MLADI ZA NAPREDEK MARIBORA 2014
31. SREČANJE

Napoleonovi trikotniki

Matematika
Raziskovalna naloga

Avtor: PIA LAVUGER

Mentor: JOĢEF SENEKOVIĻ

Ġola: OĠ BOJANA ILICHA MARIBOR

Februar 2014

KAZALO

1. POVZETEK

Ste že kdaj slišali o Napoleonovih trikotnikih? Jaz tudi ne, pravzaprav sem pri matematični delavnici. Zato sem se odločila, da v raziskovalni nalogi predstavim, za katere trikotnike gre. Pred tem pokažem, katere like dobim, če pravilnim večkotnikom nad stranicami načrtam pravilne večkotnike in povežem njihova središča očrtanih krožnic v nov lik. Enak postopek nato opravim nad stranicami poljubnega trikotnika, kjer najprej načrtam enakostranične trikotnike, nato pa poskušam s poljubnimi trikotniki. Pravzaprav popolnoma poljubni niso, če želimo načrtati Napoleonov trikotnik.

2. UVOD

Najprej naj predstavim nekaj matematičnih pojmov in znanj, ki so potrebni za razumevanje lastnosti Napoleonovih trikotnikov.

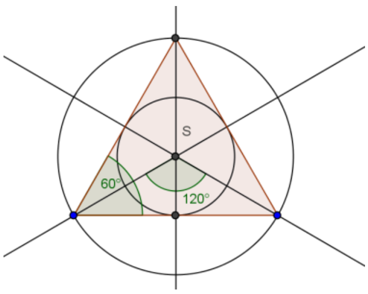
Pravilni večkotniki

Pravilni večkotniki so enakostranični liki s skladnimi vsemi notranjimi koti. Za poljuben pravilni n-kotnik velja, da ima n stranic in n notranjih (zunanjih) kotov. Vsoto vseh notranjih kotov izračunamo s formulo $(n - 2)\cdot 180°$. Vsota zunanjih kotov je vedno 360°. Vsakemu n-kotniku lahko izračunamo število diagonal s formulo $\frac{n(n-3)}{2}$.

Vsakemu pravilnemu večkotniku lahko očrtamo in včrtamo krožnico. Središči obeh krožnic sovpadata. Kot med polmeroma do dveh zaporednih oglišč večkotnika na očrtani krožnici je središčni kot. Središčni kot izračunamo s formulo $\varphi = \frac{360^{\circ}}{n}$.

Poglejmo primere pravilnih večkotnikov.

a) Pravilni trikotnik (slika 1)

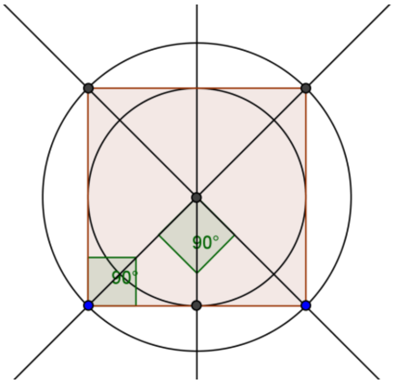


Slika 1

Zapišimo nekaj lastnosti pravilnega (enakostraničnega) trikotnika.

- višine trikotnika so hkrati tudi težiščnice.
- Vse znamenite točke trikotnika (višinska točka, težišče, središče trikotniku očrtanega kroga in središče trikotniku včrtanega kroga) sovpadajo.
- Velikost vsakega notranjega kota je 60 °, vsota notranjih kotov skupaj pa 180 °.
- Višina trikotnika, simetrala kota in simetrala stranice ležijo na isti premici.
- Formula za obseg trikotnika je $o = 3a$
- Formula za ploščino enakostraničnega trikotnika $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Pravilni štirikotnik (slika 2)

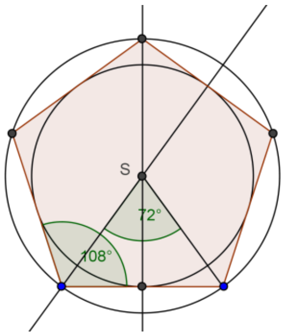


Slika 2

Zapišimo nekaj lastnosti pravilnega štirikotnika (kvadrata):

