»Mladi za napredek Maribora 2014«

31. srečanje

SKRIVNOSTI PASCALOVEGA TRIKOTNIKA

Področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Avtor: LAN GLIGORIĻ , BLAĢ PRIDGAR

Mentor: JOĢICA ĠPEC

Ġola: OĠ TONETA Ļ UFARJA MARIBOR

2014, Maribor

»Mladi za napredek Maribora 2014«

31. srečanje

SKRIVNOSTI PASCALOVEGA TRIKOTNIKA

Področje: Matematika

Raziskovalna naloga

Prostor za nalepko

2014, Maribor

Vsebina

1. POVZETEK 5
2. ZAHVALA 6
3. UVOD 7
4. POZNAVANJE TRIKOTNIKA PRED PASCALOM 8
5. ŽIVLJENJE IN DELO BLEISA PASCALA 9
6. POVEZAVA MED PASCALOVIM TRIKOTNIKOM IN POTENCAMI 10
    6. 1 Pasaclov trikotnik in potence števila 11 11
    6. 2 Pascalov trikotnik in potence števila 2 12
7. FIBONACCIJEVO ZAPOREDJE 13
8. TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA 14
9. TETRAEDERSKA ŠTEVILA 15
10. PASCALOV TRIKOTNIK IN PRAŠTEVILA 16
11. ŠKORENJČKI 17
12. ROŽICE 18
13. MEDPREDMETNE POVEZAVE 19
    13. 1 Čebele in Pascalov trikotnik 19
    13. 2 Formula za benzen – nastanek koronena 20
    13. 3 Triki s kartami 22
14. VZORCI 23
15. PRAKTIČNO DELO V RAZREDU 25
16. METODOLOGIJA DELA 28
17. REZULTATI IN INTERPRETACIJA 29
18. PRILOGE 30
19. ZAKLJUČEK 32
19. LITERATURA 33

KAZALO SLIK

Slika 1: Zgradba Pascalovega trikotnika 7
Slika 2: Stari kitajski trikotnik........ 8
Slika 3: Potence števila 11........ 11
Slika 4: Potence števila 2........ 12
Slika 5: Fibonaccijevo zaporedje........ 13
Slika 6: Trikotniška števila........ 14
Slika 7: Struktura tetraedra 15
Slika 8: Vrstice praštevil 16
Slika 9: Škorenjčki 17
Slika 10: Rožice........ 18
Slika 11: Satovje čebel 19
Slika 12: Formula za benzen 20
Slika 13: Molekula koronena 21
Slika 14: Molekula benzpirena 21
Slika 15 : Trikotnik iz kart........ 22
Slika 16: Delitelji števila 3 23
Slika 17: Pobarvani večkratniki števila 4 23
Slika 18: Zelena liha števila, rdeča soda števila 24
Slika 19: Trikotnik Sierpinskega 24
Slika 20: Začetek dela v razredu 25
Slika 21: Zapisano pravilo 26
Slika 22: Barvanje vzorcev 26
Slika 23: Iskanje škornjev in rožic 27
Slika 24. Nekaj končnih izdelkov........ 27
Slika 25: Utrinki iz delavnice........ 28

KAZALO TABEL

Tabela 1: Potence dvočlenika........ 10
Tabela 2: Povezava med trikotniki in žogicami 14
Tabela 3: Tetraederska števila........ 15

1. POVZETEK

Blaise Pascal je bil zelo nadarjen na področju matematike, fizike, filozofije in geometrije. Raziskovala bova Pascalov trikotnik, ki naju je pritegnil zaradi vseh lastnosti. Poiskala bova čim več vzorcev, raziskala čim več lastnosti, ki jih skriva, ter povedala tudi nekaj o povezavi med Pascalovim trikotnikom, računanjem, naravo in ostalimi predmeti.

Omenjeni trikotnik je sestavljen je iz števil in čeprav se mu reče trikotnik, nima ne obsega, ploščine, stranic ali oglišč. Na vrhu je eno samo število, število 1, v drugi vrstici sta dve števili in tako v vsaki naslednji eno število več. Vsa leva in desna skrajna števila so enice. Vsa preostala števila pa dobimo tako, da seštejemo števili nad iskanim številom. Določanje se lahko nadaljuje navzdol neskončno daleč.

Raziskovala sva s pomočjo zbrane literature iz različnih virov. Vzorce sva poiskala s pomočjo barvanja števil, zaporedja in skupne lastnosti števil. Praktični del (iskanje lastnosti in vzorcev) sva izvedla pri šestošolcih.

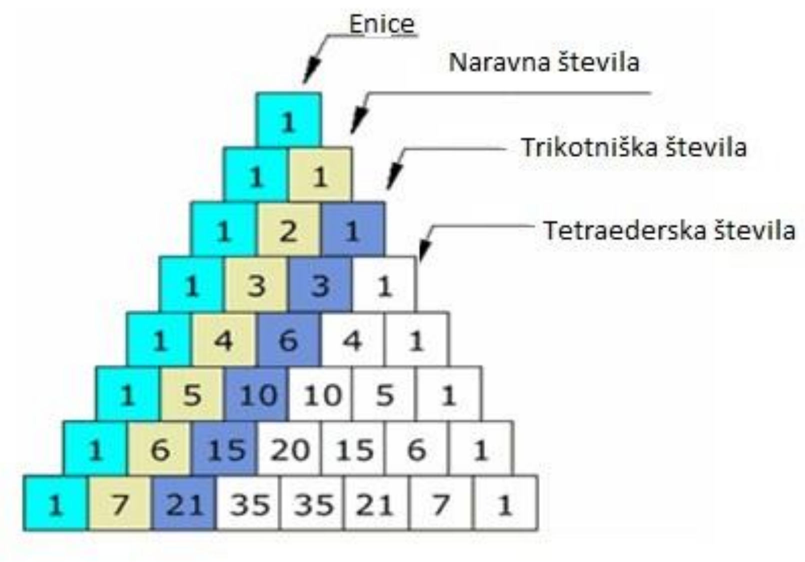
V izziv nama je bilo poiskati čim večje število vzorcev in lastnosti.

2. ZAHVALA

Zahvaljujeva se najini mentorici za pomoč pri razumevanju vsebine naloge. Zahvaljujeva se tudi najinim staršem, ki so naju vzpodbujali pri delu, ki je bilo včasih zelo naporno, ter učiteljici kemije, ki nama je posredovala literaturo v zvezi s kemijo. Prav tako bi se rada zahvalila tudi 6. b razredu za odlično sodelovanje pri uri in učiteljici slovenščine za lektoriranje.

3. UVOD

Pascalov trikotnik je sestavljen iz števil. Je v obliki trikotnika, na vrhu, skrajno desno in skrajno levo, ima v vsaki vrsti enke, vsako naslednje število pa dobiš tako, da seštejeÅ¡ obe števili nad njim. Tako se Pascalov trikotnik lahko širi v neskončnost. Če pogledamo Pascalov trikotnik, lahko vidimo, da so v prvi diagonali le enke, v drugi števna števila, v tretji so trikotna števila, v četrti pa so že manj znana tetraedrska števila. (Bentley, 2010, str. 181)



