanju pravila igre moramo znati seštevati v dvojiškem sestavu, kar je zelo preprosto, saj je $1_2 + 1_2 = 10_2$. V desetiškem sestavu je to število 2, ki pa ga v dvojiškem sestavu ne moremo napisati s številko 2. V dvojiškem sestavu je $1_2 + 0_2 = 1_2$.

Poglejmo, kako si pomagamo pri igri. Število paličic razčlenimo na vsoto kvadratov števila 2 (v primeru obravnavane igre NIM iz filma razdelimo število palčk na $4 = 2^2$, $2 = 2^1$ in $1 = 2^0$), in sicer začnemo z največjim možnim številom. Če je torej paličic sedem, jih razdelimo na eno skupino štirih palčk, eno skupino dveh palčk in eno palčko, ki nam ostane (Slika 3). Skupine palčk označujemo z 1 ali 0. Če imamo v vrstici skupino štirih palčk, skupino označimo z 1. Če

te skupine ni, jo označimo z 0. Rezultate za vsako vrstico posebej vpišemo v tabelo in izračunamo tako imenovano **NIM- vsoto** (Tabela 1). To dobimo tako, da dve enici, zapisani v istem stolpcu »izničimo«, tj. zapišemo 0. Če sta v stolpcu 1 in 0, ostane ena, če pa sta v stolpcu dve ničli, nam ostane nič. Števila, ki jih dobimo z zgornjo metodo, vpišemo v vrstico na dnu tabele. Ta dobljena števila imenujemo **vsota NIM**.

Slika 3

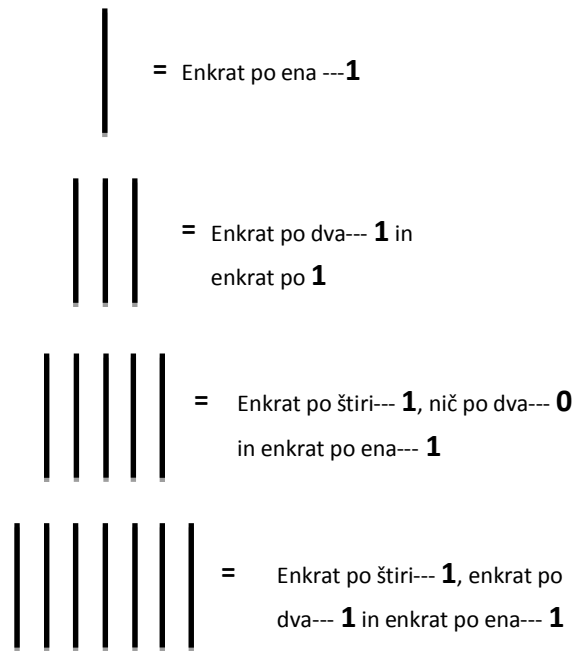


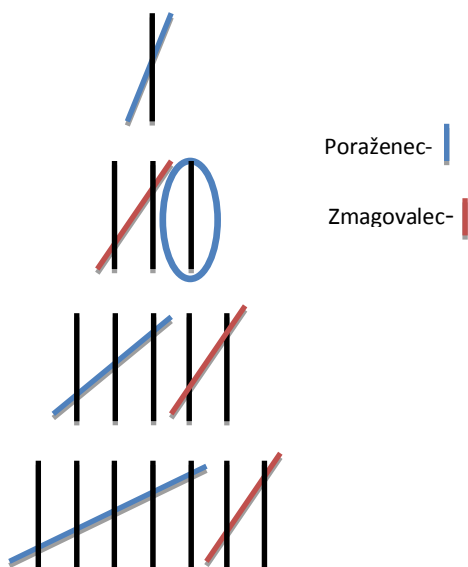
Tabela 1

ŠTEVILO	8	4	2	1
PO KOLIKOKRAT				
NIM VSOTA				

Tabela za pomoč pri računanju NIM vsote.

IGRAJMO IGRO NIM

Slika 4



Na vrsti je moder igralec, ker mora vzeti zadnjo palčko je poraženec.