- Središče očrtane in včrtane krožnice leži na razpolovišču diagonal.
- Zunanji koti štirikotnika imajo enako velikost kakor notranji koti, 90°.
- Obseg kvadrata izračunamo s formulo $o = 4a$.
- Ploščino kvadrata izračunamo s formulo $\boldsymbol{p = a^2}$ ali $\boldsymbol{p = \frac{d^2}{2}}$.

c) Pravilni petkotnik (slika 3)

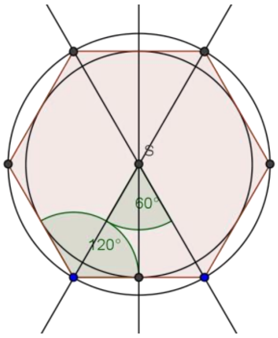


Slika 3

Zapišimo nekaj lastnosti pravilnega petkotnika:

- Ima 5 diagonal, ki med seboj niso vse skladne.
- Velikost notranjega kota je 108°.
- Formula za obseg pravilnega petkotnika $o = 5a$.
- Je osno in središčno simetričen lik.

č) Pravilni šestkotnik (slika 4)



Slika 4

Zapišimo nekaj lastnosti pravilnega šestkotnika:

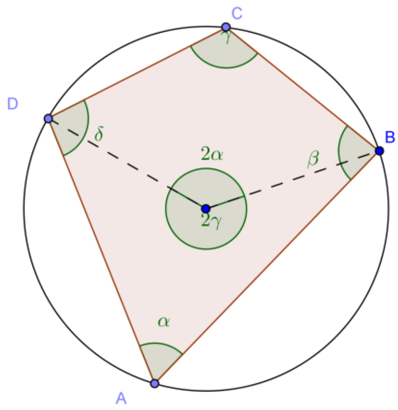
- Večkotnik ima 9 diagonal.
- Velikost notranjega kota je 120̊.
- Je osno in središčno simetričen lik.
- Obseg pravilnega šestkotnika izračunamo s formulo $o = 6a$.
- Ploščina pravilnega šestkotnika z dolžino stranice a je $p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vsak pravilni večkotnik (n-kotnik) ima naslednje lastnosti:

- Skladne vse stranice.
- Skladne vse notranje kote in skladne vse zunanje kote.
- Lahko mu očrtamo in včrtamo krožnico. Središči očrtane in včrtane krožnice sovpadata.
- Je osno in središčno simetričen lik.
- Velikost notranjega kota izračunamo s formulo $\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.
- Velikost središčnega kota izračunamo s formulo $\frac{360°}{n}$.
- Število vseh diagonal izračunamo s formulo $\frac{n(n-3)}{2}$.

Tetivni štirikotnik

Tetivni štirikotnik je štirikotnik z oglišči na krožnici, torej ima očrtano krožnico (slika 5).



Slika 5

Stranice štirikotnika so tetive. Vsota nasprotnih kotov v tetivnem štirikotniku je vedno 180°.

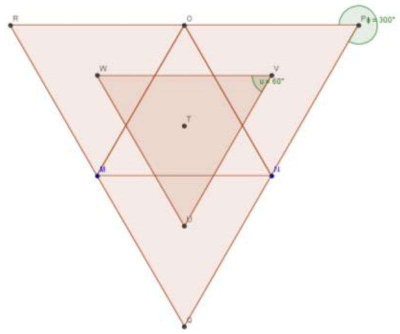
Kot BSD (središčni kot) nad daljico BD je dvakrat večji od kota BAD (obodni kot) nad isto daljico. Enako ugotovimo za kota DCB in DSB. Iz vsote $2\alpha + 2\gamma = 360°$ izračunamo, da je vsota $\alpha + \gamma = 180°$. Zato je tudi $\delta + \beta = 180°$.

3. PRAVILNI VEČKOTNIKI NAD STRANICAMI PRAVILNIH VEČKOTNIKOV

V nadaljevanju narišimo nad stranice pravilnih večkotnikov skladne pravilne večkotnike. Vsakemu narisanemu večkotniku očrtamo krožnico. Središča krožnic povežemo v lik.