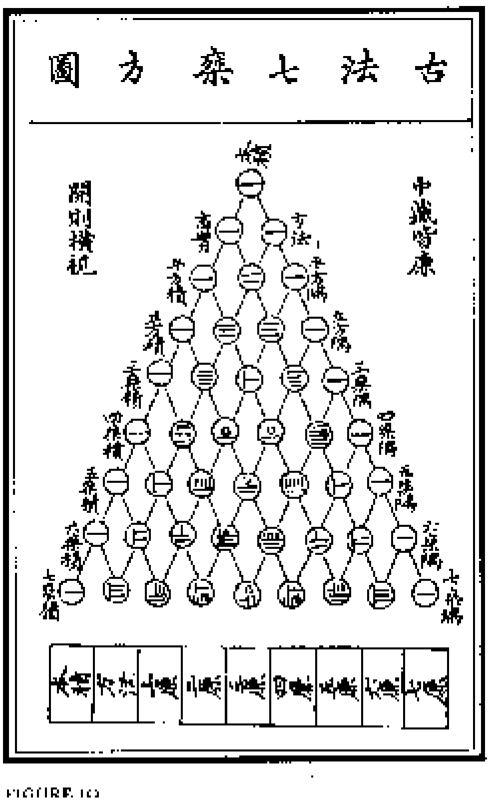
(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 1: Zgradba Pascalovega trikotnika

4. POZNAVANJE TRIKOTNIKA PRED PASCALOM

Čeprav danes vsi vemo, da je Pascalov trikotnik poimenovan po Blisu Pascalu, ga ni sam odkril (Bentley, 2010, str. 181). Dokazano je, da so ta trikotnik, sestavljen iz števil, poznali na Kitajskem že okoli 350 let pred Pascalom. To teorijo omenja kitajski matematik Jang Hui, ki je ta trikotnik poznal že do sedme vrstice (Pavlič, 1998, str. 29).

Seveda ga takrat niso poznali še tako dobro in niso vedeli, koliko skrivnosti skriva v sebi. V bistvu so ga takrat uporabljali za računanje binomskega izreka, kot je Zhu Shije, kitajski matematik, napisal v svoji knjigi Natančno ogledalo štirih elementov (Pavlič, 1994/1995, str. 129).



(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 2: Stari kitajski trikotnik

5. ŽIVLJENJE IN DELO BLEISA PASCALA

Blaise Pascal se je rodil 19. 6. 1623 v Franciji. Pri treh letih mu je umrla mati, tako da ga je vzgojil in izobrazil oče (pravnik in amaterski matematik). Oče je menil, da se Blaise ne sme učiti matematike vse do 15. leta starosti, zato je iz hiše odstranil vse matematične knjige. Morda je bil to bister načrt očeta ali pa zgolj naključje, saj je s tem Blaise postal bolj radoveden, kakšen je ta prepovedani predmet, in se tako sam v prostem času pričel učiti geometrijo. Pri dvanajstih letih je sam odkril vsoto notranjih kotov v trikotniku (180 stopinj) in jo enačil z vsoto dveh pravih kotov. Kmalu je Blaise očeta spremljal na sestanke matematikov in tam poročal o svojih izrekih. Pri dvaindvajsetih letih je odkril mehansko računalo (paskalin), s katerim je očetu pomagal pri preračunavanju valut (Bentley, 2010, str. 179).

Pascala so velikokrat opisovali kot »moža slabotne postave z glasnim glasom in nekoliko nadutim obnašanjem« in kot »prezgodaj zrelega in trmasto vztrajajočega perfekcionista, ki je bil tako prepirljiv, da je skoraj nadiral ljudi, hkrati pa je skušal biti pohleven in skromen« (Bentley, 2010, str. 180).

Nesrečni dogodek leta 1654, ko se je Pascal s konjsko vprego prevrnil in komaj ostal živ, pa je močno spremenil nadaljnji potek njegovega življenja. V njem je namreč zaznal skrivnostno opozorilo, da so njegove matematične dejavnosti vse prej kot po Božji volji. Poslej se je posvetil izključno premišljevanju o veri in Bogu. Zapisal je tudi: »Če Bog ne obstaja, potem človek ne izgubi ničesar, če verjame vanj. Če pa obstaja, izgubi vse, če ne verjame vanj« (Bentley, 2010, str. 180). Lotil se je pisanja zagovora krščanstva, a je njegovo delo ostalo nedokončano. Prijatelji so po njegovi smrti zbrali gradivo na lističih in ga izdali pod naslovom Misli. Umrl je 19. 8. 1662 v Franciji. Pascalov trikotnik ni odkril sam Pascal, vendar se imenuje po njem, saj je mnogo globje kot predhodniki raziskal teorijo trikotniških števil (Bentley, 2010, str. 181, 182).

6. POVEZAVA MED PASCALOVIM TRIKOTNIKOM IN POTENCAMI

Tabela 1: Potence dvočlenika

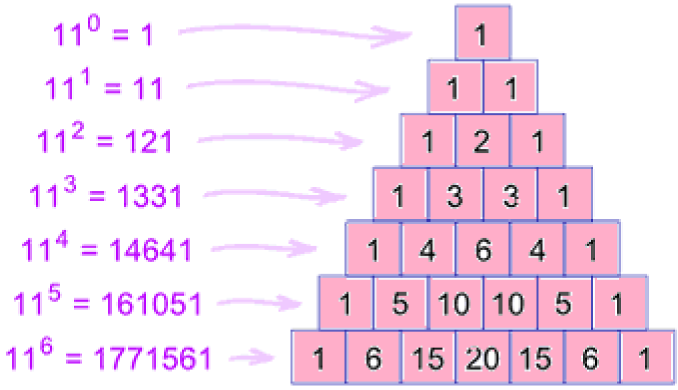
n (eksponent)	Izračunana potenca dvočlenika	Izpisani koeficienti, ki nam predstavljajo Pascalov trikotnik
n = 0	$(a+b)^0 = 1$	1
n = 1	$(a+b)^1 = 1a + 1b$	1 1
n = 2	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
n = 3	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
n = 4	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1 4 6 4 1
n = 5	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$	1 5 10 10 5 1
n = 6	$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$	1 6 15 20 15 6 1

Pri potenciranju enačbe $(a+b)^0$ dobimo rezultat 1, kar je prva vrstica Pascalovega trikotnika. Ko potenciramo enačbo $(a+b)^1$, pa dobimo $a+b$ oziroma $1a+1b$, koeficenta pa predstavljata drugo vrstico Pascalovega trikotnika. To nam lahko pomaga pri potenciranju tudi višjih potenc, saj imamo že določene koeficiente (Bentley, 2010, str. 182).

»Shema števil, ki smo jih zapisali v trikotno obliko, se imenuje Pascalov trikotnik, števila pa so binomski koeficienti« (Stöcker, 2006, str. 31). Zgodovinarji domnevajo, da so to shemo poznali že v stari kitajski in indijski civilizaciji (Bentley, 2010, str. 182, 183).

Pascalov trikotnik pa nam lahko pomaga pri potencah tudi drugih števil.

6. 1 Pasaclov trikotnik in potence števila 11



(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

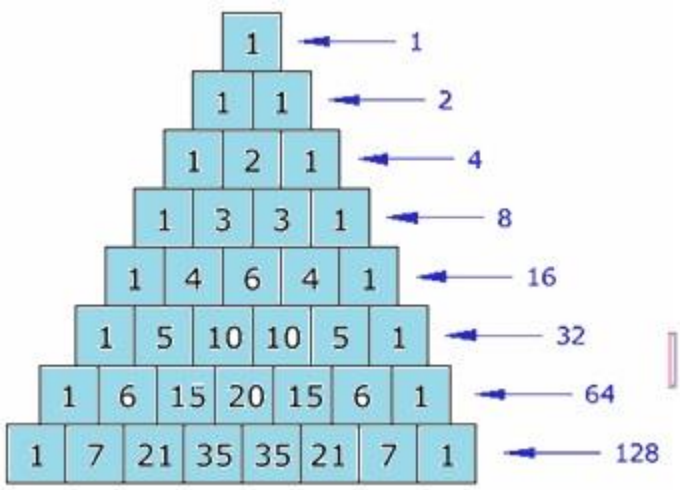
Slika 3: Potence števila 11

Pri potenciranju števila 11^0 dobimo rezultat 1, kar je enako prvi vrstici Pascalovega trikotnika, pri potenciranju števila 11^1 dobimo rezultat 11, kar lahko razberemo iz druge vrstice trikotnika. Tako se nadaljuje do pete vrstice oziroma potence 11^4, potem pa se pojavijo prve desetice. Določanje postane sedaj zahtevnejše, saj moramo vsa desetiška števila prestaviti k številu pred njim. Tako se na primer v šesti vrstici iz leve desetke 1 premakne k petki pred njo in nastane 6, 1 iz desne desetke pa se 1 premakne k 0, ki je ostala od leve 10. Tako nastane število 161051, kar je enako potenci 11^5 (Milošević, Klavžar, 1986/1987, str. 106).