Pri primeru iz filma velja pravilo, da lahko naenkrat odvezamo poljubno število paličic, ki pa morajo biti vse iz enake vrstice. Pri igri izgubi tisti igralec, ki pobere zadnjo palčko (Slika 2). Če želimo izračunati NIM vsoto primera iz filma, si lahko pomagamo z razpredelnico (Tabela 2) in pridemo do zaključka, da je začetna NIM vrednost nič. Ne glede na število paličic in njihovo pozicijo, bo igralec, ki bo pri vsoti nič odvezal, le-to spremenil na pozitivno. Igralec, ki pa bo odvezal pri pozitivni vsoti, bo lahko vsoto spet poistovetil z nič ali jo pustil pozitivno. NIM vsota ob začetku igranja je nič, se pravi, da bo tisti, ki bo začel, s svojo potezo to vrednost spremenil. Ni

pomembno, s katero potezo bo začel, v vsakem primeru se bo NIM vsota po tej potezi spremenila. Naslednji igralec bo torej imel priložnost, da z odvzemom ustreznega števila paličic dobi NIM vrednost nič. Če bo to storil, bo naslednji igralec spet spremenil NIM vrednost. Če bo uspelo igralcu, ki je na vrsti, odvzeti toliko paličic, da bo vrednost NIM vsote nič, bo zagotovo zmagal. Ta igralec bo zmagal v vsakem primeru, četudi oba igralca poznata pravilo. Ima namreč **začetno prednost**, če igre ne začne, saj tisti, ki začne, vedno spremeni začetno NIM vsoto (nič). Po tem pravilu mora igralec igrati vse dokler ne pride do zaključne pozicije.

Tabela 2

ŠTEVILO	8	4	2	1
PO KOLIKOKRAT	0	0	0	1
	0	0	1	1
	0	1	0	1
	0	1	1	1
NIM VSOTA	0	0	0	0

Primer računanja NIM vsote iz filma.

ZAKLJUČNA POZICIJA IN RAZLIČICE

Različica 1

Obstaja več različic oz. pozicij, iz katerih je razvidno, kdo bo zmagal (Slika 4). V teh možnostih so palčke lahko razporejene v različnem zaporedju, razlikujejo se po številu vrstic in palčk, ki so v kombinaciji. Ena od možnosti, kjer je očitno, kdo bo zmagal, je ta, pri kateri je v vsaki od dveh vrstic po ena palčka (levo na Sliki 4). Tisti, ki mora prvi pobrati eno od dveh palčk, je zmagovalec, saj bo zadnjo palčko pobral nasprotni igralec. Še ena končna pozicija je ta, kjer sta v eni vrstici po dve paličici (desno na Sliki 4). Ni važno, katero bo igralec vzel, gotovo bo zmagal, razen če vzame obe paličici. Čim pridemo do ene od teh zaključnih pozicij, nehamo igrati po pravilu NIM vsote in poberemo toliko, da bomo zmagali.

Slika 4

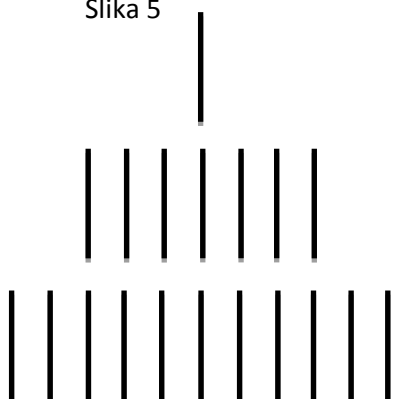


Zadnje pozicije na primeru NIM igre iz filma.

Različica 2

Kako pa zmagamo v različici igre, pri kateri začetna vsota NIM ni nič (Slika 5, Tabela 3)? V tem primeru igramo prav tako, kot v običajni igri, le da ima večjo možnost za zmago tisti, ki igra prvi, saj lahko ta igralec s prvo potezo (prvim odvzemanjem) pridobi NIM vsoto nič in če po tem principu nadaljuje, kot je opisano že v prejšnjem primeru, lahko zagotovo zmagaja.

Slika 5



Začetna NIM vsota je različna od nič.

Tabela 3

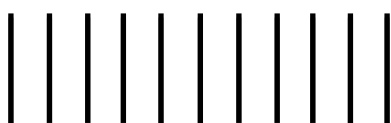
ŠTEVILO	8	4	2	1
PO KOLIKOKRAT	0	0	0	1
	0	1	1	1
	1	0	1	1
	0	0	0	0
NIM VSOTA	1	1	0	1

Primer računanja NIM vsote, če začetna NIM vsota ni nič.