3.1 Pravilni trikotnik (enakostranični trikotnik)

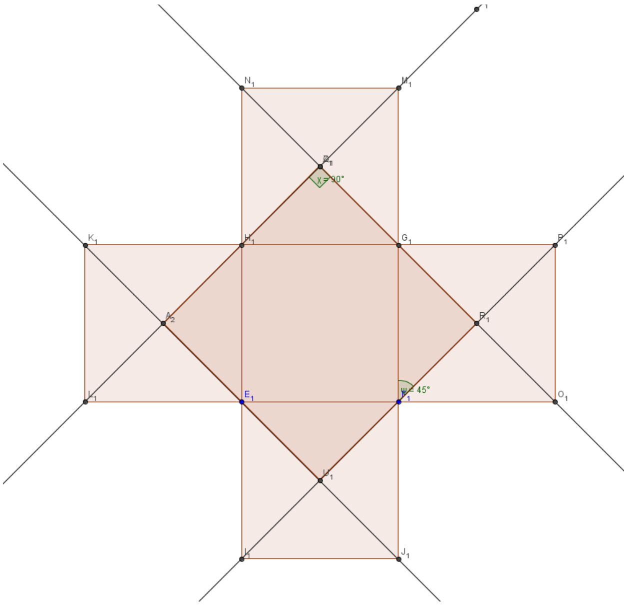
Nad stranice enakostraničnega trikotnika ABC narišemo skladne enakostranične trikotnike. Ko povežemo središča očrtanih krožnic, nastane enakostranični trikotnik, skladen s trikotnikom ABC (slika 6).



Slika 6

3.2 Pravilni štirikotnik (kvadrat)

Nad stranice kvadrata narišemo skladne kvadrate. Središča kvadratom očrtanih krožnic so oglišča novega kvadrata (slika 7).

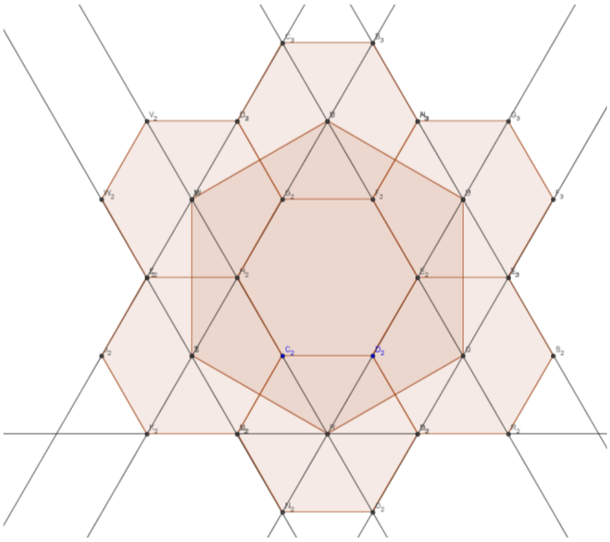


Slika 7

Dolžina stranice tako načrtanega kvadrata je enaka dolžini diagonale prvotnega kvadrata. Ploščina načrtanega kvadrata je dvakratna ploščina prvotnega kvadrata.

3.3 Pravilni šestkotnik

Nad stranice pravilnega šestkotnika načrtamo skladne pravilne šestkotnike. Ko povežemo središča očrtanih krožnic dobimo novi lik, pravilni šestkotnik (slika 8).