6. 2 Pascalov trikotnik in potence števila 2

Pascalov trikotnik v sebi skriva tudi rešitve za potence števila 2. Kot vemo, je rezultat vsakega števila na 0 enako 1, kar je prva vrstica trikotnika. Vemo tudi, da je potenca nekega števila na 1 enaka številu, zato pri potenci 2^1 dobimo 2. Število dve pa lahko iz Pascalovega trikotnika dobimo tako, da seštejemo obe števili v drugi vrstici (1 in 1). Če seštejemo še števila iz tretje vrstice, dobimo število 4, kar je enako potenci 2^2. S to metodo lažje izračunamo višje potence števila 2 (http://www.os-brinje.si/index.php/matematika/izdelki-ucencev/65-pouk/matematika/782-pascalov-trikotnik).

.

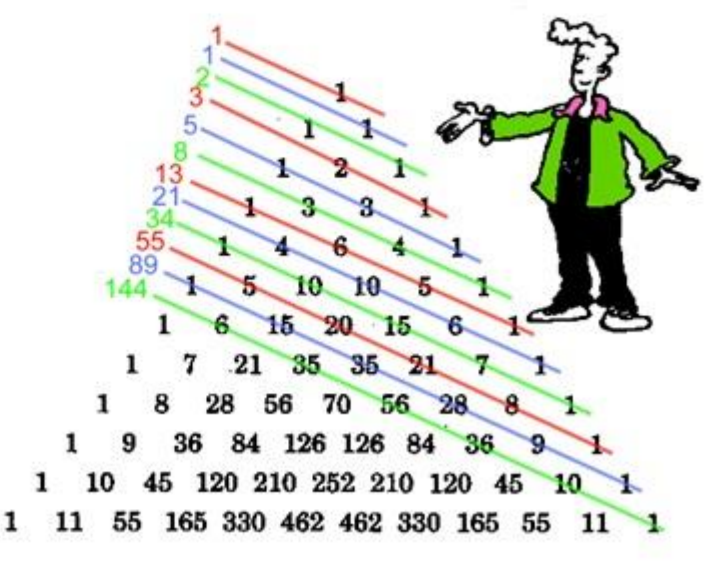


(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 4: Potence števila 2

7. FIBONACCIJEVO ZAPOREDJE

Fibonaccijevo zaporedje se začne z 1, naslednje število pa dobiš tako, da seštaješ obe prejšnji števili. Ker pred prvo 1 ni števila, je tudi naslednje število 1. Tretje število dobimo tako, da seštejemo obe enici pred njim. Dobimo dve. Še naslednje število je torej 3, nato 5 in tako dalje. Če zapišemo prvih nekaj števil v tem zaporedju, dobimo: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ..., to zaporedje pa lahko dobimo tudi s pomočjo Pascalovega trikotnika (Bentley, 2010, str. 76).



(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=eCjhUpbbB5DMswbB8IDABQ&ved=0CCcQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 5: Fibonaccijevo zaporedje

Če v trikotnik vrišemo neke vrste diagonale, kot kaže zgornja slika, in seštejemo vsa števila v posamezni diagonali, dobimo Fibonaccijevo zaporedje. Ker se prvi diagonali dotikata le pri enicah, sta prvi števili obe 1. Tretja diagonala se dotika dveh enic, tako da je vsota dve. Tako se nadaljuje v neskončnost.

Matematični, splošni zapis zaporedja:

(http://sl.wikipedia.org/wiki/Fibonaccijevo_%C5%A1tevilo)

$$F_n \equiv F(n) = \begin{cases} 1; & n = 0\,; \\ 1; & n = 1; \\ F(n-2) + F(n-1); & n > 1. \end{cases}$$

8. TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA

Z žogicami lahko sestavimo enakostranične trikotnike, kot kaže spodnja slika. Razmislimo, koliko žogic potrebujemo za posamezni trikotnik. S t_n označimo trikotnik, sestavljen iz prvih n žogic.

(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=eCjhUpbbB5DMswbB8IDABQ&ved=0CCcQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 6: Trikotniška števila

Tabela 2: Povezava med trikotniki in žogicami

trikotnik	Število žogic
t_1	1
t_2	3
t_3	6
t_4	10
t_5	15
t_{10}	55

Trikotniško število t_n je *vsota prvih n zaporednih naravnih števil.* Opazimo, da velja:

$$t_1 + t_2 = 4,\ t_2 + t_3 = 9,\ t_3 + t_4 = 16,\ ......,\ t_{n-1} + t_n = n^2$$

Trikotniška števila v matematiki so tista števila, ki predstavljajo število objektov, iz katerih lahko oblikujemo enakostranični trikotnik (Grasselli, 1986/1987, str. 170, 171). V Pascalovem trikotniku jih najdemo v tretji diagonali. (Glej sliko 1.)

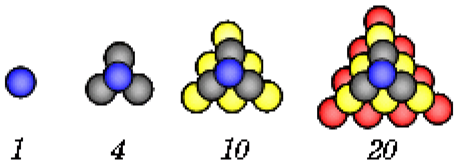
9. TETRAEDERSKA ŠTEVILA

Trikotnike, ki smo jih sestavili iz žogic v prejšnjem poglavju, lahko polagamo drug na drugega in sestavljamo tetraedre. Zopet preštejemo žogice v posameznem tetraedru. S T_n označimo tetraeder, sestavljen iz prvih n trikotnikov.

Tabela 3: Tetraederska števila

tetraeder	število žogic
T_1	1
T_2	4
T_3	10
T_4	20
T_5	35
T_{10}	56

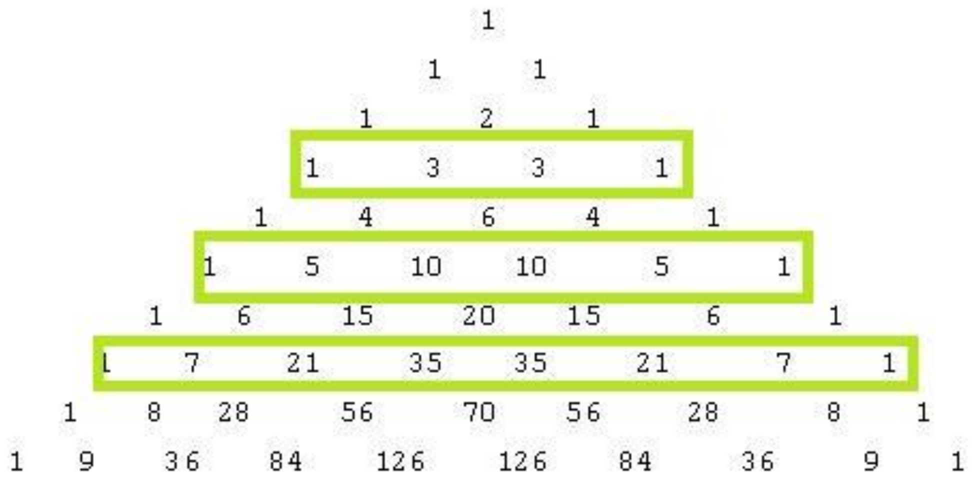
Tetraederska števila najdemo v Pascalovem trikotniku v četrti diagonali (Glej sliko 1.).