Različica 3

Če imamo poljubno število paličic le v eni vrstici (Slika 6), je igra zelo enostavna, vendar dolgočasna. Če zmaga tisti, ki pobere zadnjo palčko in lahko igralca pobirata poljubno število paličic, je zmagovalec tisti, ki igro začne saj lahko pobere vse paličice. Če pa je zmagovalec tisti, ki ne pobere zadnje paličice, prav tako zmaga tisti, ki začne, saj lahko pobere vse razen ene paličice.

Slika 6



Paličke so v eni vrsti

Tabela 4

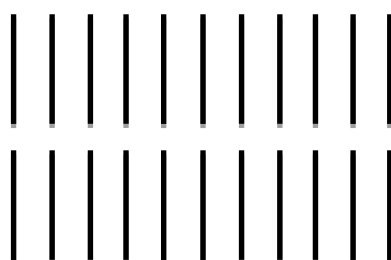
ŠTEVILO	8	4	2	1
PO KOLIKOKRAT	1	0	1	1
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
NIM VSOTA	1	0	1	1

Primer računanja NIM vsote iz filma.

Različica 4

Pri tej različici je pravilo enako kot pri prvotnem primeru iz filma, igralca jemljeta poljubno število paličic, vendar le iz ene vrstice. NIM vsota je 0. Posledično zmaga igralec, ki ne začne in vzdržuje NIM vsoto 0 z uporabo dvojiškega sistema.

Slika 7



Različica števila štiri.

Tabela 5

ŠTEVILO	8	4	2	1
PO KOLIKOKRAT	1	1	0	1
	1	1	0	1
	0	0	0	0
	0	0	0	0
NIM VSOTA	0	0	0	0

Primer računanja NIM vsote iz filma.

Različica 5

Ta različica (Slika 8) je precej preprosta, saj je takoj razvidno, kdo bo zmagal. Če zmaga tisti, ki je pobral zadnjo palčko, bo zmagovalec tisti, ki bo drugi na vrsti. Če pa zmaga tisti, ki ne pobere zadnje palčke, pa je zmagovalec igralec, ki igro začne.

Slika 8



V vsaki vrstici ena palčka.

Tabela 6

ŠTEVILO	8	4	2	1
PO KOLIKOKRAT	0	0	0	1
	0	0	0	1
	0	0	0	1
	0	0	0	1
NIM VSOTA	0	0	0	0

Primer računanja NIM vsote iz filma.

UGOTOVITVE

Po raznovrstnih poskusih sva prišli do ugotovitve, da je pri igranju iger NIM za zmago potrebno uporabljati nekatere lastnosti dvojiškega sistema in računati NIM vsoto. Če oba igralca poznata pravilo za zmago, je zmagovalec tisti, ki v primeru, da je NIM vsota na začetku igre 0, ne začne igre. Če NIM vsota na začetku igre ni nič, potem bo zmagal tisti, ki igro začne. To pravilo velja le ob zahtevi igre, da zmaga tisti igralec, ki ne pobere zadnje palčke. Če pa igramo po pravilu, da zmaga igralec, ki pobere zadnjo palčko, je postopek za zmago ravno obraten. Kadar je NIM vsota na začetku igre nič, bo zmagal tisti igralec, ki igro začne. Če pa NIM vsota na začetku igre ni nič, je zmagovalec tisti, ki ne začne igre. V obeh različicah pravila odvzemanja zadnje palčke pa ima več možnosti za zmago tisti igralec, ki pozna poleg uporabe dvojiškega sistema tudi zaključne pozicije, iz katerih je razviden zmagovalec.

Igra NIM nama je omogočila uporabo matematičnega znanja in logičnih premislekov. Spoznali sva strategijo igre, v kateri lahko vnaprej uganemo zmagovalca. Hkrati je lahko preiskovalni pristop k strategiji reševanja te igre ideja za iskanje ugodnih strategij za igranje še katere igre, kar morda raziščeva kdaj drugič.

VIRI

[1] Last year in Marienbad, www.imdb.com/title/tt0054632/

[2] Primer igre <http://www.smart-kit.com/s7879/>

[3] www.dmfa.si/Seminarji/2006/Seminar2006_MJUvan.pdf

[4] Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi, M. Suban in drugi, Zavod RS za šolstvo, Ljubljana 2013, str. 158, Katja Kmetec, Igra s slamicami