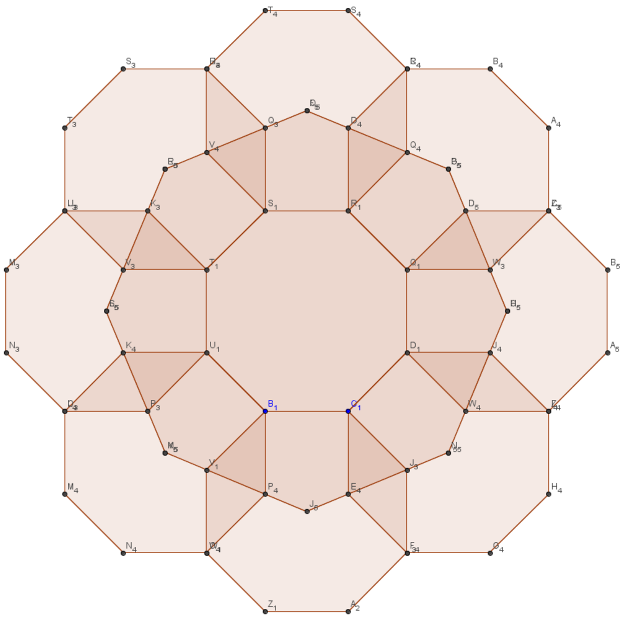


Slika 8

Dolžina stranice tako načrtanega šestkotnika je enaka premeru včrtane krožnice prvotnega šestkotnika. Ploščina tako načrtanega šestkotnika je dvakrat večja od ploščine prvotnega šestkotnika.

3.4 Pravilni osemkotnik

Nad stranice pravilnega osemkotnika načrtamo skladne osemkotnike. Središča očrtanih krožnic teh osemkotnikov so oglišča pravilnega osemkotnika (slika 9).



Slika 9

Ploščina tako načrtanega osemkotnika je sicer večja od ploščine prvotnega osemkotnika, vendar manjša od dvakratnika ploščine prvotnega osemkotnika. Skladni osemkotniki, ki jih načrtamo nad stranicami prvotnega osemkotnika se namreč prekrivajo.

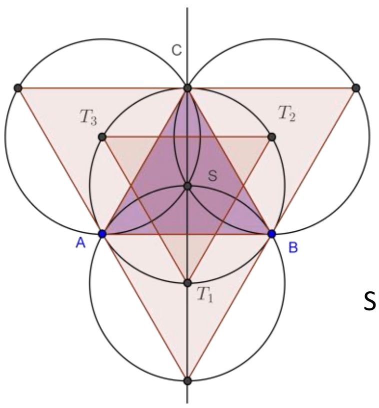
Ugotovimo, da po opisanem postopku lahko nad stranicami pravilnega večkotnika vedno načrtamo pravilni večkotnik, ki ima za oglišča središča očrtanih krožnic skladnih pravilnih večkotnikov, načrtanih nad stranicami prvotnega večkotnika.

4. ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIKI NAD STRANICAMI TRIKOTNIKA

V nadaljevanju načrtujemo enakostranične trikotnike nad stranicami različnih trikotnikov.

4.1 Enakostranični trikotnik

Nad stranicami enakostraničnega trikotnika ABC s stranico *a* načrtamo enakostranične trikotnike (slika 10). Ugotovimo, da so načrtani trikotniki skladni s trikotnikom ABC, saj se ujemajo v dolžinah treh stranic (skladnostni izrek). Vsakemu trikotniku nad stranicami trikotnika ABC očrtamo krožnico. Ugotovimo, da se krožnice sekajo v eni točki S. Središča



Slika 10

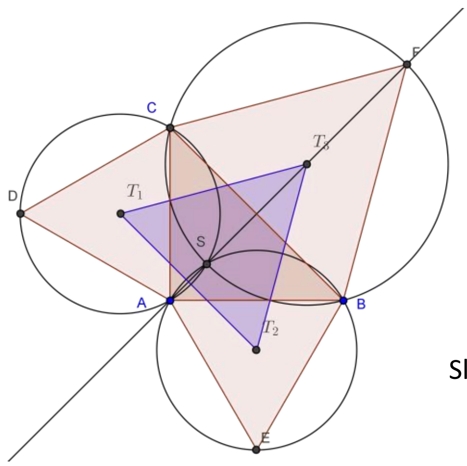
očrtanih krožnic T_1, T_2, T_3 so oglišča trikotnika $T_1T_2T_3$. Premislimo, za kateri trikotnik gre.