(http://www.google.si/imgres?biw=1708&bih=745&tbm=isch&tbnid=RPO6yFKVMlef-M%3A&imgrefurl=http%3A%2F%2Fkeisan.casio.com%2Fexec%2Fsystem%2F1223963801&docid=0YR1-nIDg41U8M&imgurl=http%3A%2F%2Fkeisan.casio.com%2Fkeisan%2Flib%2Freal%2Fsystem%2F2006%2F1223963801%2Ftetrahedral%252520number.gif&w=231&h=86&ei=6x_oUpaDA83MswaG7YC4Ag&zoom=1&ved=0CGYQhBwwBw&iact=rc&dur=778&page=1&start=0&ndsp=23)

Slika 7: Struktura tetraedra

10. PASCALOV TRIKOTNIK IN PRAŠTEVILA



(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 8: Vrstice praštevil

Pri dolgem opazovanju in raziskovanju števil v Pascalovem trikotniku bi lahko morda marsikdo že obupal, misleč: »Saj ničesar več ne skriva.« A vztrajnost in trud pripeljeta do novih rezultatov. V nobeni izmed uporabljenih literatur ni zaslediti naših naslednjih ugotovitev.

Če enko na vrhu trikotnika štejemo kot vrstico 0, ostale vrstice pa zaporedoma poimenujemo z naravnimi števili, potem z raziskovanjem odkrijemo še en zanimiv vzorec, pri katerem so v določenih vrsticah le večkratniki zaporednega števila te vrstice (enic ne štejemo). Na primer: v 3. vrstici sta dve trojki, v 7. so števila 7 (produkt števila 7 in 1), 21 (produkt števila 7 in 3) in 35 (produkt števila 7 in 5). Ugotovimo, da se to pojavlja v vrsticah: 3, 5, 7, 13, 17, 19 …, torej v vrsticah praštevil.

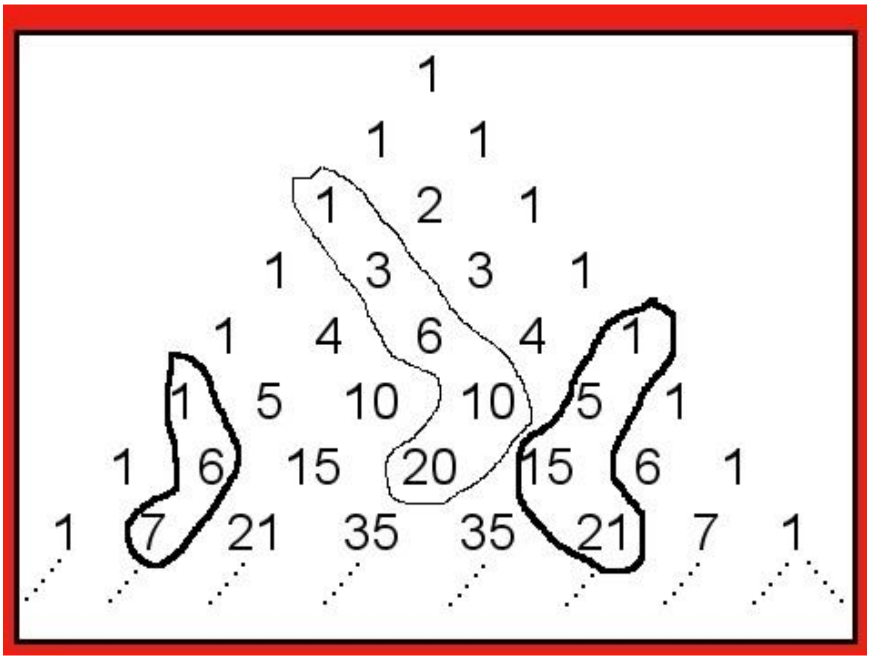
Ob prebiranju literature zaslediš veliko števil, ki se skrivajo v trikotniku (trikotniška, tetraederska …). Osnovnošolca, ki v šoli tako rekoč zelo pogosto sliši o praštevilih, raziskovanje pritegne do vprašanja: “Kaj pa praštevila, kje se ta "skrivajo" v Pascalovem trikotniku?” Tako sva se podrobneje osredotočila na to temo, iskala sva praštevila v trikotniku s poskušanjem, barvanjem, računanjem, in odkrila zgornjo lastnost.

Najverjetneje je kateri izmed slavnih matematikov to povezavo že odkril, vendar je nisva našla v nobeni literaturi.

11. ŠKORENJČKI

V Pascalovem trikotniku se včasih lahko tudi malo poigramo. Vsi poznamo božične škornje, ki jih radi obešamo, in čakamo, da bodo napolnjeni z želenimi darili. Oblike škornja lahko najdemo tudi v Pascalovem trikotniku. Škorenjčke je potrebno vedno obesiti na zunanje število ena. Vsota vseh števil v zgornjem delu škornja je enaka številu v stopalu (https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=9jjqUu_oKsbFswav3YGoCg&sqi=2&ved=0CCUQsAQ&biw=1366&bih=667).

Poglejmo spodnje primere:



(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 9: Škorenjčki

1 + 6 = 7

1 + 3 + 6 + 10 = 20

1 + 5 + 15 = 21

Takih škorenjčkov je Pascalovem trikotniku neskončno.

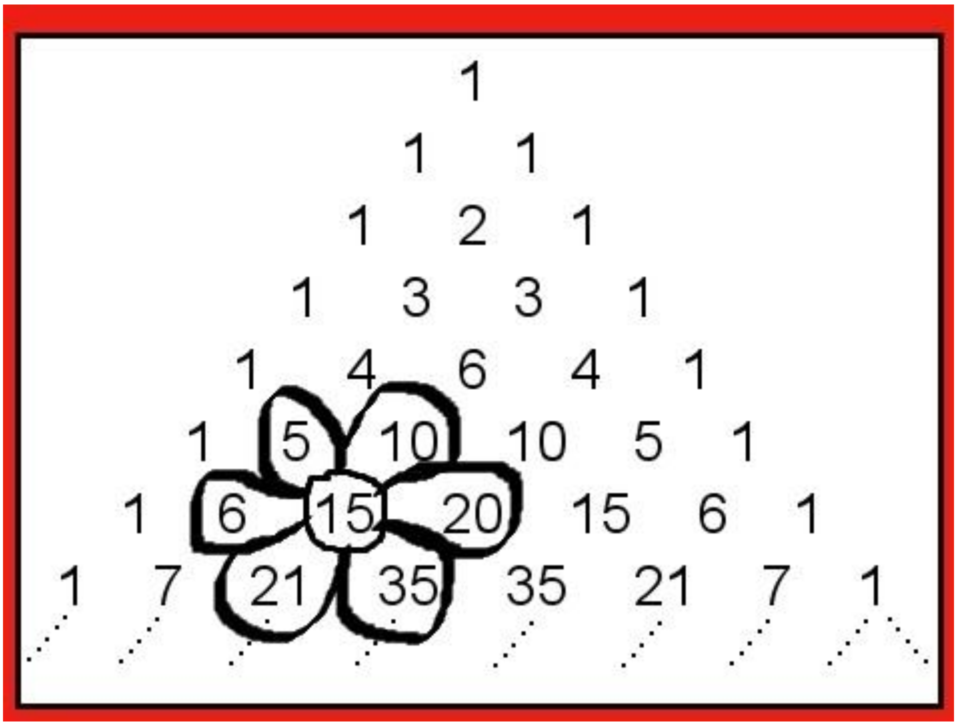
12. ROŽICE

V trikotniku si izberemo poljubno število in vidimo naslednje:

- Vsota listov nad izbranim število je enaka izbranemu številu (5 + 10 = 15),
- Razlika skrajno levih in skrajno desnih dveh listov je tudi enaka izbranemu številu.

  35 – 20 = 15

  21 – 6 = 15



(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

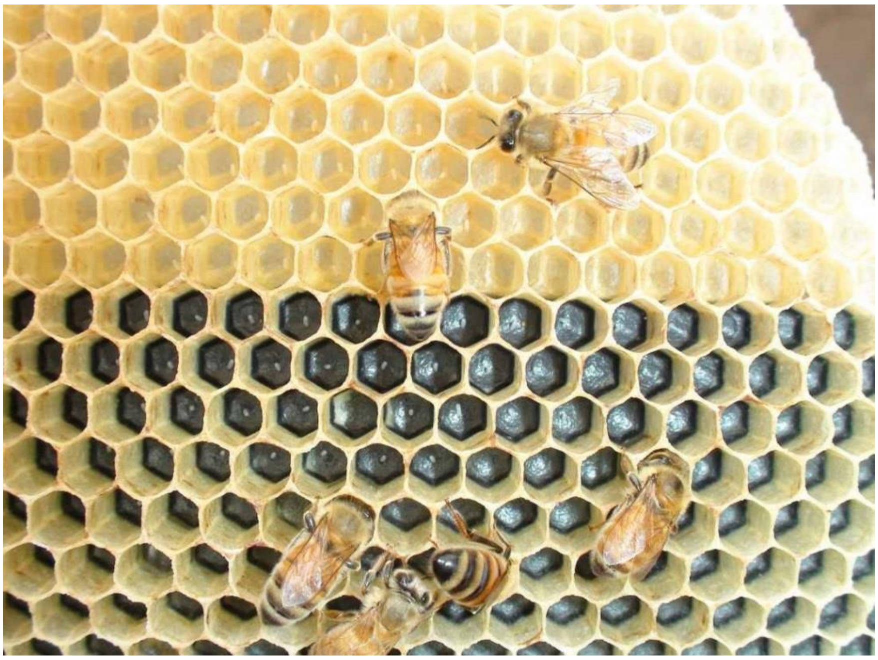
Slika 10: Rožice

Tudi takih rožic je v Pascalovem trikotniku neskončno.

13. MEDPREDMETNE POVEZAVE

13. 1 Čebele in Pascalov trikotnik

Velikokrat je Pascalov trikotnik prikazan tako, da so števila obdana s šestkotniki, kar spominja na satovje čebel. »Za graditev satja čebele uporabljajo voščene ploščice, ki nastajajo iz voska, izločenega iz voskovnih žlez na spodnji strani zadka. Ploščice prenašajo k čeljustim in jih prignetejo k nastajajočemu satju. Končno obliko celice naredijo z glajenjem satja s čeljustmi in sprednjim parom nog. Stene celic gradijo do te stopnje, da s konci tipalnic zaznajo upogibanje celičnih sten« (Tautz, 2008, str. 157–205). Vosek vlečejo iz zgornjih dveh šestkotnikov, pod katerim nastane nov, torej vsota zgornjih dveh je spodnji šestkotnik.
Posamezno celico gradi več čebel. Čebele, ki ne izločajo voska, lahko sodelujejo pri preoblikovanju satja in izdelovanju mednih pokrovcev.

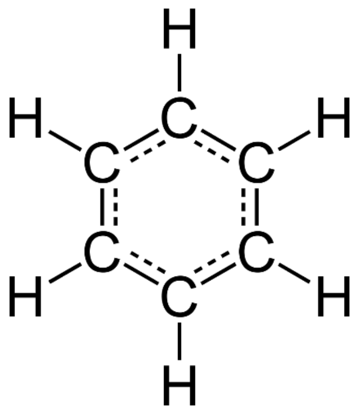


(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=eCjhUpbbB5DMswbB8IDABQ&ved=0CCcQsAQ&biw=1366&bih=667#q=satovje+%C4%8Debel&tbm)

Slika 11: Satovje čebel

13. 2 Formula za benzen – nastanek koronena

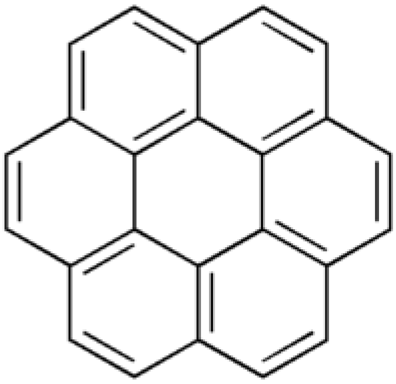
Benzen je znan od leta 1852. Odkritje njegove strukture je bilo zelo težavno. Najbolj znana je njegova Kekulejeva formula, ki ima obliko pravilnega šestkotnika, pri čemer hitro pomislimo na povezavo s Pascalovim trikotnikom (Tišler, 1982, str. 38).



(https://www.google.si/search?q=benzene&espv=210&es_sm=93&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=bKroUu_lNIHkswa4koHYBA&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1366&bih=667#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AEZaIzfouS7VoM)

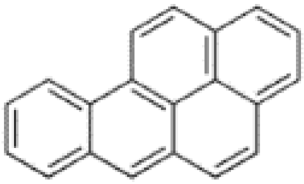
Slika 12: Formula za benzen

Molekule v kemiji se družijo in s tem se jim niža energija, kar imenujemo aromatičnost molekul. Z združevanjem molekul benzena nastanejo tako spojine, kot so naftalen, pentacen ipd. Vse te molekule se povezujejo v ravni vrsti. Z nekaterimi procesi se pa formule benzena redko povezujejo tako, da se vezi zgornjih dveh obročev združijo in nastane od spodaj ali od zgoraj nova molekula benzena (nastanejo oblike, ki jih najdemo v Pascalovem trikotniku). Se pravi "vsota" zgornjih dveh je spodnja molekula. Take zgradbe imenujemo piren, benzpiren, koronen …(Tišler, 1982, str. 44, 45).



(Tišler, 1982, str. 45)

Slika 13: Molekula koronena



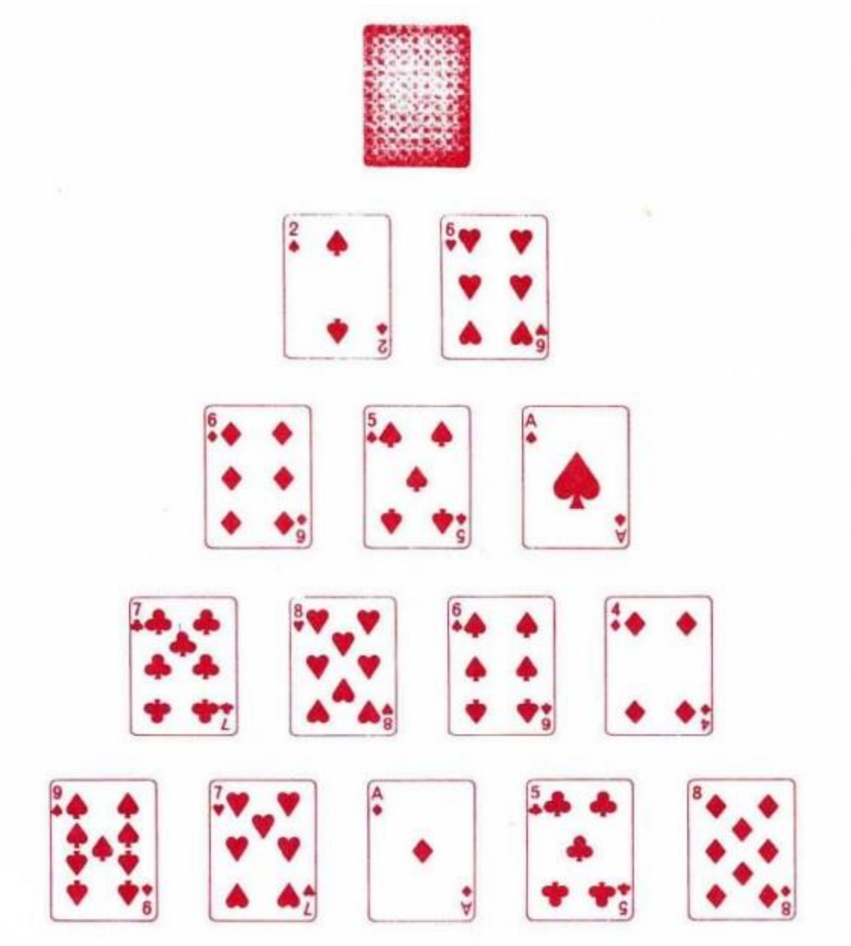
(Tišler, 1982, str. 45)