Točke A, B, C, T_1, T_2, T_3 ležijo na isti krožnici s središčem v točki S. Kar pomeni da so od točke S enako oddaljene. Dolžina daljice ST_1 je vsota tretjine višine enakostraničnega trikotnika nad stranico AB in ene tretjine višine trikotnika ABC. Enako ugotovimo za dolžino daljice ST_2 in dolžino daljice ST_3. Daljice ST_1, ST_2 in ST_3 so skladne z dolžino $\frac{2}{3}$ višine enakostraničnega trikotnika s stranico a. Tako so trikotniki T_1ST_2, T_2ST_3 in T_1ST_3 enakokraki in skladni s kotom pri vrhu 120°. Kar je dovolj, da lahko zatrdimo da je trikotnik $T_1T_2T_3$ enakostranični trikotnik.

4.2 Enakokraki pravokotni trikotnik

Nad krake in hipotenuzo enakokrakega pravokotnega trikotnika načrtamo enakostranične trikotnike (slika 11). Trikotnika nad katetama trikotnika ABC sta skladna. Trikotnikom nad stranicami trikotnika ABC očrtamo krožnice. Očrtane krožnice se sekajo v točki S. Središča očrtanih krožnic T_1, T_2 in T_3 so oglišča trikotnika $T_1T_2T_3$. Trikotnik $T_1T_2T_3$ je zagotovo enakokraki, saj je premica AS simetrala hipotenuze BC (trikotnik BFC je enakostranični). Trikotnika nad katetama sta skladna, zato zaradi ohranitve simetričnosti lahko trdimo da sta skladni daljici T_3T_2 in T_3T_1.

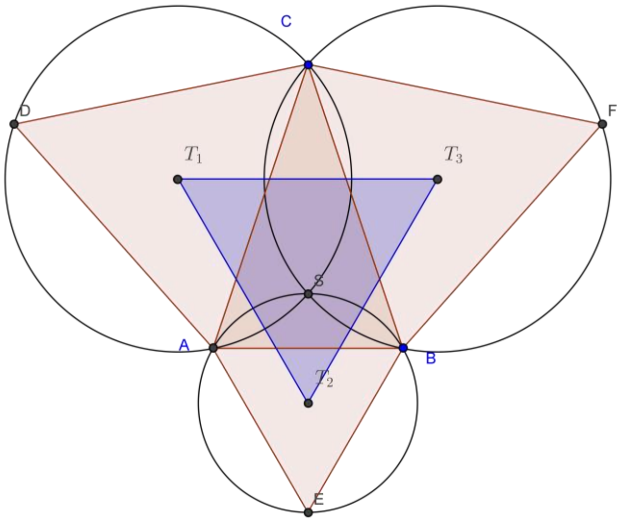
Trikotnik SFC je pravokotni (premer kroga SF s središčem v točki T_3 je hipotenuza), zato je velikost kota FSC 60° (kot pri C je pravi, kot pri F je 30°, saj je trikotnik CBF enakostranični). Daljica T_1T_3 je pravokotna na daljico SC, zato je velikost kota ST_3T_1 30°. Zaradi simetričnosti je velikost kota $T_1T_3T_2$ 60°. Ker je to kot pri vrhu enakokrakega trikotnika $T_1T_2T_3$, je trikotnik $T_1T_2T_3$ enakostranični trikotnik.



Slika 11

4.3 Enakokraki trikotnik

Nad kraka in osnovnico enakokrakega trikotnika ABC načrtamo enakostranične trikotnike (slika 12). Enakokraki trikotnik ABC je osno simetričen lik, zato sta trikotnika nad krakoma skladna. Točka T_2 je središče očrtane krožnice trikotnika nad osnovnico ABC. Točka T_2 zaradi simetričnosti leži na simetrali osnovnice trikotnika ABC. Očrtane krožnice se sekajo v točki S.