Slika 14: Molekula benzpirena

13. 3 Triki s kartami

Iz igralnih kart odstranimo vse desetke in figure, tako da ostanejo samo asi in karte do devet. Postavimo 5 kart v vrsto, nato pa nad njimi gradimo trikotnik po sledečem pravilu:

»Vsak par števil na sosednjih kartah seštejemo in če vsota preseže 9, odštejemo 9. Nad ta par kart položimo karto, katere številka je tako dobljena vsota« (Hafner, 1985/1986, str. 205). Tako lahko natančno odkrijemo, katera karta se bo skrivala na vrhu, saj je odvisna od postavitve prvih petih kart v vrsto. Torej je čisto zgornja karta funkcija spodnjih petih kart.



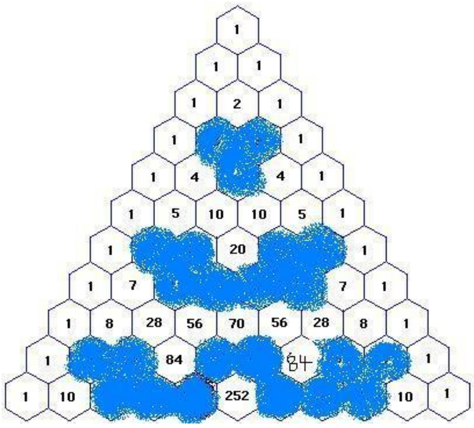
(Hafner, 1985/1986, str. 206)

Slika 15 : Trikotnik iz kart

14. VZORCI

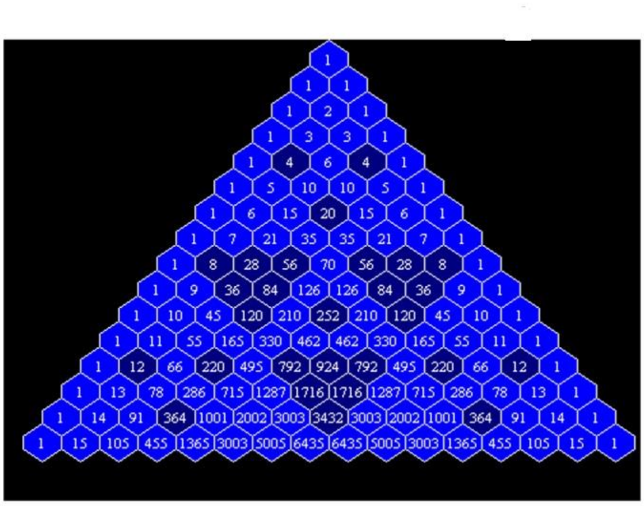
Z barvanjem izbranih števil enakih lastnosti pridemo do različnih vzorcev v Pascalovem trikotniku. Lahko bi izbrali poljubne povezave med števili, vsaka povezava nam da kak vzorec v obliki manjših trikotnikov (http://www.os-brinje.si/index.php/matematika/izdelki-ucencev/65-pouk/matematika/782-pascalov-trikotnik).

Na spodnjih slikah so prikazani vzorci z barvanjem sodih in lihih števil, vzorec pobarvanih večkratnikov števila štiri in večkratnikov števila tri.



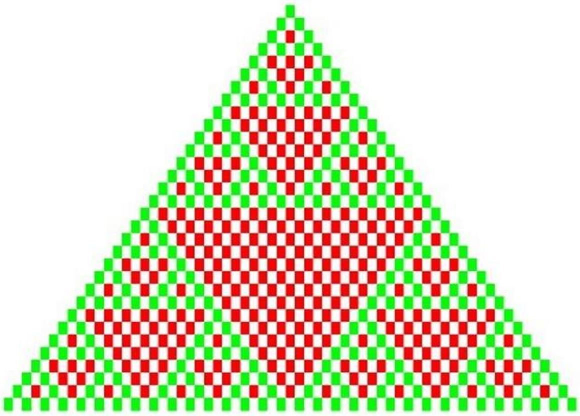
(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 16: Delitelji števila 3



(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 17: Pobarvani večkratniki števila 4



(https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667)

Slika 18: Zelena liha števila, rdeča soda števila

Če pobarvamo vsa soda števila z eno barvo in vsa liha z drugo, dobimo trikotnik Sierpinskega. Poglejmo konstrukcijo takega trikotnika.

»Vzemimo črn enakostraničen trikotnik s stranico dolžine 1, razpolovimo stranice in jih povežimo. Srednji trikotnik odstranimo tako, da bo sredina bela. Nadaljujmo s postopkom v treh črnih vogalnih trikotnikih. Postopek ponavljamo in po vsaki delitvi dobimo manjše trikotnike. Končni rezultat je tako imenovani trikotnik Sierpinskega (trikotno sito)« (Crnjac, 1993/1994, str. 130).

(Crnjac, 1993/1994, str. 130)

Slika 19: Trikotnik Sierpinskega

15. PRAKTIČNO DELO V RAZREDU

(lasten vir)

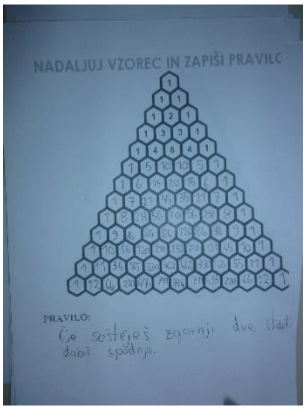
Slika 20: Začetek dela v razredu

Ob pomoči učiteljic matematike sva delavnico iskanja vzorcev in raziskovanje sheme trikotniških števil izvedla pri šestošolcih. Pred uro sva si postavila naslednji hipotezi:

HIPOTEZA 1: Učno slabši učenci ne bodo motivirani za samostojno raziskovanje.

HIPOTEZA 2: Učenci v učno boljši skupini bodo hitreje prišli do ugotovitev in lastnosti v Pascalovem trikotniku.

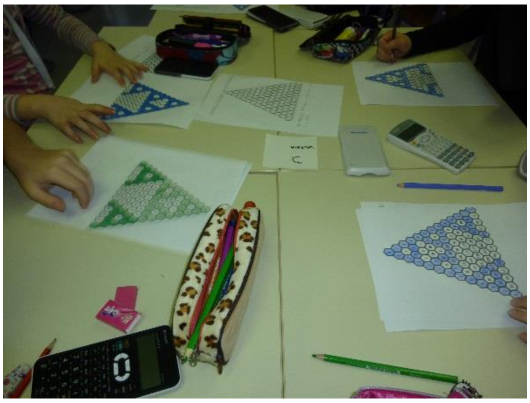
Učenci so bili razdeljeni v štiri homogene skupine glede na ocene pri matematiki. S PPT projekcijo sva prikazala življenje in delo Pascala ter njegove iznajdbe. Učencem sva pokazala prve 4 vrstice Pascalovega trikotnika. Dobili so učni list (priloga 1) in s pomočjo kalkulatorja morali sami ugotoviti in zapisali pravilo, kako se trikotnik nadaljuje. Delo sva diferencirala. Za slabšo skupino sva pripravila že izpolnjen trikotnik, v primeru, da ga učenci sami ne bi znali nadaljevati. Svoje ugotovitve so učenci poročali po skupinah. Poročali so od slabše skupine k boljši. Vse skupine so pravilo pravilno ugotovile in zapisale. Več težav pri zapisu pravila so imeli učenci slabše skupine, saj so ga oblikovali preveč nenatančno.



(lasten vir)

Slika 21: Zapisano pravilo

Po končanem raziskovanju sva pokazala nekaj možnih vzorcev. Pričelo se je nadaljnje samostojno raziskovanje in iskanje vzorcev na drugem učnem listu (priloga 2). Tudi v tem primeru sva delo diferencirala. Slabši dve skupini učencev sta barvali soda in liha števila, ostali skupini pa delitelje števila tri in delitelje števila štiri. Ob tem so ponovili še pravila za deljivost. Nastali so zanimivi vzorci različnih oblik, otroci so zelo radi sodelovali in so bili nad izdelki navdušeni. Raziskovanje jih je pritegnilo k delu in hoteli so narediti še več. S tem lahko hipotezo 1 ovržemo, ker so tudi učno šibkejši učenci bili motivirani za delo.

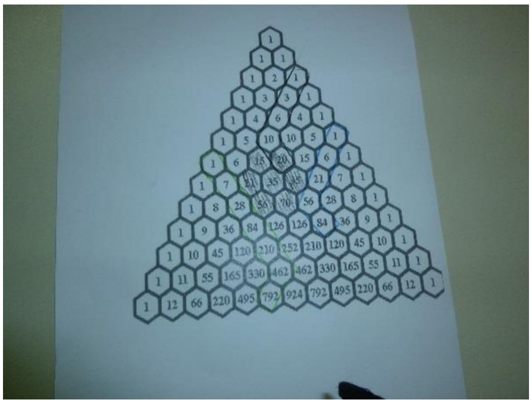


(lasten vir)

Slika 22: Barvanje vzorcev

Kasneje sva učencem pokazala nekaj slik z nogavičkami oziroma škorenjčki in rožicami. Sami so morali ugotoviti, kako oblike nastanejo, in poiskati še več oblik. Pravilo za škorenjčke so najprej ugotovili učenci slabše skupine, medtem ko si je boljša skupina delo in raziskovanje precej zakomplicirala. Rožice so hitreje našli v boljši skupini. S tem hipotezo 2 lahko le delno ovržemo.

Vsa pravila smo skupaj povzeli.



(lasten vir)

Slika 23: Iskanje škornjev in rožic

O zgradbi trikotnika so učenci povedali le, da je na straneh in na vrhu sestavljen iz samih enic in da so v drugi diagonali naravna števila. Ostalih lastnosti niso opazili. Delo je otroke zelo pritegnilo, radi so iskali lastnosti, snov jim ni bila pretežka, z delom so želeli nadaljevati tudi naslednjo uro in odkriti še več značilnosti. Tudi naju je delo učitelja pritegnilo, na tak način bi želela izvesti še več ur in morda celo narediti primerjavo med ugotovitvami v šestem in sedmem razredu kar je ideja za nadaljnjo raziskovanje in možnost preveriti **HIPOTEZO:** Sedmošolci bi poiskali več lastnosti v Pascalovem trikotniku kot šestošolci, ker imajo več znanja iz matematike, prav tako bi sedmošolci hitreje prišli do ugotovitev pri raziskovanju škorenjčkov in rožic.

(lasten vir)

Slika 24. Nekaj končnih izdelkov

(lasten vir)

Slika 25: Utrinki iz delavnice

16. METODOLOGIJA DELA

V raziskovalni nalogi je delo potekalo predvsem na raziskovanju pisnih virov in s poskušanjem ter delavnico v razredu, s katero sva želela preveriti veljavnost hipotez.

Pascalov trikotnik sva skopirala na večje liste, z barvanjem sva odkrila več vzorcev in iskala vse lastnosti trikotnika. Ugotovitve sva nato strnjene prenesla v tiskano obliko. Velika težava je zbiranje strnjenih podatkov iz različnih virov. Tako se marsikaj, kar spoznaš, izkaže za že odkrito oziroma znano.

Raziskovanje tega trikotnika je izjemno zanimivo. V šoli lahko učenci z raziskovanjem trikotnika pridejo sami do spoznanj, se navajajo samostojnega dela in praktično usvajajo znanje. Učitelji lahko pripravijo delovne liste z namigi in s kratkimi navodili, naprej pa bi delo učencev potekalo samostojno, na raziskovanju sheme trikotnika. Prav tako se lahko delo diferencira glede na sposobnosti učencev. Slabši učenci bi lahko na primer iskali vzorce, škorenjčke, rožice ipd., nadarjeni učenci pa bi že lahko odkrivali binomski izrek, Fibbonacijevo zaporedje …

Delo sva praktično izvedla z učenci šestega razreda, delo in tema sta osnovnošolce zelo pritegnila in jih spodbudila k samostojnemu raziskovanju.

17. REZULTATI IN INTERPRETACIJA

Z raziskovanjem sva odkrila:

- Povezave s potencami in Pascalovim trikotnikom, kjer nam koeficienti služijo kot pomoč pri računanju potenc, povezave so bile odkrite že zelo zgodaj in so že dobro poznane, vendar se nama je zdelo primerno, da jih omeniva.
- Vzorce ter kako se gradi trikotnik Sierpinskega. Vzorcev lahko poiščemo zelo veliko in oblike, ki jih iz njih dobimo, se presenetljive, iskanje je za otroke zanimivo in jih pritegne k delu.
- Da sta narava in matematika zelo povezani in da Pascalov trikotnik ni pomemben le v matematiki, ampak tudi na drugih področjih, da je matematika dejansko naravoslovna veda, ki v vsakdanjem življenju velikokrat pride prav.
- Trikotnik lahko prenesemo tudi na trike s kartami, ki so lahko prav zabavni.
- Sama tema je za osnovnošolce privlačna, omogoča samostojno raziskovanje in številne druge aktivnosti pri otrocih, učence motivira za delo (ovržena hipoteza 1).
- Ni nujno, da učenci v učno boljši skupini pridejo hitreje do ugotovitev in lastnosti v Pascalovem trikotniku (delno ovržena hipoteza 2).
- Samo zgradbo trikotnika in njegovih lastnosti. Predvsem naju je navdušilo odkritje v povezavi s praštevili (Glej poglavje 9.), do tega sva prišla sama, saj podobnega zapisa nisva zasledila v nobeni literaturi.