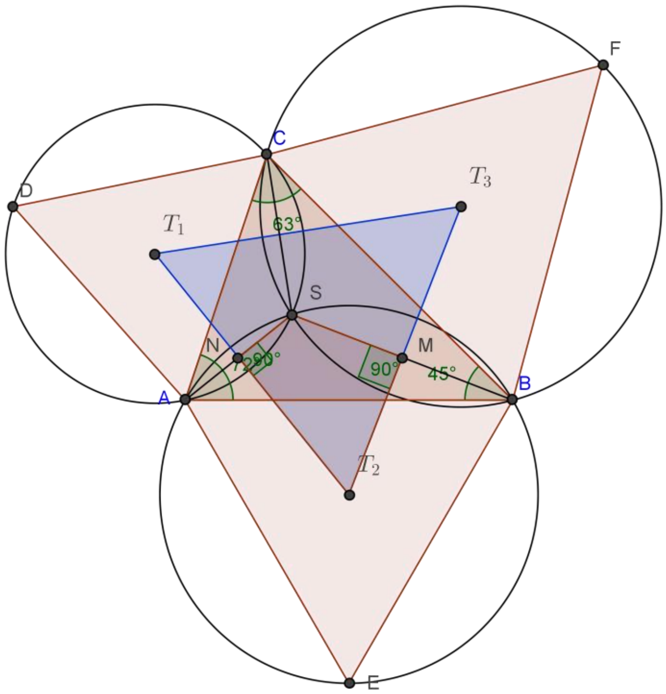


Slika 12

Trikotnik EBS je pravokotni trikotnik, saj je štirikotnik EBSA tetivni štirikotnik. Zato je vsota nasprotnih kotov 180°. Ker je velikost kota BEA 60°, je velikost kota ASB 120°. Zaradi simetričnosti sta kota z vrhom v oglišču B in A skladna, torej z velikostjo 90°. Tako je velikost kota ESB 60°. Zato je velikost kota T_3T_2S 30° (T_2T_3 je simetrala daljice SB). Zaradi simetričnosti je velikost kota $T_3T_2T_1$ 60°. Ker je T_2 vrh enakokrakega trikotnika $T_3T_1T_2$, sta tudi kota ob osnovnicah tega trikotnika velika 60°. Trikotnik $T_1T_2T_3$ je enakostranični trikotnik.

4.4 Raznostranični trikotnik

Nad stranice raznostraničnega trikotnika ABC načrtamo enakostranične trikotnike (slika 13). Točke T_1, T_2, T_3 so središča očrtanih krožnic teh enakostraničnih trikotnikov. Trikotnik $T_1T_2T_3$ je enakostranični trikotnik. Točka S je presečišče enakostraničnim trikotnikom očrtanih krožnic. Štirikotnik AEBS je tetivni štirikotnik. Vsota nasprotnih kotov v tetivnem štirikotniku je 180°. Ker je velikost kota BEA 60° (enakostranični trikotnik BAE), je velikost nasprotnega kota ASB 120°.



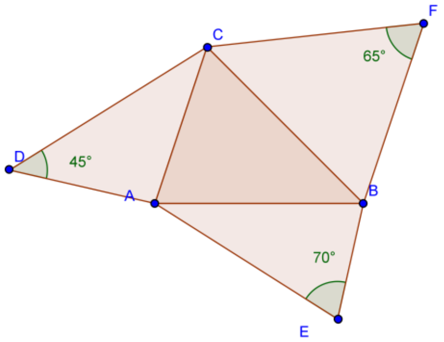
Slika 13

V trikotniku T_2MSN je velikost kotov z vrhom pri M in N 90°, saj je npr. točka T_2 enako oddaljena od krajišč daljice BS, zato leži na simetrali daljice BS (tudi točka T_3 zato leži na simetrali daljice BS). Točka T_2 je hkrati enako oddaljena od krajišč daljice AS, zato leži na simetrali daljice AS. Vsaka simetrala daljice je na daljico pravokotna. Ker vemo, da je velikost kota ASB 120°, preostane za kot MT_2N velikost 60°. Enako sklepamo za kote z vrhom v točkah T_1 in T_3. Trikotnik $T_1T_2T_3$ je enakostranični trikotnik.