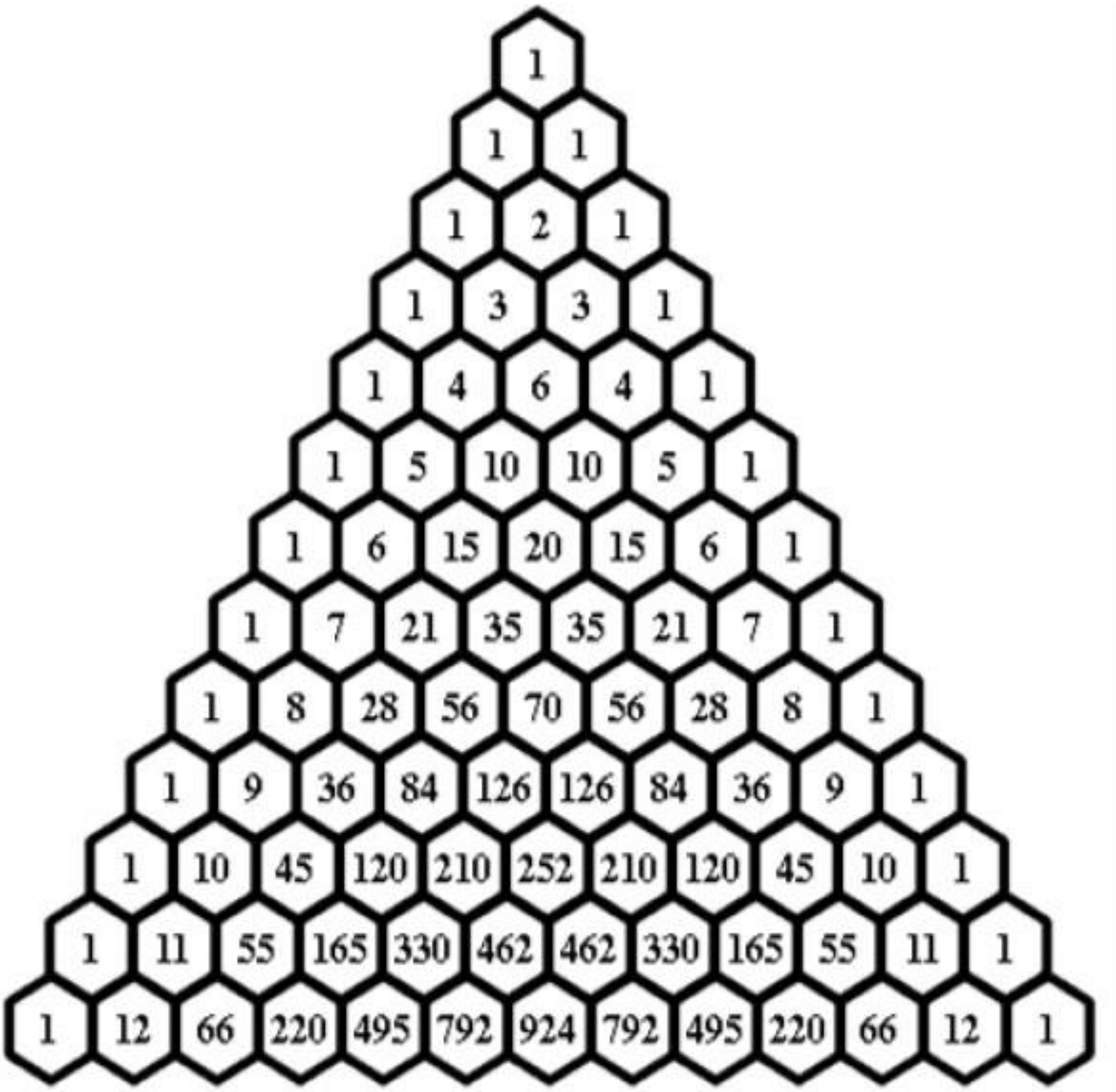
18. PRILOGE

Priloga 1:

(http://scratch.mit.edu/projects/2010380/)

PRAVILO:

Priloga 2:



(http://scratch.mit.edu/projects/2010380/)

19. ZAKLJUČEK

Že pred pričetkom dela sva se te raziskovalne naloge zelo veselila, saj sva nekaj o Pascalovem trikotniku vedela že prej. Zavedala sva se, da omenjeni trikotnik skriva veliko vzorcev, pri raziskovanju tega nadvse zanimivega matematičnega pojava pa sva odkrila še veliko več kot le vzorce. Kljub zanimivemu življenju je Blaise Pascal bil zelo produktiven matematik/znanstvenik in ta trikotnik ni njegov edini izum. Z delom, ki sva ga opravila, sva ugotovila, da si lahko s tem trikotnikom pomagamo tudi pri računanju. Zdaj veva, kako lahko s pomočjo Pascalovega trikotnika lažje izračunamo potence $(a + b)$, saj nam posamezna vrstica trikotnika pove vse koeficente določene potence. Ugotovila sva, da si lahko s Pascalovim trikotnikom pomagamo izračunati še potence števila 11 in 2. Skozi najino raziskovalno nalogo sva spoznala tudi nekatere druge matematične pojme, ki so povezani s Pascalovim trikotnikom, kot na primer: Fibonaccijevo zaporedje, trikotniška in tetraedrska števila. Odkritje o povezavi Pascalovega trikotnika in praštevili oziroma vrsticami praštevil nama daje posebno potrditev. Raziskovanje pa ni potekalo le v matematični smeri, ampak tudi v naravoslovnih povezavah s Pascalovim trikotnikom. Čebele delajo satovje v vzorcu Pascalovega trikotnika. Našla pa sva tudi povezavo med trikotnikom in kemijo, in sicer z benzenom. Trik s kartami, ki ga lahko izvedeš s pomočjo Pascalovega trikotnika, je zelo zanimiv. Raziskovanje lastnosti tega trikotnika, ki je trikotnik brez obsega in ploščine, sestavljen le iz števil, je tako lahko vedno znova velik izziv.

19. LITERATURA

- BENTLEY, P. J. 2010. Knjiga o številih: skrivnosti števil in kako so ustvarila sodobni svet. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije. Str. 76, 177-183.
- Grasselli, J., 1986/1987. Trikotniška števila. Presek, 14, 3, 170 – 174.
- Hafner, I., 1985/1986. Pascalov trikotnik in triki s kartami. Presek, 13, 4, 204 – 206.
- http://scratch.mit.edu/projects/2010380.
- http://sl.wikipedia.org/wiki/Fibonaccijevo_%C5%A1tevilo.
- http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2002/ura/marjetka/3.7.html.
- http://www.google.si/imgres?biw=1708&bih=745&tbm=isch&tbnid=RPO6yFKVMlef-M%3A&imgrefurl=http%3A%2F%2Fkeisan.casio.com%2Fexec%2Fsystem%2F1223963801&docid=0YR1-nIDg41U8M&imgurl=http%3A%2F%2Fkeisan.casio.com%2Fkeisan%2Flib%2Freal%2Fsystem%2F2006%2F1223963801%2Ftetrahedral%252520number.gif&w=231&h=86&ei=6x_oUpaDA83MswaG7YC4Ag&zoom=1&ved=0CGYQhBwwBw&iact=rc&dur=778&page=1&start=0&ndsp=23.
- http://www.os-brinje.si/index.php/matematika/izdelki-ucencev/65-pouk/matematika/782-pascalov-trikotnik.
- https://www.google.si/search?q=benzene&espv=210&es_sm=93&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=bKroUu_lNIHkswa4koHYBA&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1366&bih=667#facrc=_&imgdii=_&imgrc=AEZaIzfouS7VoM.
- https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EKboUoSLEdHDtAbfxYCgDw&ved=0CCYQsAQ&biw=1366&bih=667
  https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=eCjhUpbbB5DMswbB8IDABQ&ved=0CCcQsAQ&biw=1366&bih=667#q=satovje+%C4%8Debel&tbm.
- https://www.google.si/search?q=pascalov+trikotnik&espv=210&es_sm=93&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=eCjhUpbbB5DMswbB8IDABQ&ved=0CCcQsAQ&biw=1366&bih=667.
- Marek – Crnjac, L., 1993/1994. Poglejmo fraktale. Presek, 21, 3, 130 – 134.

- Milošević, D., M., Klavžar, S., 1986/1987. Zanimivosti v zvezi s Pascalovim trikotnikom. Presek, 14, 2, 106 – 107.
- PAVLIČ, G. 1998. Slikovni pojmovnik: matematika. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije. Str. 29.
- Pavlič, G., 1994/1995. Pascal, Fibonacci in božično drevesce. Presek, 22, 3, 129 – 132.
- STÖCKER, H. 2006. Matematični priročnik z osnovami računalništva. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije. Str. 31.
- TAUTZ, J. 2008. Čudežni svet čebel: Ljubljana: Tehniška založba Slovenije. Str. 157 – 205.
- TIŠLER, M. 1982. Organska kemija: Ljubljana: Državna založba Slovenije. Str. 38 – 45.