5. RAZNOSTRANIČNI TRIKOTNIKI

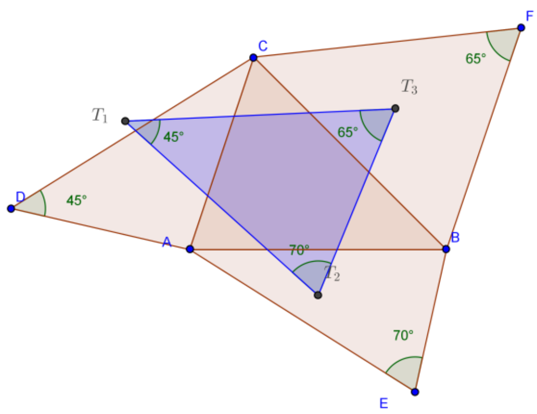
Če nad stranice poljubnega raznostraničnega trikotnika načrtamo enakostranične trikotnike in tem trikotnikom določimo središča očrtanih krožnic, je trikotnik, ki ima za oglišča središča očrtanih krožnic, tudi enakostranični trikotnik. Ta trikotnik je Napoleonov trikotnik.

Bolj zahtevna naloga je, če poljubnemu trikotniku načrtamo nad stranice poljubne trikotnike (slika 14). Nad stranicami trikotnika ABC so načrtani raznostranični trikotniki. Zapisane so tudi velikosti kotov z vrhom pri oglišču, ki leži nasproti stranice trikotnika ABC.



Slika 14

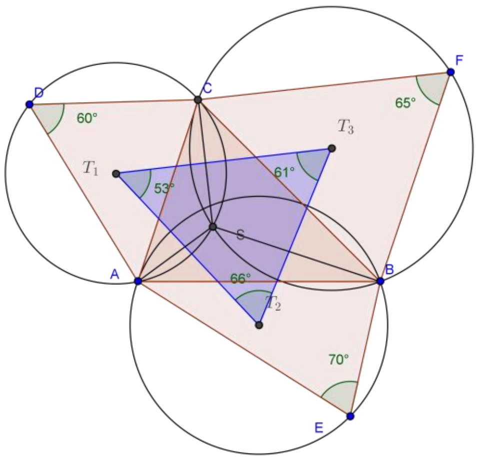
V naslednjem koraku določimo središča očrtanih krožnic vsem trem trikotnikom, načrtanim nad stranicami trikotnika ABC (slika 15).



Slika 15

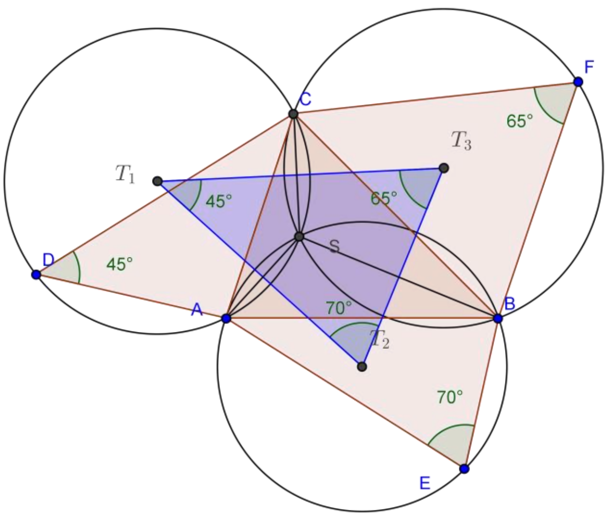
Točke T_1, T_2 in T_3 so središča očrtanih krožnic. Hkrati so oglišča trikotnika $T_1T_2T_3$. Na tem konkretnem primeru opazimo, da je velikost vseh notranjih kotov v trikotniku $T_1T_2T_3$ enaka velikostim kotov v trikotnikih nad stranicami z vrhom v oglišču nasproti stranic trikotnika

ABC. Če nad stranicami trikotnika ABC načrtamo trikotnike, za katere vsota kotov, ki ležijo nasproti stranic trikotnika ABC ni 180°, trikotnik $T_1T_2T_3$ nima kotov z velikostmi z opisano lastnostjo (slika 16), torej ni Napoleonov trikotnik. Vsota kotov v tem primeru je 60° + 70° + 65° = 195°. Vsota notranjih kotov v trikotniku $T_1T_2T_3$ je seveda 53° + 66° + 61° = 180°. S spreminjanjem velikosti kotov nad stranicami trikotnika ABC ugotovimo, da ima trikotnik $T_1T_2T_3$ enako velikost kotov kot so koti v trikotnikih nasproti stranic trikotnika ABC le v primeru, ko je vsota teh kotov iztegnjeni kot. Samo v takem primeru, lahko načrtamo Napoleonov trikotnik.



Slika 16

Poglejmo sliko z očrtanimi krožnicami (slika 17), kjer je včrtan Napoleonov trikotnik.



Slika 17

Štirikotniki AEBS, BFCS in CDAS so tetivni štirikotniki. Koti pri ogliščih E, F in D naj bodo ε, φ in δ. Zaradi lažje predstave, so na sliki zapisane konkretne velikosti kotov. Ker je vsota nasprotnih kotov v tetivnem štirikotniku 180°, so koti v omenjenih tetivnih štirikotnikih z vrhom v točki S: $180° - \varepsilon$, $180° - \varphi$, $180° - \delta$. Vsota teh kotov je 360°, kar pomeni, da je $180° - \varepsilon + 180° - \varphi + 180° - \delta = 360°$. Lahko zapišemo $540° + (\varepsilon + \varphi + \delta) = 360°$. Zato je $\varepsilon + \varphi + \delta = 180°$.

Središča trikotnikom očrtanih krožnic so oglišča Napoleonovega trikotnika le takrat, kadar je vsota notranjih kotov nasproti stranic prvotnega trikotnika enaka iztegnjenemu kotu.

6. ZAKLJUČEK

Kaj sem ugotovila in se naučila v raziskovalni nalogi?

Napoleonov trikotnik je trikotnik, ki ima za oglišča središča očrtanih krožnic trikotnikov, ki jih načrtamo nad stranicami izbranega trikotnika. Notranji koti Napoleonovega trikotnika so skladni s tistimi koti trikotnikov nad stranicami, ki ležijo nasproti stranic prvotnega trikotnika. To sem najprej pokazala na primerih enakostraničnega in enakokrakih trikotnikov. Če nad njihovimi stranicami načrtamo enakostranične trikotnike, je Napoleonov trikotnik enakostraničen. Kar sem ugotovila tudi v primeru, če enakostranične trikotnike načrtamo nad stranice raznostraničnega trikotnika. S pomočjo računalniškega programa Geogebra sem spreminjala trikotnike nad stranicami izbranega trikotnika in opazovala, pri katerih pogojih je nastal Napoleonov trikotnik. Pred opazovanjem Napoleonovega trikotnika sem predstavila še nekaj lastnosti pravilnih večkotnikov.

Predstavljeni so tako imenovani zunanji Napoleonovi trikotniki. Zasledila sem namreč obstoj notranjih Napoleonovih trikotnikov, če trikotnike nad stranicami izbranega trikotnika načrtujemo navznoter. S temi primeri se nisem ukvarjala.

Po prebranem gradivu sem ugotovila, da Napoleon s temi trikotniki nima neke povezave, čeprav se je zanimal za znanost in je pravzaprav precej nejasno, kdaj in zakaj so predstavljene trikotnike poimenovali Napoleonovi trikotniki [3]. Za nadaljnje raziskovanje bi prav gotovo bilo zanimivo pokazati povezavo med ploščino načrtanih trikotnikov nad stranicami izbranega trikotnika in Napoleonovim trikotnikom, za kar pa je potrebno še kaj matematičnega znanja.

Morda pa bi lahko natančneje raziskala lastnosti večkotnika, ki ima za oglišča središča očrtanih krožnic *n*-kotnikov nad stranicami izbranega *n*-kotnika.

Predvsem sem z raziskovalno nalogo dobila izkušnje in vpogled v nekoliko ne-šolsko matematiko.

7. VIRI

[1] Presek, letnik 13 (1985/86), številka 2, str. 75 – 77, Damijan Kobal, Napoleonov algoritem

[2] www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2001/ura/tomas/vstopna_komplet.htm

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Napoleon%27s_theorem